
Stanford University Libraries
3 6105 001 367 858







Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. B. Witzschel.**



Erster Jahrgang.

Mit 9 lithographirten Tafeln und Holzschnitten.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1856.

INHALT.

Arithmetik und Analysis.

Theoretische und praktische Geometrie.

Mechanik.

I.

Die Kegelschnitte als Collinearverwandte des Kreises.

Von O. Schlömilch.

Bei einer rein geometrischen Behandlung der Kegelschnitte, welche die letzteren ihrem Namen gemäss definirt, sind zwei verschiedene Methoden anwendbar, je nachdem man vom Besonderen zum Allgemeinen aufsteigen oder Jenes aus Diesem ableiten will; man kann nämlich ebensowohl vom geraden Kegel ausgehen und nachher die Schnitte des schiefen Kegels betrachten, als auch umgekehrt mit den letzteren den Anfang machen. Der erste Gedankengang empfiehlt sich durch die Leichtigkeit, womit er zu den auf Brennpunkte, Directricen, Tangenten etc. bezüglichen Eigenschaften, überhaupt zu den metrischen Relationen an Kegelschnitten führt*), und er dürfte daher in pädagogischer Beziehung unleugbare Vorzüge besitzen; seine schwache Seite aber besteht darin, dass er seine Anwendbarkeit verliert, sobald es auf diejenigen Eigenschaften der Kegelschnitte ankommt, welche der Geometrie der Lage angehören, wie z. B. das Pascal'sche Sechseck. Anders, und zwar gerade umgekehrt, gestalten sich die Verhältnisse, wenn man die Kegelschnitte als Schnitte des schiefen Kegels, d. h. als perspectivische Projectionen (Collinearverwandte) des Kreises definirt. Nach dem Poncelet'schen Verfahren ergeben sich hierbei die projectivischen Eigenschaften jener Curven mit überraschender Einfachheit und Eleganz, wobei noch der wesentliche Umstand zu beachten ist, dass die Betrachtung fortwährend im Gebiete der Anschauung bleibt; dagegen verursacht aber die Entwickelung der oben erwähnten metrischen Relationen einige Mühe und nur durch eine sorgfältige Untersuchung der involutorischen Punkte und Strahlen findet man sich auf den Mittelpunkt, die

*) Wie die belgischen Geometer Quetelet und Dandelin zuerst gezeigt haben, bedarf es hierzu nur der beiden Kugeln, welche den Rotationskegel und die schneidende Ebene berühren; die Berührungspunkte sind die Brennpunkte. Eine von diesem Principe ausgehende Darstellung der Kegelschnittslehre findet man in des Verfassers „Grundzügen der Geometrie; Th. II. Cap. VI. Eisenach. 1854." Was die Directricen der Kegelschnitte betrifft, so sind dieselben die Durchschnitte der schneidenden Ebene mit den Ebenen der beiden Kreise, in welchen jene Kugeln den Kegel berühren. — Es ist übrigens bei diesem Verfahren ziemlich gleichgültig, ob man die Kegelschnitte vorher planimetrisch als Entfernungsörter betrachtet hat und nachher zum Kegel übergeht, wie Manche wollen, oder ob man gleich stereometrisch anfängt; die Identität beider Definitionen ergiebt sich in jedem Falle sehr leicht. Man s. hierüber das lesenswerthe Osterprogramm des Gymnasiums zu Gross-Glogau (1855) vom Oberlehrer Dr. Rühle.

Achsen, Brennpunkte etc. der Kegelschnitte durch*). Diesem Uebelstande wäre auf zweierlei Weise abzuhelfen; man müsste entweder direct, und zwar rein geometrisch, den Satz beweisen, dass jeder Schnitt eines schiefen Kegels zugleich als Schnitt eines anzugebenden geraden Kegels betrachtet werden darf (was übrigens noch nicht geschehen ist), oder man hätte für den schiefen Kegel selber die projectivische Bedeutung des Mittelpunktes, der Achsen etc. nachzuweisen. In dieser letzteren Richtung bewegen sich die folgenden Untersuchungen, die als Skizze einer neuen Theorie der Kegelschnitte gelten können.

I. Die perspectivische Projection.

Theils um des Verständnisses der späteren Figuren willen, theils um einige bisher unbeachtete Punkte hervorzuheben, erinnern wir kurz an die Grundgesetze der perspectivischen Projection. Zwei parallele Ebenen *FG* und *HJ*, die kurz 𝔈′ und 𝔈″ heissen mögen, werden von einer dritten Ebene *GH* oder 𝔈 geschnitten (Taf. I. Fig. 1); in 𝔈′ befinden sich beliebige Punkte *A*′, *B*′ etc., in 𝔈″ das Projectionscentrum *O*, die Geraden *OA*′, *OB*′ etc. schneiden 𝔈 in den Punkten *A*, *B* etc. und letztere sind die perspectivischen Projectionen von *A*′, *B*′ etc. Die in 𝔈 und 𝔈′ liegenden Punktesysteme nennen wir einander collinear verwandt, den Durchschnitt von 𝔈 und 𝔈′ die Collineationsachse, den Durchschnitt von 𝔈 und 𝔈″ die Polare**) des Systemes 𝔈. Auf letztere fallen die perspectivischen Projectionen aller Punkte, welche in 𝔈′ unendlich weit von der Collineationsachse entfernt sind; so entspricht z. B. *P* dem Punkte P'_∞. — Sehr wesentlich ist die Bemerkung, dass der Begriff der perspectivischen Projection oder der collinearen Verwandtschaft ein reciproker ist, dass folglich auch die in 𝔈′ liegenden Punkte als die perspectivischen Projectionen der in 𝔈 befindlichen Punkte angesehen werden können. Demgemäss besitzt das System 𝔈′ gleichfalls eine Polare, welche die Projectionen aller in 𝔈 unendlich entfernten Punkte enthält; ist Q_∞ ein derartiger Punkt und *Q*′ seine Projection auf 𝔈′, so stellt eine durch *Q*′ parallel zur Collineationsachse gelegte Gerade die Polare des Systemes 𝔈′ dar. Im Folgenden werden wir die durch *P* und *Q*′ gehenden Polaren mittelst der kurzen Bezeichnungen Polare und Gegenpolare unterscheiden.

Die erwähnten Verhältnisse sind bequem in einer Ebene zu übersehen, wenn man sich 𝔈′ soweit um die Collineationsachse und 𝔈″ soweit um die Polare gedreht denkt, dass alle drei Ebenen zusammenfallen; die Darstellung ist dann folgende (Fig. 2). Die Horizontale durch *G* bedeutet die Collineationsachse, die hierzu parallele Gerade *HP* die Polare, der Flächenstreifen zwischen beiden Geraden ist die Ebene 𝔈. Ueber dieser liegt die Ebene 𝔈″ mit dem Projectionscentrum *O*, unterhalb 𝔈 befindet sich der von *G* nach *F* hin laufende Theil der Ebene 𝔈′, dagegen fällt der von *G* nach *Q*′ sich erstreckende Theil von 𝔈′ mit auf 𝔈, so dass der zwischen Collineationsachse und Gegenpolare enthaltene Flächenstreifen eine doppelte Bedeutung hat und als zwei übereinander gelagerte Ebenen zu denken ist. Man hat übrigens bei consequenter Anwendung der accentuirten Buchstaben

*) S. die schöne Arbeit von Fr. Seydewitz in Grunert's Archiv. Bd. IV. S. 246.

**) In der Perspective heisst diese Gerade der Horizont; Magnus giebt ihr (Aufgaben und Lehrsätze aus der analyt. Geometrie d. Ebene, S. 45) den Namen Gegenachse, der den obigen Untersuchungen zufolge nicht sehr passend sein dürfte.

für die Punkte der Ebene $\mathfrak{E}'$ und der nicht accentuirten für die Punkte in $\mathfrak{E}$ keine Verwechselung beider Ebenen zu besorgen. Ebenso würde auch der unterhalb der Collineationsachse liegende Theil der Zeichnung in den Fällen doppeldeutig sein, wo man die unter die Collineationsachse herabgehende Fortsetzung der (vorhin noch begrenzten) Ebene $\mathfrak{E}$ darstellen will, wobei dieselbe Bezeichnung zur Unterscheidung dient. Für die graphische Darstellung ist es übrigens gut, sich dabei eine feste Regel zu bilden; wir haben uns im Folgenden zwischen Collineationsachse und Polare immer die Ebene $\mathfrak{E}$, unterhalb der Collineationsachse stets $\mathfrak{E}'$ obenauf liegend gedacht und alle Geraden, welche der jedesmal darunter liegenden Ebene angehören, durch Punktirung hervorgehoben, wie es an der Gegenpolare und an GQ_∞ zu sehen ist.

Hinsichtlich der Constructionen, welche sich an die obige Darstellung knüpfen, werden wenige Worte genügen. Wenn, wie gewöhnlich, Collineationsachse, Polare und Projectionscentrum gegeben sind, so kann jede in $\mathfrak{E}'$ befindliche unendliche Gerade GP'_∞ leicht auf die Weise projicirt werden, dass man durch O parallel zu GP'_∞ eine Gerade legt, welche die Polare in P schneidet, und nachher GP zieht; legt man ferner durch O eine zu GP parallele Gerade, welche die Verlängerung von GP'_∞ in Q' schneidet, so hat man einen Punkt der Gegenpolare; letztere ist immer soweit von der Collineationsachse entfernt wie das Projectionscentrum von der Polare. Umgekehrt findet man eben so leicht, wenn Collineationsachse, Projectionscentrum, Gegenpolare und GP gegeben sind, die Projection GP'_∞ und die Polare. Legt man durch O irgend eine Gerade, die GP in A und GP'_∞ in A' schneidet, so sind A und A' entsprechende Punkte. Aus einem dieser beiden Punkte ist folglich der andere leicht abzuleiten, indem man durch den gegebenen Punkt eine Hilfslinie (GP oder GP'_∞) legt, diese projicirt und nachher die Gerade OAA' benutzt.

Vier in einer Geraden liegenden Punkten A', B', C', D' des einen Systemes entsprechen vier gleichfalls in gerader Linie liegende Punkte des anderen Systemes und zwar finden dabei die bekannten Doppelschnittsverhältnisse statt

$$\frac{AB}{BD}:\frac{AC}{CD}=\frac{A'B'}{B'D'}:\frac{A'C'}{C'D'},$$
$$\frac{AB}{BC}:\frac{AD}{DC}=\frac{A'B'}{B'C'}:\frac{A'D'}{D'C'},$$
$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{A'C'}{C'B'}:\frac{A'D'}{D'B'},$$

von denen wir auf zwei verschiedene Weisen Gebrauch machen werden.

Wenn erstens die linke Seite einer dieser Gleichungen $=1$ ist, so hat die rechte Seite denselben Werth, d. h. die Projectionen von vier harmonischen Punkten einer Geraden liegen wiederum harmonisch. Nehmen wir zweitens statt des Punktes C den Punkt P und statt D den Punkt Q_∞, so tritt P'_∞ an die Stelle von C', Q' an die von D' und die letzte Doppelschnittsgleichung geht dann in die folgende über

$$\frac{AP}{BP}:1=1:\frac{A'Q'}{B'Q'}, \quad \text{oder} \quad \frac{AP}{BP}=\frac{B'Q'}{A'Q'}.$$

Die Punkte P und Q sind die von Steiner betrachteten Durchschnitte der Parallelstrahlen und die für sie geltende Beziehung ist der Anfang der Involutionstheorie, auf die wir aber nicht weiter einzugehen brauchen.

Wichtig für das Spätere ist noch folgende, wie es scheint bisher unbeachtet gebliebene Bemerkung. Zwei entsprechende Punkte haben im Allgemeinen verschiedene Entfernungen von der Collineationsachse, doch giebt es eine Reihe von Punkten, deren Projectionen eben so hoch über der Collineationsachse liegen, als sie selbst unter derselben. Zieht man nämlich von O (Fig. 3) aus eine Gerade, welche die Polare in D und die Collineationsachse in A senkrecht schneidet, nimmt ferner $DF = DO$ und zieht die beliebige Gerade GFH, welcher die Gerade $GF' \parallel OH$ entspricht, so bemerkt man leicht die Congruenz der Dreiecke AGF und AGF'; es liegen demnach die entsprechenden Punkte F und F' in gleichen Abständen von der Collineationsachse. Einer durch F parallel zur Collineationsachse gelegten Geraden entspricht eine durch F' gehende Parallele zu AG, folglich sind alle auf diesen Parallelen liegenden einander entsprechenden Punkte, wie z. B. E und E', gleichweit von der Collineationsachse entfernt. Bezeichnen wir den Abstand eines in $\mathfrak{C}$ liegenden Punktes von AG mit d und den Abstand des ihm entsprechenden Punktes von derselben Geraden mit d', so ist überhaupt

für $d < AF$, $d > d'$,
„ $d = AF$, $d = d'$,
„ $d > AF$, $d < d'$.

Die beiden einander entsprechenden Punkte F und F', deren Verbindungslinie von der Collineationsachse normal halbirt wird, wollen wir die beiden **Hauptpunkte** der betrachteten collinearen Systeme nennen; sie stehen in einer eigenthümlichen Beziehung zu je zwei anderen beliebigen einander entsprechenden Punkten P und P', deren ersten wir auf die willkührlich gezogene Gerade FG legen. Fällen wir nämlich auf OF und OF' die Senkrechten PM und $P'M'$, so haben wir zunächst aus den ähnlichen Dreiecken FMP und $F'M'P'$

$$\frac{FP}{FM} = \frac{F'P'}{F'M'};$$

die einander entsprechenden Punkte A, F, M, D und A', F', M', D'_∞ stehen ferner in dem Doppelschnittsverhältnisse

$$\frac{AF}{FM} : \frac{AD}{MD} = \frac{AF'}{F'M'} : 1$$

oder

$$\frac{DM}{FM} = \frac{AF' \,.\, AD}{F'M' \,.\, AF} = \frac{AD}{F'M'};$$

die Verbindung dieser Relation mit der vorigen giebt

$$\frac{FP}{DM} = \frac{F'P'}{AD}$$

oder auch, wenn man DM durch die parallele und gleiche Gerade PN ersetzt,

$$\frac{FP}{NP} = \frac{F'P'}{AD}.$$

Diese Gleichung führt unmittelbar zu einer Eigenschaft der Kreisprojection. Lässt man nämlich den Punkt P' einen mit dem Halbmesser $F'P'$ beschriebenen Kreis durchlaufen, so bleibt die rechte Seite der obigen Gleichung bei jeder Lage von P' dieselbe, mithin ist auch linker Hand für alle Punkte der Kreisprojection das Verhältniss $FP : NP$ constant (d. h. F der Brennpunkt und DH die Directrix des entstehenden Kegelschnitts).

II. Die Kreisschnitte des schiefen Kegels.

Aus der Elementargeometrie setzen wir als bekannt voraus, dass jeder zur Kegelbasis parallele und jeder Wechselschnitt des Kegels ein Kreis ist. Die Parallelschnitte untersuchen wir nicht weiter, (sie würden auf die Lehre von den Aehnlichkeitspunkten führen) dagegen haben wir uns die Wechselschnitte etwas genauer anzusehen.

Die kürzeste Kegelseite sei OA', die längste OB', der zugehörige Durchmesser der Basis $A'B'$ und AB seine Projection; die letzteren Geraden schneiden sich in einem Punkte D, welcher auf der Collineationsachse der beiden Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ liegt (Fig. 4). Wir legen durch D eine Ebene, welche den Kegel längs der Geraden OEE' berührt, und bemerken, dass DE der Durchschnitt der Berührungsebene mit der Ebene $\mathfrak{E}$ und die entsprechende Gerade DE' der Durchschnitt der Tangentialebene mit $\mathfrak{E}'$ ist, woraus weiter folgt, dass DE den Kreis AEB, DE' den Kreis $A'E'B'$ berührt. Die ähnlichen Dreiecke $AA'D$ und $B'BD$ liefern nun die Proportion

$$AD : A'D = B'D : BD,$$

woraus

$$AD \,.\, BD = A'D \,.\, B'D,$$

d. h.

$$\overline{DE}^2 = \overline{D'E'}^2 \text{ oder } DE = D'E'.$$

Legen wir die Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ mit den darin befindlichen Kreisen auf die in No. I. gezeigte Weise aus einander (Fig. 5) und ziehen von irgend einem anderen Punkte P der Collineationsachse die Tangenten PQ und PQ' an jene Kreise, so ist weiter

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{DP}^2 + \overline{DM}^2 - \overline{MQ}^2 \\ &= \overline{DP}^2 + \overline{DM}^2 - \overline{ME}^2 \\ &= \overline{DP}^2 + \overline{DE}^2,\end{aligned}$$

aus gleichem Grunde

$$\overline{PQ'}^2 = \overline{DP}^2 + \overline{DE'}^2$$

d. i. wegen des vorigen $DE = DE'$,

$$PQ = PQ'.$$

Bei zwei collinearen und collinearliegenden Kreisen besitzt demnach die Collineationsachse die Eigenschaft, dass die von irgend einem ihrer Punkte an die Kreise gelegten Tangenten von gleicher Länge sind; mit anderen Worten: die Collineationsachse zweier Kreise ist identisch mit deren Potenzlinie.*)

Für zwei gegebene Kreise wird die Potenzlinie bekanntlich auf die Weise gefunden, dass man einen dritten Kreis beschreibt, welcher den ersten Kreis in U und V, den zweiten in U' und V' schneidet, darauf UV und $U'V'$ bis zu ihrem Durchschnitte W verlängert und von diesem eine Senkrechte auf die Centrale beider Kreise herablässt; für die vorige Be-

*) Ausser der obigen Benennung sind noch die Namen Radicalachse, Chordale und ideale Sehne im Gebrauch; nach der Entdeckung der Collineation kann aber nur die Bezeichnung Collineationsachse auf consequente Richtigkeit Anspruch machen, weshalb auch Magnus nie ein anderes Wort gebraucht.

trachtung folgt hieraus, dass zwei beliebige Kreise als collineare und collinearliegende Figuren angesehen werden können. Um das Projections-(Collineations-)centrum zu finden, braucht man nur die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten beider Kreise bis zu ihrem Durchschnitte O (dem äusseren Aehnlichkeitspunkte) zu verlängern; ebenso kann auch der innere Aehnlichkeitspunkt als Projectionscentrum dienen, nur liegt in diesem Falle der Wechselschnitt nicht auf derselben, sondern auf der entgegengesetzten Seite der Kegelfläche. Was endlich die beiden Polaren betrifft, so ergeben sie sich aus der Bemerkung, dass zwei parallelen Geraden in $\mathfrak{E}'$ zwei in einem Punkte der Polare von $\mathfrak{E}$ zusammenlaufende Gerade entsprechen und umgekehrt; man legt daher an den einen Kreis zwei parallele Tangenten, welche die Collineationsachse in zwei Punkten schneiden, dann von den letzteren Punkten aus Tangenten an den zweiten Kreis, deren Durchschnitt einen Punkt der ersten resp. zweiten Polare giebt.

Aus der Entstehung des Wechselschnittes geht leicht hervor, dass die Mittelpunkte der beiden Kreise keine entsprechenden Punkte sind; daran knüpft sich die Frage nach der gegenseitigen Beziehung zwischen den vier Punkten M, M', N, N', von denen M und N' die Mittelpunkte der beiden Kreise und M', N die ihnen entsprechenden Punkte bezeichnen (Fig. 6). Jede durch N' gehende Gerade wird von dem in E' befindlichen Kreise harmonisch getheilt, weil bekanntlich drei in gleichen Entfernungen auf einer Geraden liegende Punkte A', N', B' mit dem unendlich entfernten Punkte P'_∞ dieser Geraden zusammen ein System harmonischer Punkte bilden; den Punkten A', N', B', P'_∞ entsprechen der Reihe nach A, N, B, P, diese liegen gleichfalls harmonisch und demnach ist N der harmonische Pol des ersten Kreises in Beziehung auf die durch P gehende Polare. Aus gleichen Gründen ist M' der harmonische Pol des zweiten Kreises in Beziehung auf die durch Q' gehende Gegenpolare. — Einem Systeme zu $A'B'$ paralleler Kreissehnen entspricht eine Reihe von Sehnen, welche sich im Punkte P schneiden; hat man umgekehrt in $\mathfrak{E}$ eine Schaar von Sehnen parallel zu CD, so entspricht diesen in $\mathfrak{E}'$ eine Folge von Sehnen, welche durch Q' gehen. Ueberhaupt lassen sich an dieser Stelle die bekannten Eigenschaften der harmonischen Pole und Polaren, Berührungscentren und Berührungssehnen, soweit sie den Kreis betreffen, leicht ableiten.

Besondere Aufmerksamkeit verdienen des Folgenden wegen die conjugirten Sehnen. In einem Kreise (Fig. 7) sei N der harmonische Pol in Beziehung auf eine ausserhalb gegebene durch den Punkt E gehende Polare; durch N ziehen wir eine beliebige Gerade, welche den Kreis in A und B, sowie die Polare in F schneidet, von letzterem Punkte legen wir an den Kreis Tangenten, deren Berührungspunkte C, D heissen mögen, und ziehen endlich die Gerade CD. Diese geht durch den Pol N und ist die dem Berührungscentrum F zugehörige Berührungssehne; die verlängerte CD schneidet die Polare in G und zufolge bekannter Eigenschaften der Pole, Polaren, Berührungscentra und Berührungssehnen ist nun G Berührungscentrum für AB als Berührungssehne. Zwei in dieser Weise zusammengehörige Sehnen AB und CD mögen conjugirte Sehnen heissen; ihre Construction ist im Vorigen unmittelbar enthalten, kann aber auch auf eine andere Weise ausgeführt werden, die wegen späterer Folgerungen erörtert werden muss. Ziehen wir die Geraden MF und MG, welche die Sehnen AB und CD in H und K senkrecht schneiden, so erkennen wir, dass das

Dreieck MHN in zwei Winkeln mit dem Dreiecke EFN, ebenso Dreieck MKN in zwei Winkeln mit Dreieck EGN übereinstimmt; daraus folgt

$$\angle HMN = \angle EFN, \quad \angle KMN = \angle EGN,$$
$$\triangle MEG \sim \triangle FEN, \quad \triangle MEF \sim \triangle GEN;$$

das Eine wie das Andere giebt

$$EG : EM = EN : EF$$

oder

$$EF \,.\, EG = EM \,.\, EN.$$

Legen wir von E aus an den Kreis eine Tangente, deren Berührungspunkt S heissen möge und nehmen auf EM den Abschnitt $ER = ES$, so wird die vorige Gleichung zu

$$EF \,.\, EG = \overline{ER}^2$$

und zeigt, dass ein über FG als Durchmesser beschriebener Kreis immer durch den festen Punkt R geht. Kommt es also auf eine rasche Construction zweier conjugirten Sehnen an, so braucht man durch den Punkt R nur zwei auf einander senkrechte Gerade zu ziehen, welche die Polare in F und G schneiden; FN und GN sind dann die gesuchten Sehnen.

III. Die Kegelschnitte.

Wie der Name sagt, verstehen wir unter einem Kegelschnitte jede Curve, welche beim Durchschnitte irgend eines geraden oder schiefen Kegels mit irgend einer Ebene entsteht, oder was dasselbe ist, jede mit dem Kreise in Collineationsverwandtschaft stehende Linie; dabei ist auch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass das Projections- oder Collineationscentrum (der Mittelpunkt der Kegelfläche) ins Unendliche wegrückt, mithin der Kegel zu einem Cylinder degenerirt.

Uebergehen wir gleich die speciellen und leicht zu behandelnden Fälle, in denen der Kegelschnitt zu zwei Geraden, einer Geraden, oder zu einem Punkte wird, so bleiben drei verschiedene Arten von Kegelschnitten entsprechend den drei verschiedenen Lagen, welche die schneidende Ebene gegen die Kegelfläche einnehmen kann. Die genannte Ebene trifft nämlich entweder alle erzeugenden Geraden der Fläche (die Kegelseiten) auf der einen Seite des Flächenmittelpunktes, oder sie schneidet alle jene Geraden mit Ausnahme einer einzigen, oder endlich sie begegnet wiederum allen aber so, dass die Durchschnitte theils auf der einen, theils auf der anderen Seite des Mittelpunktes liegen; die diesen Lagen entsprechenden Schnitte heissen der Reihe nach elliptische, parabolische, hyperbolische. — Man kann diese Definition noch etwas anders fassen, wenn man irgend einen Kreisschnitt der Kegelfläche als deren Directrix anzieht und durch den Mittelpunkt der Fläche parallel zur Schnittebene eine Hilfsebene legt; aus dem Vorigen geht dann unmittelbar hervor, dass der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, je nachdem die Hilfsebene ausserhalb der Directrix liegt, sie in einem Punkte berührt, oder in zwei Punkten schneidet. Bei unserer projectivischen Betrachtungsweise denken wir uns jenen Kreisschnitt des Kegels als dessen Basis in der Ebene $\mathfrak{E}'$ liegend; der Kegelschnitt ist dann die Projection dieses Kreises auf $\mathfrak{E}$, die vorhin construirte Hilfsebene schneidet $\mathfrak{E}'$ in einer Geraden, welche mit der Gegenpolare identisch ist, und wir haben daher den Satz: Die perspectivische Projection des Kreises wird zu einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Gegenpolare mit jenem

Kreise keinen Punkt, einen Punkt oder zwei Punkte gemein hat.

Aus bekannten Eigenschaften der perspectivischen Projection und des Kreises folgt nun zunächst die für alle Kegelschnitte geltende Behauptung, dass eine Gerade und ein Kegelschnitt höchstens zwei Punkte gemein haben, ferner dass letztere in einen Punkt zusammenfallen können, wobei die Secante zur Tangente wird und dass endlich auch Gerade möglich sind, die keinen Punkt mit dem Kegelschnitte gemein haben. Zugleich ergiebt sich ein Verfahren zur Construction der Tangenten; soll nämlich durch einen Punkt P eine Tangente an den Kegelschnitt K gelegt werden, so projicire man P auf $\mathfrak{E}'$ und lege durch P' eine Tangente an den Kreis K', die dieser Geraden entsprechende Linie in $\mathfrak{E}$ ist die gesuchte Tangente. Soll ferner an K eine Tangente parallel zu einer gegebenen Geraden PQ gelegt werden, so projicire man PQ_∞ auf $\mathfrak{E}'$ und nenne Q' die auf der Gegenpolare liegende Projection des unendlich entfernten Punktes Q_∞; man ziehe ferner durch Q' eine den Kreis K' berührende Gerade und projicire letztere wieder auf $\mathfrak{E}$, die Projection ist die verlangte Tangente. — Beide Aufgaben haben im Allgemeinen zwei Lösungen, doch können letztere unter Umständen zu einer einzigen Lösung zusammenfallen oder unmöglich werden.

Mittelst des Satzes, dass die Projection einer harmonisch getheilten Geraden eine gleichfalls harmonisch getheilte Gerade ist, lassen sich die ganzen Lehren von den harmonischen Polen und Polaren, den Berührungsmittelpunkten und den Berührungssehnen etc. unmittelbar vom Kreise auf die Kegelschnitte übertragen; ebenso bleiben alle nur linealen Constructionen am Kreise dieselben bei den Kegelschnitten. Hierher gehören auch die bekannten Eigenschaften der ein- und umbeschriebenen Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsecke (z. B. der Pascal'sche Satz), was Alles keiner näheren Erläuterung bedarf. Dass aber auch die metrischen Relationen nunmehr leicht zu entwickeln sind, wird man sogleich sehen.

1) Die Parabel.

In Fig. 8 Tafel II. sei GH die Collineationsachse, JK die Polare, $U'V'$ die Gegenpolare, welche den um N' beschriebenen Kreis in U' berührt, und O das Projectionscentrum, dessen Abstand von der Polare wie immer der Entfernung von Collineationsachse und Gegenpolare gleich ist. Jede durch N' gehende Gerade wird von N' und dem Kreise harmonisch getheilt, dasselbe gilt auch von den entsprechenden durch N und den Kegelschnitt bis zur Polare gehenden Geraden; es ist folglich die Projection des Kreismittelpunktes N' der harmonische Pol N des Kegelschnittes in Beziehung auf die Polare JK. Etwas Aehnliches findet umgekehrt statt. Legen wir nämlich durch irgend einen Punkt V' der Gegenpolare eine Reihe von Kreissecanten wie z. B. $V'P'Q'$ und suchen zu V', P', Q' den vierten zwischen P' und Q' fallenden harmonischen Punkt M', so liegen alle diese vierten harmonischen Punkte in einer Geraden, welche nichts Anderes als die zu dem Berührungscentrum V' gehörende Berührungssehne $C'M'$ ist; letztere geht jederzeit durch den Punkt U' wie auch V' auf der Gegenpolare gewählt sein möge. Den in $\mathfrak{E}'$ construirten durch Q' gehenden Kreissecanten $P'Q'V'$ etc. entsprechen in $\mathfrak{E}$ parallele Sehnen PQV_∞ etc. und da Q', M', P', V' harmonisch liegende Punkte waren, so müssen es auch Q, M, P, V_∞ sein, was wegen des unendlich entfernten V_∞ nur möglich ist, wenn M die Sehne PQ halbirt. Der Geraden $C'M'$, welche alle

M' enthält, entspricht nun eine Gerade CM, welche die Mittelpunkte M aller parallelen Sehnen verbindet, und da $C'M'$ durch U' geht, so geht CM nach dem unendlich entfernten Punkte der Parabel; d. h. zusammen: die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen einer Parabel liegen in einer Geraden einem sogenannten Durchmesser der Parabel; alle Durchmesser sind parallel.

Die gemeinschaftliche Richtung der Durchmesser kann leicht näher angegeben werden; bei zwei einander entsprechenden Geraden CMU_∞ und $C'M'U'$ ist nämlich jederzeit (analog Fig. 2) $OU' \parallel CM$, die Durchmesser der Parabel sind also sammt und sonders der Geraden OU' parallel.

Es liegt nun die Frage nahe, ob die Richtung der parallelen Sehnen so gewählt werden könnte, dass der zugehörige Durchmesser die Sehnen normal halbirt; die Antwort hierauf ergiebt sich aus der Bemerkung, dass einerseits OU' die Richtung der Durchmesser ist andererseits $OV' \parallel PQ$ sein muss, wenn PQ die Projection von $P'Q'$ bedeutet. Die senkrechte Lage von CM gegen PQ findet demnach statt, sobald OU' mit OV' einen rechten Winkel bildet. Will man also *a priori* diejenigen Kreissehnen finden, deren entsprechende Parabelsehnen von ihrem Durchmesser normal halbirt werden, so nehme man OV' senkrecht auf OU' und ziehe beliebige durch V' gehende Kreissehnen. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass es nur einen Punkt V' von der verlangten Lage giebt, erhalten wir den Satz: Für jede Parabel lässt sich eine einzige Richtung paralleler Sehnen angeben, bei welcher der zugehörige Durchmesser die Sehnen normal halbirt. Dieser Hauptdurchmesser heisse die Achse der Parabel, der Durchschnitt (C) der Achse mit der Parabel der Scheitel. Die Parabel liegt symmetrisch zu beiden Seiten ihrer Achse.

Betrachten wir nächst den Sehnen die Tangenten etwas genauer. Wenn durch T eine Tangente an die Parabel gelegt werden soll, so kommt es zunächst darauf an, durch den entsprechenden Punkt T' eine Kreistangente zu ziehen; letzteres ist auf zweierlei Weise möglich, wenn T' ausserhalb des Kreises liegt, auf einerlei Art, wenn T' der Kreisperipherie angehört, und auf keine Weise, wenn T' innerhalb des Kreises liegt. Daraus folgt unmittelbar: Von einem gegebenen Punkte aus lassen sich zwei Tangenten, eine oder keine Tangente an die Parabel legen, je nachdem der erwähnte Punkt ausserhalb des von der Parabel umschlossenen Raumes, auf der Parabel oder innerhalb jenes Raumes liegt. — Um ferner eine Tangente zu finden, die einer gegebenen Geraden AB_∞ parallel ist, suchen wir zunächst die entsprechende Gerade $A'_\infty B'$, deren Durchschnitt mit der Gegenpolare B' sein möge; von B' aus sind zwei Tangenten $B'P'$ und $B'U'$ an den Kreis möglich, diesen entsprechen zwei Tangenten an die Parabel, von denen die erste $B_\infty P$ den verlangten Bedingungen genügt, die zweite aber nicht in Betracht kommen kann, weil sie einen unendlich entfernten Punkt B_∞ mit einem anderen unendlich entfernten Punkte U_∞ verbindet, also selber unendlich weit weg liegt. Demnach ergiebt sich immer eine bestimmte Auflösung der Aufgabe, wofern nicht B' mit U' zusammenfällt, d. h. $AB_\infty \parallel CM$ ist; also: Zu jeder der Parabelachse nicht parallelen Geraden lässt sich immer eine und nur eine parallel liegende Tangente an der Parabel finden. — Nennen wir S den Durchschnitt der durch den Parabelpunkt P gehenden Tangente mit der Parabelachse und S' den entsprechenden Punkt, so erhalten wir in $\mathfrak{C}'$ zwei

conjugirte Kreissehnen $S'C'M'U'$ und $Q'M'P'V'$ weil $S'C'M'U'$ Berührungssehne für das Berührungscentrum S' ist; den harmonisch liegenden Punkten S', C', M', U' entsprechen die gleichfalls harmonisch liegenden Punkte S, C, M, U_∞, und da der letzte ins Unendliche fällt, so muss C die Mitte der Strecke SM sein. Dies giebt den bekannten Satz: Die Subtangente der Parabel ist gleich der doppelten Abscisse.

Um einfachere und symmetrische Figuren zu erhalten, verlegen wir das Projectionscentrum auf die rückwärts verlängerte Parabelachse, d. h. wir sehen die vorhandene Parabel als Schnitt eines anderen Kegels an, bei welchem die schneidende Ebene senkrecht auf der Ebene der kleinsten und grössten Kegelseite steht.*) Zu diesem Zwecke ziehen wir irgend eine Sehne JAK (Fig. 9) senkrecht zur Achse, legen durch einen zwischen C und O beliebig gewählten Punkt D die Polare $\| JK$ und von D aus die Tangenten DG und DH an die Parabel (indem wir $CF = CD$ nehmen und durch F die Berührungssehne $GH \| JK$ ziehen); den genannten Parabeltangenten entsprechen zwei parallele auf der Collineationsachse senkrechte Tangenten am Kreise MG' und NH', deren Berührungspunkte in einer Geraden $G'F'H' \| MN$ liegen; es ist daher der Kreishalbmesser $F'G'$ gleich der von der Tangente abgeschnittenen Strecke AM. Ferner muss der gesuchte Kreis durch die sich selbst entsprechenden Punkte J, K gehen und ist folglich seiner Grösse und Lage nach vollkommen bestimmt. Sein Durchschnitt U' mit AD giebt einen Punkt der Gegenpolare, endlich erhält man das Projectionscentrum durch die Gleichung $DO = AU'$. Wie man sieht, bleibt bei dieser Construction die Polare willkührlich und es entsteht daher die Frage, ob man letztere nicht so wählen könnte, dass der Kreismittelpunkt F' und der ihm entsprechende harmonische Pol F zu Hauptpunkten der beiden Figurensysteme werden. Nun ist zufolge der zweiten Doppelschnittsgleichung, wenn man sie auf die Punkte A, F, C, D und die ihnen entsprechenden A, F', C', D'_∞ anwendet,

$$\frac{AF}{FC} : \frac{AD}{DC} = \frac{AF'}{F'C'} : 1,$$

oder kürzer wegen $FC = DC$ und $F'C' = AM$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AF'}{AM};$$

für F und F' als Hauptpunkte muss aber $AF = AF'$, folglich

$$AD = AM,$$

d. h. die Tangente DG unter einem halben rechten Winkel gegen die Parabelachse geneigt sein. In der vorigen Figur lässt sich diese Tangente construiren, man erhält dann statt des dort betrachteten Punktes S den Punkt D, damit zugleich die Polare und den Kreishalbmesser $F'G' = AM = AD$. Was ferner die Lage des Projectionscentrums anbelangt, so bedarf es nur der Bemerkung, dass $DO = AU' = F'U' - F'A = AD - AF = DF = 2CD$ ist. Die hiermit bestimmte specielle Polare DE heisst die Directrix, ihr zugehöriger Pol F der Brennpunkt und die durch letzteren parallel zur Directrix gelegte Sehne GH der Parameter der Parabel. Nach Nr. I. ist nun, wenn P einen beliebigen Parabelpunkt und PQ seine Entfernung von der Directrix bezeichnet,

*) Man wird bemerken, dass der ganze Gedankengang analog der analytisch-geometrischen Discussion der Linien zweiten Grades verläuft; die obige Manipulation entspricht der Aenderung des Coordinatensystemes.

$$\frac{FP}{PQ}=\frac{F'P'}{AD}=\frac{AD}{AD}=1,$$

d. h. jeder Punkt der Parabel ist von dem Brennpunkte ebensoweit wie von der Directrix entfernt. Daraus folgt sehr leicht der weitere Satz: Der Unterschied zwischen Radiusvector und Abscisse eines Parabelpunktes ist constant und zwar gleich der Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel.

Dass nun hieraus alle sonstigen metrischen Eigenschaften der Parabel mit Leichtigkeit abgeleitet werden können, ist zu bekannt, als dass wir uns weiter mit der Parabel beschäftigen sollten.

2) Die Ellipse.

In Fig. 10. Taf. III. sei O das Projectionscentrum, GH die Collineationsachse, JK die Polare, $U'V'$ die Gegenpolare, N' der Mittelpunkt des in $\mathfrak{C}'$ befindlichen Kreises und M' sein harmonischer Pol in Beziehung auf $U'V'$ als Polare. Jede durch N' gehende Gerade wird von dem Kreise harmonisch getheilt, wenn man den unendlich entfernten Punkt der Geraden mitrechnet; dasselbe muss auch von jeder durch den entsprechenden Punkt N gehenden Geraden gelten, d. h. die Projection N des Kreismittelpunktes N' ist der harmonische Pol des Kegelschnittes in Beziehung auf die Polare JK. Aehnlich verhält es sich mit den Punkten M und M'; legen wir nämlich durch irgend einen Punkt U' der Gegenpolare Secanten des Kreises und construiren gleichzeitig die zu U' als Berührungscentrum gehörende Berührungssehne, so theilt letztere alle vorigen Secanten harmonisch und geht ausserdem in jedem Falle durch den Punkt M'; für die Ellipse giebt dies den Satz: Die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen einer Ellipse liegen in einer geraden Linie, einem sogenannten Durchmesser der Curve; alle Durchmesser gehen durch einen festen Punkt M. Jede durch M' gehende Gerade wird von M', dem Kreise und der Gegenpolare harmonisch getheilt, der Punkt M halbirt folglich alle durch ihn gelegten Durchmesser der Ellipse und ist daher ihr Mittelpunkt.

Die zu U' als Berührungscentrum gehörende Berührungssehne sei $A'B'$, V' ihr Durchschnitt mit der Gegenpolare und $C'D'$ die zu V' gehörende Berührungssehne; man hat jetzt zwei conjugirte Berührungssehnen, von denen $A'B'$ alle durch U', und $C'D'$ alle durch V' gehenden Secanten harmonisch theilt; für die Ellipse folgt hieraus der Satz: Legt man zu den von einem Durchmesser halbirten Sehnen eine Parallele durch den Mittelpunkt, so ist diese Parallele selbst wieder Durchmesser für alle Sehnen, welche mit dem ersten Durchmesser gleiche Richtung haben; zwei in dieser Weise zusammengehörige Durchmesser heissen einander conjugirt.

Daran knüpft sich die Frage, ob es unter der unendlichen Menge conjugirter Durchmesser ein Paar giebt, welche auf einander senkrecht stehen. Wie nun auch die Gerade $U'C'D'$, deren Projection CD ist, liegen möge, so ist doch jederzeit $OU' \parallel CD$, ebenso $OV' \parallel AB$, mithin würde die senkrechte Lage von CD gegen AB vor allen Dingen erfordern, dass OU' senkrecht auf OV' steht, oder dass U' und V' die Endpunkte des Durchmessers von einem Kreise sind, der seinen Mittelpunkt auf der Gegenpolare hat und durch O geht. Ausserdem sollen $U'C'D'$ und $V'A'B'$ conjugirte Kreissehnen sein und hierzu gehört die senkrechte Lage der Geraden $U'R'$ und

$V'R'$, wenn der Punkt R' hier die nämliche Bedeutung hat, wie R in Fig. 7. Beiden Bedingungen zusammen genügt man sehr leicht durch Construction eines Kreises, welcher seinen Mittelpunkt auf der Gegenpolare hat und ausserdem durch die Punkte O und R' geht; in jeder Ellipse giebt es also ein und nur ein Paar senkrecht zu einander liegender conjugirter Durchmesser. Diese Hauptdurchmesser sind die Achsen der Ellipse, AB die grössere, CD die kleinere.

Was ferner die Tangenten betrifft, so wird man sich durch ähnliche Betrachtungen wie bei der Parabel sehr leicht von folgenden Sätzen überzeugen: Durch einen gegebenen Punkt sind zwei Tangenten, eine oder keine Tangente an die Ellipse möglich, je nachdem der Punkt ausserhalb des von der Curve umschlossenen Raumes, auf der Ellipse oder innerhalb jenes Raumes liegt; zu jeder gegebenen Geraden können zwei parallele Tangenten an die Ellipse construirt werden.

Um den Zusammenhang zwischen irgend einer Tangente und den Achsen der Ellipse zu finden, legen wir durch V' eine beliebige Kreissehne $P'Q'$ und an deren Endpunkte Tangenten, die sich in einem Punkte S' der Hauptsehne $A'B'$ schneiden. Da $P'Q'$ als Berührungssehne für das Berührungscentrum S' gelten kann, so liegen die Punkte A', L', B', S' harmonisch; dasselbe gilt von den entsprechenden Punkten A, L, B, S, und zwar ist hier L der Durchschnitt von AB mit der darauf senkrechten Sehne PQ und S der Durchschnitt von AB mit der Tangente in P oder Q. Für $MA = MB = a$, $ML = x$ ergiebt sich aus dieser harmonischen Proportion

$$MS = \frac{a^2}{x}$$

und durch eine ganz ähnliche Betrachtung für $MC = MD = b$, $LP = y$,

$$MT = \frac{b^2}{y};$$

diese Beziehungen führen zu einer bekannten Construction der Tangente an P mittelst des der Ellipse ein- oder umschriebenen Kreises. Auch die Gleichung der Ellipse lässt sich leicht davon ableiten; man hat nämlich vermöge der ähnlichen Dreiecke MST und LSP

$$\frac{x}{MS} + \frac{y}{MT} = 1,$$

d. i. nach Substitution der obigen Werthe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Wir nehmen jetzt das Projectionscentrum in der Verlängerung der grossen Achse und suchen rückwärts einen neuen Kreis, als dessen Projection die gegebene Ellipse betrachtet werden kann. Die Collineationsachse ist in diesem Falle parallel zur kleinen Halbachse, darf aber im Uebrigen willkührlich gewählt werden, weil parallele Collineationsachsen parallele Schnitte des Kegels geben; das einfachste ist daher, die Collineationsachse mit der kleinen Halbachse zusammenfallen zu lassen. Auf der verlängerten AB (Fig. 11) legen wir durch einen zwischen O und B beliebig eingeschalteten Punkt E die Polare $\parallel CD$ und von E aus an die Ellipse eine Tangente, welche die Curve in H berührt und die Collineationsachse in K schneidet. Der Geraden EHK entspricht nun die auf der Collineationsachse senkrechte Gerade KH', welche den fraglichen Kreis, dessen Mittelpunkt

in der verlängerten BM zu suchen ist, in einem Punkte H' berühren muss; es ist daher MK der Halbmesser des gesuchten Kreises. Da ausserdem die Punkte C und D sich selbst entsprechen, so hat man nur mit MK als Radius einen durch C und D gehenden Kreis zu beschreiben. Das Projectionscentrum endlich ist der Punkt O, in welchem die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte H' und H die verlängerte AB schneidet. Bei der Unbestimmtheit dieser Auflösung liegt die Frage nahe, ob sich die Punkte O und E so wählen lassen, dass der Kreismittelpunkt F' und der ihm entsprechende harmonische Pol F der Ellipse zu Hauptpunkten der Collineation werden. Hierzu wäre $MF = MF'$ oder $DF = DF' = MK$ erforderlich, und zwar ist für $MF = x$, $FH = y$,

$$DF = \sqrt{b^2 + x^2}, \quad MK = \frac{b^2}{y} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

aus der Gleichsetzung beider Linien ergiebt sich

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{b^2}{a},$$

$$ME = \frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad MK = \frac{b^2}{y} = a.$$

Der hiermit bestimmte Punkt F ist ein Brennpunkt der Ellipse, sein Abstand vom Mittelpunkte die lineare Exentricität, die durch ihn parallel zur kleinen Achse gelegte Sehne der Parameter, die zugehörige Polare eine Directrix*). Vermöge der Eigenschaften der Haupt punkte collinearer Figuren gilt nun für irgend einen Ellipsenpunkt P, dessen Abstand von der Directrix $= PQ$ ist, die Gleichung

$$\frac{FP}{PQ} = \frac{F'P'}{ME} = \frac{MK}{ME} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

---

*) Wir haben im Obigen bei der Bestimmung der Hauptpunkte eine kleine Rechnung nicht verschmäht, weil sie durch die harmonischen Proportionen nahe gelegt war; indessen können wir auch ohne diese und ohne die Gleichung der Ellipse vorher entwickelt zu haben, die Existenz des Brennpunktes und der Directrix nachweisen. Wir legen zu diesem Zwecke die Collineationsachse durch den Endpunkt A (Fig. 12. Taf. III.) der grossen Halbachse parallel zu CD und die Polare durch einen vor der Hand beliebigen Punkt E in der Verlängerung von AB. Ist nun wiederum EH Tangente an der Ellipse und K ihr Durchschnitt mit der Collineationsachse, so erhält man AK als Halbmesser des Kreises, von welchem die Ellipse die Projection sein soll; dieser Kreis muss die Collineationsachse berühren, also ist im vorliegenden Falle $AF' = AK$. Nun sind folgende Extreme möglich: entweder wählt man E sehr nahe an B, dann wird $AK = AF'$ sehr gross und kann jedenfalls grösser als AB, mithin um so mehr grösser als AF gemacht werden, weil F immer zwischen M und B liegt; oder man nimmt zweitens E sehr entfernt von B, dann kann AK der kleineren Halbachse MD beliebig nahe gebracht, also $AK = AF'$ jedenfalls kleiner als AF gemacht werden, weil letzteres in diesem Falle sich der grösseren Halbachse AM nähert. Lässt man nun E von B ins Unendliche fortrücken, so ist anfangs $AF' = AK = \infty > AF$, und am Ende $AF' = AK = DM < (AM = AF)$, mithin muss es eine Lage von E geben, bei welcher der Uebergang vom Grösseren zum Kleineren eintritt, d. h. $AF' = AF$ wird. Wie oben folgt dann

$$\frac{FP}{PQ} = \text{Constans},$$

und wenn man diese Constante mit einem beliebigen Buchstaben (ε) bezeichnet, so kann man rückwärts die Theorie der Ellipse auf bekannte Weise entweder rein geometrisch oder analytisch entwickeln, was Letzteres u. A. Herr Prof. Fort in seinem Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene (Leipzig. Teubner. 1855) mit vieler Eleganz ausgeführt hat.

d. h. die **Strecken, um welche ein Ellipsenpunkt einerseits von einem Brennpunkte, andererseits von der zugehörigen Directrix entfernt ist, stehen in dem constanten Verhältniss der linearen Excentricität zur grossen Halbachse.**

Da die Ellipse von der kleinen Halbachse in zwei congruente Theile getheilt wird, so gilt für die zweite Hälfte dasselbe, wie für die erste; es existiren demnach zwei Brennpunkte F und F_1 (Fig. 13), denen zwei Directricen EQ und E_1Q_1 entsprechen. Durch Addition der beiden Gleichungen

$$FP = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} PQ, \quad F_1P = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} PQ_1$$

ergiebt sich weiter

$$FP + F_1P = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} QQ_1 = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} 2ME = 2a,$$

d. h. **die Summe der Radienvectoren eines Ellipsenpunktes ist gleich der grossen Achse.**

3) Die Hyperbel.

In Fig. 14. Taf. II. sei O das Projectionscentrum, $U'V'$ die Gegenpolare und $H'K'$ ihr Durchschnitt mit dem Kreise, dessen Projection die Hyperbel ausmacht. Da den Punkten H' und K' unendlich entfernte Punkte der Ebene 𝔈 entsprechen, so besteht die Hyperbel aus zwei getrennten unendlichen Zügen; der eine Zweig ist die Projection des auf der einen Seite von $H'K'$ liegenden Kreisbogens $H'A'K'$, der andere Zweig entspricht dem gegenüberliegenden Bogen $H'B'K'$ *). Wie früher ist die Projection des Kreismittelpunktes der Pol der Hyperbel für die gegebene Polare, umgekehrt findet ein ähnliches Verhältniss statt, wenn man $H'K'$ als Berührungssehne (innere Polare) des Kreises ansieht und das zugehörige Berührungscentrum M' (den äusseren Pol) aufsucht. Zieht man nämlich durch irgend einen Punkt U' der Gegenpolare beliebige Kreissehnen, wie z. B. $U'Q'P'$ und bestimmt zu den jedesmaligen drei Punkten U', Q', P' den vierten harmonischen Punkt L', so liegen alle Punkte der letzteren Art in einer Geraden (der zu U' gehörigen Berührungssehne), diese geht in jedem Falle durch M' und bildet eine zu $H'K'$ conjugirte Berührungssehne; für die Projectionen der genannten Geraden folgt hieraus der Satz: **Die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen einer Hyperbel liegen in einer Geraden, einem sogenannten Durchmesser der Curve; alle Durchmesser gehen durch einen festen Punkt M.** Jede durch M' gehende Gerade wird von M', dem Kreise und der Gegenpolare harmonisch getheilt; **der Punkt M halbirt folglich alle durch ihn gelegten Durchmesser der Hyperbel und ist daher ihr Mittelpunkt.** Weil ferner $H'K'$ und $L'M'$ conjugirte Berührungssehnen des Kreises sind, so gilt für die Hyperbel der Satz: **Legt man zu den von einem Durchmesser halbirten Sehnen eine Parallele durch den Mittelpunkt, so ist letztere selbst wieder Durchmesser für alle Sehnen, welche mit dem ersten Durchmesser gleiche Richtung haben**; man erhält also **zwei conjugirte Durchmesser.**

*) In der Figur hat man sich oberhalb der Collineationsachse die Ebene 𝔈 in ihrer ganzen Ausdehnung, unterhalb der Collineationsachse die Ebene 𝔈' obenauf zu denken; die Ebene 𝔈'', welche das Projectionscentrum enthält, liegt oberhalb der Polare unter 𝔈.

Um die Frage nach der etwaigen senkrechten Stellung zweier conjugirten Durchmesser gegeneinander zu beantworten, betrachten wir die Geraden OU' und OV', wobei V' den Durchschnitt der conjugirten Kreissehnen $H'K'$ und $L'M'$ bezeichnet. Nach den Grundlehren der perspectivischen Projection ist $OU' \parallel LP$ und $OV' \parallel LM$, die senkrechte Lage der parallelen Sehnen LP gegen die zugehörigen Durchmesser LM erfordert also zunächst, dass $\angle U'OV' = 90^0$ sei. Ausserdem müssen aber, da es sich um conjugirte Durchmesser, d. h. in $\mathfrak{C}'$ um conjugirte Sehnen handelt, die Punkte K', V', H', U' harmonisch liegen, also die Geraden OK', OV', OH', OU' einen harmonischen Strahlenbüschel bilden. Beiden Bedingungen zusammen genügt man mittelst des bekannten Satzes: „Zu irgend zwei festen Strahlen (OH', OK') eines Strahlenbüschels giebt es unzählige Paare zugeordneter harmonischer Strahlen, und namentlich sind die zwei Strahlen, welche die Winkel zwischen jenen Strahlen halbiren, mithin senkrecht auf einander stehen, ein solches Paar“; man erhält folglich die gesuchten Richtungen durch Halbirung der von OH' und OK' gebildeten Winkel, d. h. für jede Hyperbel giebt es ein und nur ein Paar senkrecht zu einander liegender conjugirter Durchmesser. Der eine von diesen ist AB, der andere steht in M senkrecht auf AB und schneidet die Hyperbel nicht. Die Strecke AB heisse die Hauptachse der Hyperbel; inwiefern auch eine Nebenachse existirt, wird sich gleich nachher bei der Betrachtung der Tangenten zeigen.

Wenn durch einen ausserhalb des von beiden Hyperbelzweigen umschlossenen Raumes befindlichen Punkt eine Tangente an die Hyperbel gelegt werden soll, so würde man zunächst den entsprechenden Punkt in $\mathfrak{C}'$ aufsuchen, welcher dann ausserhalb des Kreises fällt, von ihm aus Tangenten an den Kreis ziehen und letztere auf $\mathfrak{C}$ projiciren. Im Allgemeinen entsprechen jenen zwei Kreistangenten auch zwei nach angebbaren Hyperbelpunkten gehende Hyperbeltangenten, doch sind hier einige Ausnahmen möglich. Wäre nämlich M der gegebene, also M' der ihm entsprechende Punkt, so würde man in $\mathfrak{C}'$ die Tangenten $M'H'$ und $M'K'$ erhalten und diesen entsprechen in $\mathfrak{C}$ zwei nach unendlich fernen Punkten (H_∞ und K_∞) der Hyperbel gehende Tangenten; diese speciellen Tangenten MH_∞ und MK_∞, deren Lagen zwar völlig bestimmt sind, deren Berührungspunkte aber im Unendlichen liegen, heissen die Asymptoten der Hyperbel; der spitze Winkel zwischen einer Asymptote und der grossen Achse ist der sogenannte Asymptotenwinkel. Fiele zweitens die Rückprojection des gegebenen Punktes auf eine der Geraden MH' und MK', z. B. zwischen M und H', so würde MH' die eine Tangente an den Kreis sein, die andere Tangente wäre von MK' und ihr Berührungspunkt von K verschieden, d. h. die eine Hyperbeltangente fällt mit der einen Asymptote zusammen, die andere Tangente dagegen hat ihren Berührungspunkt in endlicher Entfernung. Alles zusammen giebt den Satz: Durch einen ausserhalb des Hyperbelraumes liegenden Punkt können im Allgemeinen zwei Tangenten an die Hyperbel gezogen werden; liegt der Punkt auf einer der Asymptoten, so gilt die betreffende Asymptote selber als die eine Tangente und ausserdem existirt noch eine zweite; ist der gegebene Punkt der Mittelpunkt der Curve, so sind die Asymptoten die gesuchten Tangenten. Ferner überzeugt man sich leicht von folgenden Sätzen: Durch einen gegebenen Hyperbelpunkt geht nur eine, durch

einen im Innern des Hyperbelraumes liegenden Punkt keine Tangente.

Wir untersuchen zweitens, ob sich Hyperbeltangenten von bestimmter Richtung construiren lassen, und denken uns zu diesem Zwecke durch den Mittelpunkt M eine Gerade g in der vorgeschriebenen Richtung gezogen; die Rückprojection von g sei g' und G' ihr Durchschnitt mit der Gegenpolare $H'K'$, also G' die Rückprojection des unendlich entfernten Punktes von g. Nun sind offenbar drei Lagen möglich; entweder fällt g mit einer der Asymptoten, also g' mit $M'H'$ oder $M'K'$ und G' mit H' oder K' zusammen, dann ist g selber die gesuchte Tangente für beide Hyperbelzweige zugleich; wenn zweitens g die Hyperbel nicht schneidet, so kann g' den Kreis ebensowenig schneiden, dann kommt G' ausserhalb des Kreises zu liegen und es sind von G' aus zwei Tangenten an den Kreis, folglich auch zwei zu g parallele Hyperbeltangenten möglich; endlich kann g die Hyperbel schneiden, dann schneidet g' den Kreis und G' fällt innerhalb des Kreises, von wo aus keine Tangenten an diesen gelegt werden können. Dies zusammen giebt den Satz: **Parallel zu einer gegebenen Geraden sind zwei, eine oder keine Hyperbeltangenten möglich, jenachdem eine durch den Mittelpunkt gelegte Parallele die Hyperbel nicht schneidet, Asymptote ist, oder die Hyperbel schneidet.**

Metrische Relationen für die Tangenten ergeben sich auf folgendem Wege. An die Endpunkte P und Q einer auf der Hauptachse senkrechten Sehne legen wir Tangenten, welche sich in einem Punkte S der Hauptachse schneiden; ihnen entsprechen die Kreistangenten $S'P'$ und $S'Q'$, deren Berührungssehne $P'Q'$ durch den Punkt U' geht und mit $A'B'$ ein Paar conjugirter Kreissehnen bildet; hieraus folgt die harmonische Lage der Punkte B', L', A', S', denen vier gleichfalls harmonisch liegende Punkte B, L, A, S entsprechen. Für $MA = a$, $ML = x$ giebt diese harmonische Proportion

$$MS = \frac{a^2}{x}.$$

Nennen wir ferner X und Y die Punkte, in denen die an P gelegte Tangente die Asymptoten schneidet, so erhalten wir in $\mathfrak{C}'$ (Tafel III. Fig. 16) zwei conjugirte Berührungssehnen $H'K'$ und $M'P'$, woraus leicht folgt, dass die Punkte X', P', Y' und der Durchschnitt Z' von $H'K'$ mit $X'Y'$ ein harmonisches System bilden; dasselbe muss von den entsprechenden Punkten gelten, wobei aber Z ins Unendliche fällt, mithin P die Mitte XY sein muss; also: **der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente halbirt die zwischen den Asymptoten liegende Strecke jener Tangente.** Hierauf gründet sich folgende kleine Rechnung. Die im Scheitel A construirte auf der Hauptachse senkrechte Tangente sei CD, ihre Hälfte $AC = b$ und $LP = y$; ferner mögen x_1 und y_1 die rechtwinkligen Coordinaten von X, sowie x_2 und y_2 die von Y bezeichnen; man hat dann

$$y_1 : y = x_1 - MS : x - MS$$

d. i.

$$\frac{b}{a} x_1 : y = x_1 - \frac{a^2}{x} : x - \frac{a^2}{x}$$

und indem man x_1 hieraus bestimmt

$$x_1 = \frac{a^2 y}{axy - b(x^2 - a^2)}.$$

Auf gleich einfache Weise ergiebt sich

$$x_2 = \frac{a^2 y}{axy + b(x^2 - a^2)};$$

da nun P in der Mitte zwischen X und Y liegt, so muss x das arithmetische Mittel zwischen x_1 und x_2 sein, und hieraus findet man

$$a^2 y^2 - b^2 (x^2 - a^2) = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Der Symmetrie wegen heisse b die **Nebenhalbachse** und die durch M parallel zu CD gezogene Gerade die **imaginäre Achse** der Hyperbel. Das Stück MT, welches die Tangente XY von der letzteren Achse abschneidet, findet sich aus der Proportion

$$MT : MS = LP : LS$$

oder

$$MT : \frac{a^2}{x} = y : x - \frac{a^2}{x},$$

nämlich

$$MT = \frac{a^2}{x^2 - a^2}\, y = \frac{b^2}{y}.$$

Wir bemerken noch, dass die Werthe von x_1 und x_2, sowie die daraus folgenden von y_1 und y_2 eine symmetrischere Form annehmen, wenn man für $b(x^2 - a^2)$ den gleichgeltenden Ausdruck $\frac{a^2 y^2}{b}$ setzt; es wird nämlich

$$x_1 = \frac{a^2 b}{bx - ay}, \quad x_2 = \frac{a^2 b}{bx + ay},$$

$$y_1 = \frac{ab^2}{bx - ay}, \quad y_2 = \frac{ab^2}{bx + ay}.$$

Aus denselben Gründen wie früher legen wir nun das Projectionscentrum in die Hauptachse, also die Polare und die Collineationsachse parallel zur Nebenachse. Die Rückprojection der Hyperbel d. h. den in $\mathfrak{E}'$ ihr entsprechenden Kreis construiren wir in diesem Falle auf folgende Weise (Fig. 15). Sei E der Durchschnitt der willkührlich gewählten Polare mit der Hauptachse, EH eine von E aus an die Hyperbel gelegte Tangente, welche die auf derselben Seite wie ihr Berührungspunkt H liegende Asymptote in K_1 und die andere Asymptote in K_2 schneidet, ferner sei durch K_1 die Collineationsachse gelegt, deren Durchschnitt mit der Hyperbelachse G heissen möge; der Hyperbeltangente $K_1 H$ entspricht nun die auf der Collineationsachse senkrechte Kreistangente $K_1 H'$ und es ist daher GK_1 der Halbmesser des gesuchten Kreises. Ausserdem muss letzterer durch die sich selbst entsprechenden Punkte J und L gehen, in denen die Collineationsachse die Hyperbel schneidet; hieraus ergiebt sich eine einfache Construction dieses Kreises und seines Berührungspunktes H'; was endlich das Collineationscentrum betrifft, so liegt dieses auf der Hauptachse der Hyperbel in einer geraden Linie mit den entsprechenden Punkten H und H'. Um ferner zu entscheiden, ob die eben behandelte unbestimmte Aufgabe auch so gelöst werden kann, dass der Kreismittelpunkt F' und der ihm entsprechende harmonische Pol F die Hauptpunkte des Collineationssystemes sind,

bemerken wir zunächst, dass für $MF = x$, $FH = y$ die **Punkte K_1 und K_2** mit den vorhin betrachteten Punkten X und Y identisch sind, also $MG = x_1$, $GK_1 = y_1$ ist und ebenso x_2, y_2 die Coordinaten von K_2 sein würden. Für F und F' als Hauptpunkte gilt nun die Gleichung $FG = F'G$ oder $FJ = F'J = GK_1$ mithin

$$\overline{FG}^2 + \overline{GJ}^2 = \overline{GK_1}^2$$

d. i.

$$(x_1 - x)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} x_1^2;$$

hieraus ergiebt sich die einfache Beziehung

$$x_1 - x = b,$$

welcher sich (wegen $HK_1 = HK_2$) die analoge Gleichung

$$x - x_2 = b$$

anreiht; die Verbindung beider Relationen liefert weiter

$$x_1 - x_2 = 2b$$

d. i. vermöge der Werthe von x_1 und x_2

$$a^2 y = b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

mithin

$$y = \frac{b^2}{a}, \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Hieraus findet man noch

$$ME = \frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad MG = x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} - b},$$

die Entfernung des Projectionscentrums von der Polare ist bei Hauptpunkten $= EF'$ also hier

$$= x - ME = \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Der feste Punkt F ist ein Brennpunkt der Hyperbel, sein Abstand vom Mittelpunkte die lineare Excentricität, die durch F senkrecht zur Hauptachse gelegte Sehne der Parameter, und die dem Pole F entsprechende Polare eine Directrix der Hyperbel*). Vermöge der den Hauptpunkten collinearer Figuren zukommenden Eigenschaften gilt nun für irgend einen Hyperbelpunkt P, dessen Abstand von der Directrix $= PQ$ ist die Gleichung

$$\frac{FP}{PQ} = \frac{F'P'}{GE} = \frac{GK_1}{GE} = \frac{FH}{FE} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

d. h. die Strecken, um welche ein Hyperbelpunkt einerseits von einem Brennpunkte andererseits von der zugehörigen Directrix entfernt ist, stehen in dem constanten Verhältniss der linearen Excentricität zur halben Hauptachse.

Da die Hyperbel symmetrisch zu beiden Seiten der imaginären Achse liegt, so existirt ausser dem vorhin bestimmten Brennpunkte noch ein zweiter mit einer ihm entsprechenden zweiten Directrix; es gelten daher die Gleichungen

---

*) Wie bei der Ellipse lässt sich auch hier ohne Rechnung der Nachweis liefern, dass F und F' zu Hauptpunkten der Collineation werden können.

$$FP = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} PQ, \quad F_1P = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} PQ_1$$

und aus diesen ergiebt sich durch Subtraction

$$F_1P - FP = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} QQ_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} 2ME = 2a$$

d. h. die Differenz der Radienvectoren eines Hyperbelpunktes ist gleich der Hauptachse.

Um nicht Bekanntes zu wiederholen, brechen wir die Entwickelung weiterer metrischer Relationen ab; dass aber die Fruchtbarkeit der im Vorigen benutzten Anschauungsweise damit nicht erschöpft ist, dass im Gegentheil die Auseinander- und Aufeinanderlegung der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$ nebst Polare und Gegenpolare etc. noch zu manchem bemerkenswerthen Resultate führen kann, zeigen wir schliesslich an der

4) Construction eines Kegelschnittes durch fünf gegebene Punkte.

Die bekannten von Newton und Pascal herrührenden Auflösungen dieses Problems stimmen insofern mit einander überein, als sie aus den gegebenen Punkten beliebig viele andere Punkte der Curve der Reihe nach herleiten, ohne aber die Natur des betreffenden Kegelschnitts zu individualisiren oder die Achsen desselben zu bestimmen. Dieser planimetrischen Auffassung der Sache stellen wir eine stereometrische Betrachtung gegenüber, indem wir direct einen der Kegel construiren, auf welche sich die durch die gegebenen Punkte gehende Linie zweiten Grades versetzen lässt; mit anderen Worten, wir lösen die Aufgabe „fünf in einer Ebene $\mathfrak{E}$ gegebene Punkte A, B, C, D, E auf eine andere ihrer Lage nach gegebene Ebene $\mathfrak{E}'$ so zu projiciren, dass die Projectionen A', B', C', D', E' in die Peripherie eines und desselben Kreises fallen."

Indem wir alle früheren Bezeichnungen beibehalten, wobei (Tafel IV. Fig. 17) O das Projectionscentrum, G_0H_0 die Collineationsachse und G_1H_1 die Polare sein möge, versuchen wir zunächst, vier in $\mathfrak{E}$ gegebene Punkte A, B, C, D so auf $\mathfrak{E}'$ zu projiciren, dass A', B', C', D' in die Peripherie eines und desselben Kreises fallen. Zu diesem Zwecke verbinden wir A, B, C, D zu einem Vierecke und verlängern dessen Seiten AB, BC, CD, DA bis sie die Collineationsachse der Reihe nach in A_0, B_0, C_0, D_0 und die Polare in A_1, B_1, C_1, D_1 schneiden; durch A_0, B_0, C_0, D_0 legen wir Parallelen zu OA_1, OB_1, OC_1, OD_1 und erhalten auf diese Weise vier Gerade, welche No. I. zufolge den Vierecksseiten AB, BC, CD, DA entsprechen, und sich folglich in den vier entsprechenden Punkten A', B', C', D' schneiden. Damit nun $A'B'C'D'$ ein Sehnenviereck werde, ist es erforderlich, dass die Gleichung

$$\angle A' + \angle C' = \angle B' + \angle D' = 180^\circ$$

stattfinde; aus dieser kann leicht eine Beziehung zwischen den spitzen Winkeln bei A_0, B_0, C_0, D_0 hergeleitet werden, es ist nämlich

$$\angle A' = \angle A_0 + \angle D_0, \quad \angle C' = \angle B_0 + \angle C_0$$

folglich

$$\angle A_0 + \angle B_0 + \angle C_0 + \angle D_0 = 180^\circ$$

mithin, wenn die bei A_1, B_1, C_1, D_1 vorkommenden gleichen spitzen Winkel mit denselben Buchstaben bezeichnet werden,

$$\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 = 180^\circ.$$

Es kommt also nur darauf an, den Punkt O so zu bestimmen, dass durch die von ihm aus nach den gegebenen Punkten A_1, B_1, C_1, D_1 gezogenen Geraden vier der obigen Bedingung genügende Winkel entstehen. Zur Lösung dieser neuen Aufgabe dient folgende Betrachtung.

Wenn $\angle A_1OM = \angle C_1$ genommen wird, so ist

$$\angle OMB_1 = \angle A_1 + \angle A_1OM = \angle A_1 + \angle C_1,$$

ferner

$$\angle OMA_1 = \angle B_1 + \angle B_1OM,$$

d. i.

$$180^\circ - (\angle A_1 + C_1) = \angle B_1 + \angle B_1OM$$

oder

$$\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle B_1OM = 180^\circ.$$

Die Lösung der Aufgabe vorausgesetzt, folgt hieraus $\angle B_1OM = \angle D_1$. Weiter ist, da die Dreiecke A_1OM und OC_1M in zwei Winkeln übereinstimmen

$$A_1M : OM = OM : C_1M$$

oder

$$\overline{OM}^2 = A_1M \,.\, C_1M$$

und auf gleiche Weise aus den Dreiecken B_1OM und OD_1M

$$\overline{OM}^2 = B_1M \,.\, D_1M.$$

Diese beiden Gleichungen geben zu erkennen, dass M derjenige Punkt der Geraden A_1B_1 ist, von welchem aus zwei gleiche Tangenten an die über A_1C_1 und B_1D_1 beschriebenen Halbkreise gelegt werden können und dass O auf der Peripherie eines Kreises liegt, der mit jener gleichen Tangente als Halbmesser aus dem Mittelpunkte M beschrieben wird. Mit anderen Worten, M ist der Punkt, in welchem die Potenzlinie der über A_1C_1 und B_1D_1 beschriebenen Kreise die Centrale A_1B_1 schneidet, und der geometrische Ort des Projectionscentrums O ist der Kreis, welcher M zum Mittelpunkte hat und jene beiden Kreise normal schneidet. Wir wollen ihn kurz den **Normalkreis** des Vierecks $ABCD$ in Beziehung auf die Polare G_1H_1 nennen; seine Construction ergiebt sich unmittelbar aus dem Vorigen.

Sind nun in $\mathfrak{C}$ fünf Punkte A, B, C, D, E gegeben, so bilde man aus denselben zwei in drei Punkten übereinstimmende Vierecke, wie z. B. $ABCD$ und $ABCE$ (Fig. 18), construire ferner die Normalkreise beider und nehme den Durchschnitt der letzteren zum Projectionscentrum; man erhält jetzt in $\mathfrak{C}'$ zwei Sehnenvierecke $A'B'C'D'$ und $A'B'C'E'$, welche drei Ecken gemein haben, also einem und demselben Kreise eingeschrieben sind. Die Projection dieses Kreises ist der gesuchte Kegelschnitt.

Um zu entscheiden, ob die hiermit gefundene Curve eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, bedarf es nur der Construction der Gegenpolare JK, welche $\parallel F_0H_0$ in derselben Entfernung wie O von der Polare liegt; je nachdem die Gegenpolare ausserhalb des Kreises fällt, ihn berührt oder schneidet, ist die Curve eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

Endlich können auch die Achsen des Kegelschnitts direct bestimmt werden; man construirt zu diesem Zwecke diejenigen conjugirten Kreissehnen, denen senkrecht aufeinander stehende Durchmesser entsprechen; die Projectionen dieser Sehnen sind die Achsen. Bei der Hyperbel kann man gleichzeitig die Asymptoten nach dem in Nr. 3 erwähnten Verfahren bestimmen.

II.

Ueber eine besondere Gattung von Reihen.

Von O. Schlömilch.

Die Reihen, welchen wir im Folgenden eine kurze Untersuchung widmen, sind von den Formen

$$A_1 \cos\vartheta \cos\vartheta + A_2 \cos^2\vartheta \cos 2\vartheta + A_3 \cos^3\vartheta \cos 3\vartheta + \ldots$$

$$B_1 \cos\vartheta \sin\vartheta + B_2 \cos^2\vartheta \sin 2\vartheta + B_3 \cos^3\vartheta \sin 3\vartheta + \ldots$$

und bilden gewissermaassen eine Mittelgattung zwischen den nach Potenzen einer Variabelen ($\cos\vartheta$) aufsteigenden und den nach Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens (ϑ) fortschreitenden Reihen. Wir werden zunächst zeigen, wie sich manche Functionen, namentlich Integrale, mit Leichtigkeit in derartige Reihen umsetzen lassen, und nachher die allgemeinen Bedingungen erörtern, unter denen eine beliebige Function in eine solche Reihe verwandelbar ist.

I. Die einfachsten Reihen der obigen Form ergeben sich aus den bekannten für jedes ächt gebrochene r und beliebige ϑ geltenden Gleichungen

$$\frac{1-r\cos\vartheta}{1-2r\cos\vartheta+r^2} = 1 + r\cos\vartheta + r^2\cos 2\vartheta + \ldots,$$

$$\frac{r\sin\vartheta}{1-2r\cos\vartheta+r^2} = r\sin\vartheta + r^2\sin 2\vartheta + r^3\sin 3\vartheta + \ldots$$

und zwar durch die Substitution $r = p\cos\vartheta$, wobei p wiederum als ächter Bruch vorausgesetzt werden möge; es ist dann

$$\frac{1-p\cos^2\vartheta}{1-(2p-p^2)\cos^2\vartheta} = 1 + p\cos\vartheta\cos\vartheta + p^2\cos^2\vartheta\cos 2\vartheta + \ldots$$

$$\frac{p\cos\vartheta\sin\vartheta}{1-(2p-p^2)\cos^2\vartheta} = p\cos\vartheta\sin\vartheta + p^2\cos^2\vartheta\sin 2\vartheta + \ldots$$

und für $p = 1-q$, wo nun q zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegen muss,

$$\frac{1-(1-q)\cos^2\vartheta}{1-(1-q^2)\cos^2\vartheta} = 1 + (1-q)\cos\vartheta\cos\vartheta + (1-q)^2\cos^2\vartheta\cos 2\vartheta + \ldots$$

$$\frac{(1-q)\cos\vartheta\sin\vartheta}{1-(1-q^2)\cos^2\vartheta} = (1-q)\cos\vartheta\sin\vartheta + (1-q)^2\cos^2\vartheta\sin 2\vartheta + \ldots$$

Zieht man von der ersten Gleichung die Einheit ab, dividirt nachher beide Gleichungen durch $1-q$ und drückt schliesslich $\cos\vartheta$, sowie $\sin\vartheta$, durch $\tan\vartheta$ aus, so hat man folgende Formeln:

$$1)\quad \frac{q}{q^2+\tan^2\vartheta}=\cos\vartheta\cos\vartheta+(1-q)\cos^2\vartheta\cos 2\vartheta+(1-q)^2\cos^3\vartheta\cos 3\vartheta+\ldots$$

$$2)\quad \frac{\tan\vartheta}{q^2+\tan^2\vartheta}=\cos\vartheta\sin\vartheta+(1-q)\cos^2\vartheta\sin 2\vartheta+(1-q)^2\cos^3\vartheta\sin 3\vartheta+\ldots$$

Aus diesen kann man beliebig viele andere und ähnliche Gleichunge dadurch ableiten, dass man mit einer beliebigen Function $f(q)$ und mit d multiplicirt und zwischen Grenzen integrirt, welche nicht ausserhalb — und $+1$ liegen. Einige Beispiele hierzu sind folgende.

Wir multipliciren die Gleichung 1) mit $q^{\mu-1}dq$, wo μ eine beliebig positive Grösse bezeichnet, und benutzen rechter Hand die bekannte Form

$$\int_0^1 q^{\mu-1}(1-q)^{n-1}dq=\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)};$$

es wird dann

$$\int_0^1\frac{q^\mu\,dq}{\tan^2\vartheta+q^2}=\frac{1}{\mu}\Big\{\cos\vartheta\cos\vartheta+\frac{1}{\mu+1}\cos^2\vartheta\cos 2\vartheta$$
$$+\frac{1.2}{(\mu+1)(\mu+2)}\cos^3\vartheta\cos 3\vartheta+\ldots\Big\}$$

Für $q=x\tan\vartheta$ verwandelt sich die linke Seite

$$\tan^{\mu-1}\vartheta\int_0^{\cot\vartheta}\frac{x^\mu\,dx}{1+x^2},$$

wir erhalten daher, wenn $\cot\vartheta$ kurz mit h bezeichnet wird,

$$3)\quad \int_0^h\frac{x^\mu\,dx}{1+x^2}$$
$$=\frac{h^{\mu-1}}{\mu}\Big\{\cos\vartheta\cos\vartheta+\frac{1}{\mu+1}\cos^2\vartheta\cos 2\vartheta+\frac{1.2}{(\mu+1)(\mu+2)}\cos^3\vartheta\cos 3\vartheta+\ldots$$

und diess ist die Entwickelung eines bestimmten Integrales, wobei der B gen ϑ durch die Gleichung $\cot\vartheta=h$ gegeben ist.

Aus der Formel 2) erhält man durch das nämliche Verfahren

$$4)\quad \int_0^h\frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^2}$$
$$=\frac{h^{\mu-1}}{\mu}\Big\{\cos\vartheta\sin\vartheta+\frac{1}{\mu+1}\cos^2\vartheta\sin 2\vartheta+\frac{1.2}{(\mu+1)(\mu+2)}\cos^3\vartheta\sin 3\vartheta+\ldots$$

Setzt man in beiden Gleichungen $x=\sqrt{z}$, $h=\sqrt{k}$, in der erst $\mu=2\lambda+1$ und in der zweiten $\mu=2\lambda+2$, so gelangt man zu dem Erge nisse:

$$5)\quad \int_0^k\frac{z^\lambda\,dz}{1+z}$$
$$=\frac{2k^\lambda}{2\lambda+1}\Big\{\cos\vartheta\cos\vartheta+\frac{1}{2\lambda+2}\cos^2\vartheta\cos 2\vartheta+\frac{1.2}{(2\lambda+2)(2\lambda+3)}\cos^3\vartheta\cos 3\vartheta+\ldots$$
$$=\frac{2k^\lambda}{2\lambda+2}\Big\{\cos\vartheta\sin\vartheta+\frac{1}{2\lambda+3}\cos^2\vartheta\sin 2\vartheta+\frac{1.2}{(2\lambda+3)(2\lambda+4)}\cos^3\vartheta\sin 3\vartheta+\ldots$$

Diese Formeln dürften namentlich in den Fällen brauchbar sein, wo k mehr als die Einheit, folglich $\vartheta = Arc\cot\sqrt{k}$ weniger als $\frac{1}{4}\pi$ beträgt und gleichzeitig λ ein Bruch mit grossem Zähler und Nenner oder eine Irrationalzahl ist.

Als zweites Beispiel diene die Entwickelung der elliptischen Integrale aller drei Arten. Aus Nr. 1) erhalten wir zunächst für $\vartheta = \psi$,

$$q = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega} = \Delta_\omega$$

und durch beiderseitige Division mit $\Delta_\omega \cos^2\psi$

$$6) \quad \frac{1}{1 - k^2 \sin^2\omega \cos^2\psi}$$

$$= \frac{1}{\Delta_\omega}\Big\{1 + (1-\Delta_\omega)\cos 2\psi + (1-\Delta_\omega)^2 \cos\psi \cos 3\psi + (1-\Delta_\omega)^3 \cos^2\psi \cos 4\psi + \dots\Big\};$$

diese Gleichung multipliciren wir mit $d\omega$, integriren zwischen den Grenzen $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{1}{2}\pi$, benutzen linker Hand die bekannte Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{ab}$$

für $a^2 = 1$, $b^2 = 1 - k^2\cos^2\psi$, und setzen rechter Hand zur Abkürzung

$$7) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-\Delta_\omega)^m \frac{d\omega}{\Delta_\omega} = K_m;$$

wir gelangen auf diese Weise zu der Gleichung

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}} = K_0 + K_1\cos 2\psi + K_2 \cos\psi\cos 3\psi + K_3\cos^2\psi\cos 4\psi + \dots$$

Bei einer ferneren Multiplication mit $d\psi$ und Integration zwischen den Grenzen $\psi = 0$ bis $\psi = \psi$ kann die Formel

$$\int_0^\psi \cos^{m-1}\psi \cos(m+1)\psi\, d\psi = \frac{1}{m}\cos^m\psi \sin m\psi$$

auf jedes einzelne Reihenglied angewendet werden; diess giebt die gesuchte Entwickelung:

$$8) \quad \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}} = K_0\psi + \tfrac{1}{1}K_1\cos\psi\sin\psi + \tfrac{1}{2}K_2\cos^2\psi\sin 2\psi + \dots$$

Die Coefficienten $K_0, K_1, K_2 \dots$ sind nach Nr. 7) leicht zu berechnen; bedienen wir uns der Jacobi'schen Bezeichnung für die vollständigen elliptischen Integrale, nämlich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\Delta_\omega} = K, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta_\omega\, d\omega = E,$$

so erhalten wir für jene Coefficienten der Reihe nach die Werthe:

$$K_0 = K, \quad K_1 = K - \tfrac{1}{2}\pi, \quad K_2 = K - \pi + E,$$
$$K_3 = K - 2\pi + 3E + \tfrac{1}{4}\pi k^2 \quad \text{u. s. w.}$$

Will man in Nr. 8) statt der linken Seite das gewöhnliche elliptische Integral

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}} = F(k,\varphi),$$

so bedarf es nur der Bemerkung, dass

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \cos^2\psi}} = K - F(k, \tfrac{1}{2}\pi - \psi)$$

ist; man erhält dann für $\frac{1}{2}\pi - \psi = \varphi$

$$9) \quad \tfrac{1}{2}\pi\, F(k,\varphi) = K\varphi - \tfrac{1}{1} K_1 \cos\psi \sin\psi - \tfrac{1}{2} K_2 \cos^2\psi \sin 2\psi - \ldots$$

Die Entwickelung des elliptischen Integrales zweiter Art erfordert zunächst die Ableitung einer Reihe für $\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}$; hierzu dient wiederum die Gleichung 6), wenn man beide Seiten derselben mit $\cot^2\psi$ multiplicirt und nachher von $\operatorname{cosec}^2\psi$ abzieht. Es ergiebt sich

$$\frac{1-k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\omega\cos^2\psi} = \left(1 - \frac{\cos^2\omega}{\Delta_\omega}\right)\frac{1}{\sin^2\omega}$$
$$- \frac{\cot^2\omega}{\Delta_\omega}\left\{(1-\Delta_\omega)\cos 2\psi + (1-\Delta_\omega)^2\cos\psi\cos 3\psi + \ldots\right\};$$

wir multipliciren ferner mit $d\omega$, integriren zwischen den Grenzen $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{1}{2}\pi$ und setzen zur Abkürzung

$$10) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1 - \frac{\cos^2\omega}{\Delta_\omega}\right)\frac{d\omega}{\sin^2\omega} = E_0, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\Delta_\omega)^m \frac{\cot^2\omega\, d\omega}{\Delta_\omega} = E_m;$$

das Ergebniss lautet dann

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{1-k^2\cos^2\psi} = E_0 - E_1\cos 2\psi - E_2\cos\psi\cos 3\psi - E_3\cos^2\psi\cos 4\psi - \ldots$$

und hieraus folgt durch Multiplication mit $d\psi$ und Integration zwischen den Grenzen $\psi = 0$ bis $\psi = \psi$

$$11) \quad \frac{\pi}{2}\int_0^\psi \sqrt{1-k^2\cos^2\psi}\, d\psi = E_0\psi - \tfrac{1}{1}E_1\cos\psi\sin\psi - \tfrac{1}{2}E_2\cos^2\psi\sin 2\psi - \ldots$$

Unter Anwendung der Integralformel

$$\int \frac{\cot^2\omega}{\Delta_\omega}\, d\omega = -\int \sqrt{1-k^2\sin^2\omega}\, d\omega - \Delta_\omega \cot\omega$$

findet man für die Coefficienten dieser Reihe

$$E_0 = E, \quad E_1 = \tfrac{1}{2}\pi - E, \quad E_2 = \pi - 3E + k'^2 K, \ldots$$

wo k' wie gewöhnlich $\sqrt{1-k^2}$ bezeichnet.

Aus der Gleichung 11) ergiebt sich noch die folgende

$$12) \quad \tfrac{1}{2}\pi\, E(k,\varphi) = E\varphi + \tfrac{1}{1}E_1\cos\psi\sin\psi + \tfrac{1}{2}E_2\cos^2\psi\sin 2\psi + \ldots$$

worin ψ das Complement von φ bedeutet.

Zur Entwickelung der elliptischen Integrale dritter Art dient eine Gleichung, welche aus Nr. 6) dadurch erhalten wird, dass man erst $\omega = \alpha$, nachher $\omega = \omega$ setzt und die beiden entstehenden Gleichungen von einander abzieht; die genannte Differenz ist:

$$\frac{k^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 \omega) \cos^2 \psi}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \psi)(1 - k^2 \sin^2 \omega \cos^2 \psi)}$$

$$= \left\{\frac{1}{\varDelta_\alpha} - \frac{1}{\varDelta_\omega}\right\} + \left\{\frac{1-\varDelta_\alpha}{\varDelta_\alpha} - \frac{1-\varDelta_\omega}{\varDelta_\omega}\right\} \cos 2\psi$$

$$+ \left\{\frac{(1-\varDelta_\alpha)^2}{\varDelta_\alpha} - \frac{(1-\varDelta_\omega)^2}{\varDelta_\omega}\right\} \cos\psi \cos 3\psi + \ldots$$

Wir multipliciren dieselbe mit

$$\frac{d\omega}{\sin^2\alpha - \sin^2\omega},$$

integriren zwischen den Grenzen $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{1}{2}\pi$ und setzen dabei zur Abkürzung

$$13) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{\frac{(1-\varDelta_\alpha)^m}{\varDelta_\alpha} - \frac{(1-\varDelta_\omega)^m}{\varDelta_\omega}\right\} \frac{d\omega}{\sin^2\alpha - \sin^2\omega} = L_m;$$

das Resultat ist

$$\frac{\pi}{2} \frac{k^2 \cos^2\psi}{1 - k^2 \sin^2\alpha \cos^2\psi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2\psi}}$$

$$= L_0 + L_1 \cos 2\psi + L_2 \cos\psi \cos 3\psi + L_3 \cos^2\psi \cos 4\psi + \ldots$$

und hieraus folgt durch Multiplication mit $d\psi$ und Integration zwischen den Grenzen $\psi = 0$ bis $\psi = \psi$

$$14) \quad \frac{\pi}{2} \int_0^{\psi} \frac{k^2 \cos^2\psi \, d\psi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \cos^2\psi)\sqrt{1 - k^2 \cos^2\psi}}$$

$$= L_0 \psi + \frac{1}{1} L_1 \cos\psi \sin\psi + \frac{1}{2} L_2 \cos^2\psi \sin 2\psi + \ldots\ldots$$

Nach der Jacobi'schen Bezeichnung der elliptischen Integrale dritter Art ist

$$\int_0^{\varphi} \frac{k^2 \varDelta_\alpha \sin\alpha \cos\alpha \sin^2\varphi \, d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\varDelta\varphi} = \Pi(k, \alpha, \varphi)$$

mithin das obige Integral

$$= \frac{\Pi(k, \alpha, \frac{1}{2}\pi) - \Pi(k, \alpha, \frac{1}{2}\pi - \psi)}{\varDelta_\alpha \sin\alpha \cos\alpha},$$

für $\frac{1}{2}\pi - \psi = \varphi$ hat man daher

$$\Pi(k, \alpha, \varphi) = \Pi(k, \alpha, \tfrac{1}{2}\pi) - \varDelta_\alpha \sin\alpha \cos\alpha \left\{L_0 \psi + \tfrac{1}{1} L_1 \cos\psi \sin\psi + \ldots\right\}$$

Für $\varphi = 0$ also $\psi = \frac{1}{2}\pi$ giebt die vorstehende Gleichung

$$0 = \Pi(k, \alpha, \tfrac{1}{2}\pi) - \varDelta_\alpha \sin\alpha \cos\alpha \, L_0 \tfrac{1}{2}\pi$$

und wenn man diese von der früheren abzieht, so bleibt

$$15) \quad \Pi(k, \alpha, \varphi) = \varDelta_\alpha \sin\alpha \cos\alpha \left\{L_0 \varphi + \tfrac{1}{1} L_1 \cos\psi \sin\psi + \tfrac{1}{2} L_2 \cos^2\psi \sin 2\psi + \ldots\right\}$$

II. Zur Entscheidung der Frage, ob nicht unter gewissen Bedingungen jede Function $F(\vartheta)$ in die eine oder andere der Reihen

$$A_1 \cos\vartheta \cos\vartheta + A_2 \cos^2\vartheta \cos 2\vartheta + A_3 \cos^3\vartheta \cos 3\vartheta + \ldots$$

$$B_1 \cos\vartheta \sin\vartheta + B_2 \cos^2\vartheta \sin 2\vartheta + B_3 \cos^3\vartheta \sin 3\vartheta + \ldots$$

verwandelbar ist und wie in diesem Falle die Coefficienten zu bestimmen sind, wird uns folgende Betrachtung führen.

Vorausgesetzt, dass der von x abhängige Ausdruck

$$\Phi(x) = e^x \int_0^\infty F(Arc\tan\tau)\cos x\tau\, d\tau$$

für alle positiven x endlich und stetig bleibt und dass die nämliche Eigenschaft auch den n ersten Differentialquotienten von $\Phi(x)$ zukommt, ist zufolge des Theoremes von Mac Laurin

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1}x + \frac{\Phi''(0)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\Phi^{(n-1)}(0)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1} + P_n,$$

wo P_n den in verschiedenen Formen darstellbaren Rest der Reihe bezeichnet. Die vorstehende Gleichung multipliciren wir

$$\overset{-x}{e}\cos\mu x\, dx,$$

integriren zwischen den Grenzen $x = 0$ bis $x = \infty$ und benutzen rechter Hand die bekannte Formel

$$\int_0^\infty x^{h-1}\overset{-\alpha x}{e}\cos\beta x\, dx = \frac{1.2\ldots(h-1)\cos\left[h\, Arc\tan\frac{\beta}{\alpha}\right]}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}h}}$$

indem wir gleichzeitig zur Abkürzung $Arc\tan\mu = \vartheta$ setzen; wir erhalten auf diese Weise:

$$\int_0^\infty \Phi(x)\overset{-x}{e}\cos\mu x\, dx$$

$$= \Phi(0)\cos\vartheta\cos\vartheta + \Phi'(0)\cos^2\vartheta\cos 2\vartheta + \Phi''(0)\cos^3\vartheta\cos 3\vartheta + \ldots$$

$$\ldots + \Phi^{(n-1)}(0)\cos^n\vartheta\cos n\vartheta + \int_0^\infty P_n\overset{-x}{e}\cos\mu x\, dx.$$

Vermöge der Bedeutung von $\Phi(x)$ ist die linke Seite dieser Gleichung einerlei mit

$$\int_0^\infty \cos\mu x\, dx \int_0^\infty F(Arc\tan\tau)\cos x\tau\, d\tau$$

d. i. zufolge des Fourier'sches Satzes, welcher für $\infty > \mu \geqq 0$ richtig bleibt,

$$= \frac{\pi}{2}F(Arc\tan\mu) = \frac{\pi}{2}F(\vartheta).$$

Die hiermit gewonnene Gleichung

$$\frac{\pi}{2}F(\vartheta) = \Phi(0)\cos\vartheta\cos\vartheta + \Phi'(0)\cos^2\vartheta\cos 2\vartheta + \ldots$$
$$\ldots + \Phi^{(n-1)}(0)\cos^n\vartheta\cos n\vartheta + \int_0^\infty P_n\overset{-x}{e}\cos\mu x\, dx \tag{16}$$

enthält nun folgendes Theorem:

Eine Reihenentwickelung von der Form

$$F(\vartheta) = A_1\cos\vartheta\cos\vartheta + A_2\cos^2\vartheta\cos 2\vartheta + \ldots + A_n\cos^n\vartheta\cos n\vartheta + U_n$$

ist unter der Bedingung möglich, dass die Function

$$\Phi(x) = e^x\int_0^\infty F(Arc\tan\tau)\cos x\tau\, d\tau$$

nebst ihren n ersten Differentialquotienten für alle positi-

von x endlich und stetig bleibt; die Coefficienten A bestimmen sich mittelst der Formel

$$A_m = \frac{2}{\pi} \Phi^{(m-1)}(0),$$

der Rest der Reihe ist:

$$U_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty P_n e^{-x} \cos \mu x \, dx,$$

wo P_n den Rest der für $\Phi(x)$ geltenden Potenzenreihe bezeich- und $\mu = Arc \tan \vartheta$ ist.

Durch eine völlig analoge Betrachtung gelangt man zu folgendem Correlate des obigen Satzes:

Eine Reihenentwickelung von der Form

$$F(\vartheta) = B_1 \cos \vartheta \sin \vartheta + B_2 \cos^2 \vartheta \sin 2\vartheta + \ldots + B_n \cos^n \vartheta \sin n\vartheta + V_n$$

ist unter der Bedingung möglich, dass die Function

$$\Psi(x) = e^x \int_0^\infty F(Arc \tan \tau) \sin x\tau \, d\tau$$

nebst ihren n ersten Differentialquotienten für alle positiven x endlich und stetig bleibt; die Coefficienten B bestimmen sich mittelst der Formel

$$B_m = \frac{2}{\pi} \Psi^{(m-1)}(0),$$

der Rest der Reihe ist

$$V_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty Q_n e^{-x} \sin \mu x \, dx,$$

wo Q_n den Rest der für $\Psi(x)$ geltenden Potenzenreihe bezeichnet und $\mu = Arc \tan \vartheta$ ist.

Um den Zusammenhang zwischen diesen Theoremen und den früheren Entwickelungen hervortreten zu lassen, wollen wir den ersten Satz auf die Function

$$F(\vartheta) = \frac{\cos^2 \vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tan^2 \vartheta)(k'^2 + \tan^2 \vartheta)}}$$

anwenden, wo k'^2 wie gewöhnlich $= 1 - k^2$ ist. Wir erhalten in diesem Falle

$$\Phi(x) = e^x \int_0^\infty \frac{\cos x\tau \, d\tau}{\sqrt{(1 + \tau^2)(k'^2 + \tau^2)}}$$

und würden nun beurtheilen müssen, ob der Werth des in endlicher Form nicht entwickelbaren Integrales eine den angegebenen Bedingungen genügende Function von x bildet. Für diesen Zweck ist aber die obige Form von $\Phi(x)$ sehr unbequem, wir benutzen daher die Substitution

$$\frac{1}{ab} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega}$$

für $a^2 = 1 + \tau^2$, $b^2 = k'^2 + \tau^2$ und erhalten

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} e^x \int_0^\infty \cos x\tau \, d\tau \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\Delta_\omega^2 + \tau^2} = \frac{2}{\pi} e^x \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \int_0^\infty \frac{\cos x\tau \, d\tau}{\Delta_\omega^2 + \tau^2}$$

d. i. nach einer sehr bekannten Formel

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} e^x \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Delta_\omega} e^{-x\Delta_\omega} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\Delta_\omega} e^{x(1-\Delta_\omega)}.$$

Aus dieser neuen Gestalt von $\Phi(x)$ erkennt man leicht, dass $\Phi(x)$, $\Phi'(x)$ .... $\Phi^{(n)}(x)$ den verlangten Bedingungen genügen; ausserdem findet sich

$$A_m = \frac{2}{\pi} \Phi^{(m-1)}(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-\Delta_\omega)^{m-1} \frac{d\omega}{\Delta_\omega}$$

und wenn der Werth des Integrales mit K_m bezeichnet wird, so hat man jetzt

$$\frac{\pi}{2} \frac{\cos^2\vartheta}{\sqrt{1-k^2\cos^2\vartheta}}$$

$$= K_0 \cos\vartheta \cos\vartheta + K_1 \cos^2\vartheta \cos 2\vartheta + K_2 \cos^3\vartheta \cos 3\vartheta + \ldots\ldots$$

$$\ldots + K_{n-1} \cos^n\vartheta \cos(n-1)\vartheta + U_n .$$

Bei unendlich wachsenden n convergirt der Rest U_n gegen die Null und die vorige Gleichung wird dann mit derjenigen identisch, aus welcher die Formel 8) abgeleitet wurde.

III.

Die neueren hydraulischen Untersuchungen.

Von Witzschel.

Von den Untersuchungen über die Bewegungen der Flüssigkeiten und des Wassers, als des allgemeineren Repräsentanten derselben, bieten die auf den Ausfluss aus verschiedenen Oeffnungen bezüglichen ein nicht geringes Interesse sowohl in theoretischer als in practischer Hinsicht dar. Obwohl nun gerade die Hydraulik dasjenige Gebiet der Physik ist, welches zeither einer verhältnissmässig geringeren Aufmerksamkeit sich zu erfreuen gehabt hat, aus Gründen, die der Hauptsache nach in der Umständlichkeit der hierzu nöthigen Versuche, sowie in der Schwierigkeit, die hier einschlagenden Molecularverhältnisse — bekannter und unbekannter Natur — gehörig zu berücksichtigen und der Rechnung zu unterziehen, gesucht werden müssen; so konnte sich doch die Wissenschaft der Untersuchung der Bewegungsgesetze einer Substanz, die, wie das Wasser, in so allseitiger und allzeitlicher Berührung mit uns und unseren Lebensverhältnissen steht, nicht auf die Dauer entziehen, nur erhielten die darüber angestellten Versuche und Beobachtungen eine Gestalt und einen Zuschnitt, nach welchem das practische Bedürfniss immer in dem Vordergrunde blieb. Namentlich sind die Erscheinungen und Gesetze, welche sich auf den Ausfluss des Wassers aus verschieden geformten Oeffnungen beziehen, Gegenstand vielfältiger Untersuchungen gewesen, die aber meist zur Ermittelung gewisser für die Praxis wichtiger Daten und Regeln, weniger zu dem Zwecke, die physikalischen Bedingungen der beim Ausfluss auftretenden eigenthümlichen Erscheinungen zu erörtern und festzustellen, unternommen worden sind. Theoretische Untersuchungen über die Querschnittsformen der Wasserstrahlen, sowie über einige andere Ausflusserscheinungen hat F. Savart angestellt, deren hauptsächliche Resultate bereits in die meisten Lehrbücher der Physik übergegangen sind. In neuerer Zeit hat Magnus mehrere sehr interessante Versuche über die Formen des ausfliessenden Strahles bekannt gemacht, nicht minder höchst befriedigende Erklärungen über die Entstehung der sonderbaren Gestalten desselben gegeben, auf welche aufmerksam zu machen zum Theil der Zweck dieses Aufsatzes sein möge. Von den Hydraulikern, welche gleichfalls Beschreibungen und Erklärungen der Gestalten des Wasserstrahles gegeben haben, sind noch E y t e l w e i n und B i d o n e, sowie P o n c e l e t und L e s b r o s zu nennen.

Man wird es somit in der Natur der Sache begründet finden, wenn wir hier bei Erörterung gewisser theoretischer Untersuchungen aus dem Gebiete der Hydraulik auf Versuche und Beobachtungen zurückgehen, die zum Theil schon seit längerer Zeit Gegenstand allgemeiner Aufmerksamkeit gewesen, zum Theil nur zur Verfolgung rein praktischer Zwecke unternommen worden sind. Zudem werden dieselben für Beurtheilung und Würdigung der neueren, unten näher angegebenen Untersuchungen nicht unwesentliche Momente abgeben.

Wie schon angedeutet, haben die meisten hydraulischen Untersuchungen zunächst eine rein praktische Seite, und wenn wir uns insbesondere an die über den Ausfluss des Wassers aus bestimmten Oeffnungen halten, so sind dieselben in der Regel zu dem doppelten Zwecke angestellt, einmal die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers und dann die Menge desselben in der Zeiteinheit zu bestimmen. Beide Fragen erlangen überall da besondere Wichtigkeit, wo es sich um Verwendung der motorischen Kraft des fliessenden Wassers handelt. Eine einfache Betrachtung lehrt nun, dass die Menge m des ausfliessenden Wassers gleich dem Producte aus dem Flächeninhalte a des Querschnitts der Oeffnung in die Ausflussgeschwindigkeit v oder $m = av$ ist, wenn die einzelnen Wasserfäden, aus denen man den ausfliessenden Strahl sich zusammengesetzt denken kann, einander parallel, wenigstens auf die Dauer einer Zeiteinheit, bleiben; dass ferner die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers aus einer im Boden des Gefässes horizontalen Oeffnung so gross wie die Endgeschwindigkeit eines von der Druckhöhe frei herabfallenden Körpers, oder $v = \sqrt{2gh}$ ist, wobei g die Beschleunigung der Schwere und h den senkrechten Abstand des Wasserspiegels von der Mündung, oder die sogenannte Druckhöhe bedeutet. Und in der That werden beide Gesetze, das letztere von Torricelli*), nach Versuchen von Michelotti**), Eytelwein***) und Venturi†) durch die Erfahrung fast vollständig bestätigt, wenn die Druckhöhe gegen die Weite der Oeffnung etwas beträchtlich, und wenn die Ausflussöffnung sich nach innen allmälig erweitert und ohne Ecken und Kanten der inneren Gefässfläche anschliesst. Sind jedoch diese Bedingungen nicht erfüllt, so müssen obige Ausflussgesetze, sowie alle davon abhängigen, bedeutend abgeändert werden, wenn sie mit der Erfahrung übereinstimmen sollen. Die erfahrungsmässig bestimmte Ausflussmenge ist immer beträchtlich geringer, als die nach obigen Gesetzen berechnete und es findet daher entweder eine geringere Ausflussgeschwindigkeit statt, oder es ist ein anderer Querschnitt als der der Oeffnung in Rechnung zu ziehen, oder man muss beide Annahmen nebeneinander bestehen lassen.

Die bekannte Erscheinung der Contraction des Wasserstrahles bei einer Ausflussöffnung in einer dünnen Wand und vorläufige Messungen über den Querschnitt des contrahirten Wasserstrahls führten zu der Ansicht, dass erst in einer gewissen Entfernung von der Ausflussöffnung, da wo die Contraction am stärksten oder der Querschnitt des Strahles am kleinsten ist, die Wasserfäden des Strahls als parallel angesehen werden könnten,

---

*) *Del moto dei gravi.* 1644.

**) *Michelotti Specimenti idraulichi;* deutsch von Zimmermann: Fr. Dom. Michelotti's hydraulische Versuche, nebst einem Anhange über die neueren Versuche von J. Ther. Michelotti. Berlin. 1808.

***) Handbuch der Mechanik und Hydraulik.

†) *Recherches expérimentales etc. Paris.* 1797. Gilbert's Annal. B. II. III. 1799.

und dass die Ausflussmenge demnach als das Product aus dem Flächeninhalte dieses Querschnittes in die nach dem Torricelli'schen Gesetze bestimmte Geschwindigkeit betrachtet werden müsse. Genauere Messungen *), nach welchen die Geschwindigkeit aus der Sprungweite eines aus vertikaler Oeffnung ausfliessenden Strahles, sowie die Menge des ausgeflossenen Wassers und die Querschnitte an verschiedenen Stellen des Strahles direct und unabhängig von einander bestimmt wurden, zeigten jedoch, dass der Querschnitt des zusammengezogenen Strahles nicht so direct als Element zur Bestimmung der Wassermenge dienen kann. Nur bei kleineren Mündungen lässt sich unter Umständen die Differenz zwischen der wirklichen und der so berechneten Ausflussmenge als eine zu vernachlässigende Grösse ansehen.

Die Messungen der stärksten Contraction des Wasserstrahles und ihres Abstandes von der (inneren) Mündung sind alle noch mit einer ziemlichen Unsicherheit behaftet. Für kreisförmige Mündungen schwankt das Verhältniss des Durchmessers der grössten Zusammenziehung zu dem der Oeffnung nach den Angaben von Bossut und Michelotti d. J. zwischen 0,82 und 0,76. Die Angaben von Eytelwein **) und Venturi ***) stehen ziemlich mitten zwischen diesen Grenzen. Noch stärker weichen die Angaben der beiden Erstgenannten bezüglich des Verhältnisses der Entfernung des Querschnittes der stärksten Contraction zum Durchmesser der Mündung von einander ab, indem dasselbe zwischen 0,54 und 0,37 fällt. Im Mittel lassen sich nach den Beobachtungen der Genannten die Verhältnisse 10:8:5 zwischen dem Durchmesser der Oeffnung, dem des Querschnitts des am stärksten zusammengezogenen Strahles und seinem Abstande von der (inneren) Mündung annehmen. Schon die Messungen von Bossut und Michelotti, noch mehr aber die von Poncelet und Lesbros (s. oben) deuten darauf hin, dass diese Verhältnisse veränderlich sind mit der Druckhöhe, der Weite der Mündung und besonders auch mit der Gestalt des Umfanges derselben. So sind die Contractionserscheinungen bei quadratischen Mündungen ganz andere als bei kreisförmigen †). Poncelet und Lesbros fanden bei einer quadratischen Oeffnung von 2 Decimeter Seite in einem vertikal gerichteten Kupferbleche und bei einer Druckhöhe von $1{,}68^m$ die stärkste Contraction in einem Abstande von 30 Centimetern und das Verhältniss der Querschnittsfläche derselben zur Mündung wie $225:400 = 9:16 = 0{,}563$. Ausserdem scheint bei Oeffnungen jeder Art mit zunehmender Druckhöhe die stärkste Contraction grösser und ihr Abstand von der Mündung kleiner zu werden.

Das Verhältniss der wirklichen Geschwindigkeit des Strahles zur theoretischen, nach dem Toricelli'schen Gesetz berechneten, ist nach den gut übereinstimmenden Messungen von Bossut und Michelotti d. Ae. $= 0{,}98$. Diese auf die Sprungweiten des Strahles gerichteten Messungen geben indess keine Andeutung darüber, ob auch für jeden Querschnitt die Geschwindigkeit in jedem einzelnen Punkte desselben dieselbe sei, d. h. ob die einzelnen nebeneinander liegenden Wasserfäden, aus denen man den

---

*) *Ch. Bossut, Traité théorique et expérimental d'hydrodynamique.* (Uebersetzt von Langsdorf.) *Castel, Nouvelles expériences sur l'écoulement de l'eau. VI. exp.* 9, 10. *Poncelet et Lesbros, Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoul. Paris.* 1832.

**) Handbuch der Mechanik und Hydraulik. §. 92.

***) Gilbert's Annal. B. III.

†) Bezüglich dieser s. unten Seite 46.

Strahl zusammengesetzt denken kann, in jedem Querschnitte des Strahles gleiche Geschwindigkeit haben. Dass dem nicht so ist, wird nach mehreren noch weiter angeführten Erscheinungen und Resultaten wahrscheinlich. Sehr häufig setzt man indess das Verhältniss der theoretischen zur wirklichen Ausflussmenge aus dem Verhältnisse der theoretischen und wirklichen Geschwindigkeit und dem der Querschnitte der Mündung und grössten Contraction zusammen, oder man betrachtet den Ausflusscoefficient als ein Product aus dem Geschwindigkeits- und dem Contractionscoefficienten. Ob diese aus practischen Gesichtspunkten gewonnene Ansicht sich theoretisch rechtfertigen lässt, möchte demnach zweifelhaft sein, ist wenigstens eine Frage, deren Beantwortung von genaueren Messungen über die Geschwindigkeit des Strahles sowohl in seinen einzelnen Querschnitten als auch in seinen zur Axe parallelen Theilen oder Fäden noch abhängig bleiben wird. Berechnet man nach den mit grosser Umsicht angestellten Versuchen von Poncelet und Lesbros aus der wirklichen Ausflussmenge oder aus dem Ausflusscoefficienten, der für $1{,}68^m$ Druckhöhe und eine quadratische Oeffnung von 2 Decimeter Seite $= 0{,}602$ war, und aus dem derselben Druckhöhe und Oeffnung zugehörigen Contractionscoefficienten $= 0{,}563$ den Geschwindigkeitscoefficienten, so wird derselbe sogar grösser als 1, d. h. die wirkliche Geschwindigkeit wäre demnach grösser als die theoretische, was dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte widerstreitend anzusehen ist. Zu bemerken aber ist hierbei, dass der Ausflusscoefficient unter Umständen von Elementen und in einer Weise mit abhängig sein kann, die den Contractionscoefficienten und den Geschwindigkeitscoefficienten gar nicht, oder doch ganz anders beeinflussen und umgekehrt. So scheinen die verschiedenen Gestalten der Mündung, welche die Form des contrahirten Strahles wesentlich bedingen, auch auf die Geschwindigkeit des Strahles in seinen zur Axe parallelen Theilen einflussreicher zu sein, als man gewöhnlich annahm, wie man aus weiter unten angeführten Contractionserscheinungen ohne Weiteres abnehmen kann. Auch der Ausflusscoefficient hängt von der Form und den Dimensionen seines Umfanges in ganz eigenthümlicher Weise ab, wie die Ergebnisse der Versuche von Poncelet und Lesbros zeigen. Die beiden Experimentatoren wendeten rectanguläre Oeffnungen von constanter Breite $= 0{,}20^m$ und von veränderlicher Höhe $= 0{,}20^m$, $0{,}10^m$, $0{,}05^m$, $0{,}03^m$, $0{,}02^m$, $0{,}01^m$ an. Die Druckhöhen wurden sowohl unmittelbar über der Oeffnung, wo der Wasserspiegel eine gewisse Senkung zeigt, als auch weiter oben, wo die Wasserfläche als unveränderlich angesehen werden konnte, gemessen. Die Versuche haben ergeben, dass bei einer Oeffnungshöhe der Mündung von

$0{,}20^m$, $0{,}10^m$, $0{,}05^m$, $0{,}03^m$, $0{,}02^m$, $0{,}01^m$

die Maxima der Ausflusscoefficienten

0,605, 0,617, 0,631, 0,640, 0,660, 0,705

zu einer Druckhöhe (nicht unmittelbar über der Mündung) von

$1{,}000^m$, $0{,}500^m$, $0{,}160^m$, $0{,}050^m$, $0{,}015^m$ [$0{,}005^m$]

gehörten. Ueber und unter den bezeichneten Druckhöhen ergaben sich geringere Ausflusscoefficienten. Wurden die Druckhöhen unmittelbar über der Mündung gemessen, so zeigte sich in der Ausflussmenge der Einfluss einer eigenthümlichen Bewegung des Wassers vor dem Eintritt in die Oeffnung, welche auch in der erwähnten Senkung des Wasserspiegels sichtbar ist. Die Senkung bei horizontalem Ausfluss durch eine vertikale Wand nimmt bei vertikalem Ausfluss aus einer horizontalen Bodenwand gewöhn-

lich eine trichter- oder kegelförmige Gestalt an, wobei das Wasser in eine wirbelnde Bewegung geräth. Diese Wirbelbewegung ist bei den von Magnus in neuerer Zeit angestellten Versuchen, deren unten Erwähnung geschieht, sorgfältig durch eine besondere Vorrichtung aufgehoben worden. Wie einflussreich sie auf die Ausflusserscheinungen sein mag, deuten schon die Beobachtungen von Poncelet und Lesbros an; denn für dieselben Oeffnungshöhen der Mündungen von

$$0{,}20^m,\quad 0{,}10^m,\quad 0{,}05^m,\quad 0{,}03^m,\quad 0{,}02^m,\quad 0{,}01^m$$

ergaben sich die Maxima der Ausflusscoefficienten zu

$$\left.\begin{matrix}0{,}619\\ \text{und }0{,}605\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}0{,}667\\ 0{,}617\end{matrix}\right\},\quad 0{,}713,\quad 0{,}766,\quad 0{,}783,\quad 0{,}795,$$

bei den Druckhöhen (unmittelbar über den Mündungen)

$$\left.\begin{matrix}0{,}0^m\\ 0{,}9^m\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}0{,}0^m\\ 0{,}5^m\end{matrix}\right\},\quad 0{,}0^m,\quad 0{,}0^m,\quad 0{,}0^m,\quad 0{,}0^m.$$

Für die beiden ersten Oeffnungshöhen gehörte ein Minimum des Ausflusscoefficienten von

$$0{,}594 \text{ und } 0{,}612,$$

zu den Druckhöhen

$$0{,}07^m \text{ und } 0{,}04^m.$$

Uebrigens ergaben noch die Versuche, dass bei grösseren Druckhöhen der Ausflusscoefficient für verschiedene Oeffnungshöhen der rectangulären Mündung sich der Grenze 0,60 oder 0,61 näherte.

Bei allen bisher erwähnten Ausflussverhältnissen ist die sogenannte vollständige Contraction, wobei das Wasser von allen Seiten der Oeffnung zuströmt und einen allseitig contrahirten Strahl bildet, vorausgesetzt worden. Kann dagegen das Wasser nur von einigen Seiten der Oeffnung ungehindert zuströmen und findet demnach unvollständige oder partielle Contraction statt, so werden auch alle übrigen Ausflusserscheinungen in entsprechender Weise modificirt. Die Versuche und Beobachtungen über den Ausfluss bei partieller Contraction sind, abgesehen von ihrer Wichtigkeit für die Praxis, indem diese Art Ausfluss ungleich häufiger vorkommt, besonders beachtenswerth, wenn man auf die Ursachen und die Bedingungen der einzelnen Contractionserscheinungen näher eingehen will. Wird durch senkrecht auf die Ebene der Mündung gerichtete Wände oder innere Einfassungen von einer oder mehreren Seiten der freie Zufluss des Wassers zur Mündung gehindert, so nimmt zunächst die Axe des ausfliessenden Strahles zur Ebene der Mündung eine von der früheren senkrechten abweichende Richtung an, wenn die Form der Mündung unsymmetrisch, oder wenn bei symmetrischer Form derselben die Einfassungen unsymmetrisch am Umfange vertheilt sind. Es neigt sich dabei der Strahl mehr nach der Seite des eingefassten Theiles der Mündung. Ebenso wird die Form der Querschnitte des Strahles wesentlich verändert. Die ausgedehntesten Untersuchungen hierüber hat früher Bidone *) angestellt, welcher sowohl die Dimensionen der Querschnitte des zusammengezogenen Strahles, als auch die Abweichungen der Axenrichtung desselben bei verschieden geformten Ausflussöffnungen gemessen hat. Es würde aber zu weit führen, die numerischen Resultate dieser und anderer Versuche anzuführen. Zudem erlangt man aus den neueren Untersuchungen von Magnus eine klarere und über-

*) *Expériences sur la forme et sur la direction des veines et des courans d'eau*, in *Memorie della Reale Academia delle scienze di Torino. T. XXXIV.* 1830.

sichtlichere Kenntniss von diesen Erscheinungen, so dass wir auch deshalb die älteren Beobachtungen hier übergehen können. Ebenso müssen wir von den Ausflusserscheinungen bei inneren oder äusseren, cylindrischen wie konischen Ansatzröhren hier absehen, die, so wichtig sie für die Praxis sind, doch zur Erörterung der einfacheren Phänomene als noch zu complicirte Fälle dastehen, insofern anderweitige Umstände, wie z. B. das Verhältniss des äusseren Luftdrucks und inneren Wasserdrucks, die Adhäsion des Wassers an den Röhrenwänden etc. mit ins Spiel treten *).

Schon aus den angeführten Ergebnissen dürfte hervorgehen, dass zur Ermittelung der eigentlichen Ausflussgesetze und insbesondere zur Feststellung der wesentlichen physikalischen Bedingungen der bezüglichen Erscheinungen die bisherigen Versuche nicht ausreichend und zweckentsprechend erscheinen. Es hat zwar nicht an Bemühungen gefehlt, auf die Resultate der bisherigen Versuche eine Theorie der Ausflusserscheinungen zu begründen, oder wenigstens eine Erklärung derselben zu geben, zu welchem Zweck namentlich Bidone die ausführlichsten Untersuchungen angestellt hat, doch haben diese Versuche entweder wegen der untergelegten Voraussetzungen oder wegen der geringen Uebereinstimmung mit der Erfahrung wenig allgemeine Anerkennung finden können.

Newton **) bestimmte zuerst das Verhältniss der Querschnitte des zusammengezogenen Strahles und der kreisförmigen Oeffnung $=\sqrt{\frac{1}{2}}=0{,}707$, woraus sich der Durchmesser des zusammengezogenen Strahles $=0{,}841$ ergiebt, wenn der der Mündung $=1$ gesetzt wird. Die Messungen haben aber alle eine grössere Contraction oder einen kleineren Querschnitt des zusammengezogenen Strahles herausgestellt.

Navier ***) giebt folgende Ausdrücke für den Ausflusscoefficienten

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(1-\frac{a}{A}\right)^2}}$$

wobei vorausgesetzt wird, dass die Oberfläche des Wasserspiegels sehr gross, die Bodenfläche des Gefässes $=A$, die der Mündung $=a$ und die Geschwindigkeit des an der Mündung ankommenden Wassers $=\frac{a}{A}v$ ist, welche in der Mündung sofort in v übergehen soll. Der somit entstandene Verlust an Druckhöhe kann durch

$$\frac{\left(v-\frac{a}{A}v\right)^2}{2g}=\left(1-\frac{a}{A}\right)^2\frac{v^2}{2g}$$

ausgedrückt werden. Dieser nebst der Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ muss die ganze Druckhöhe geben, wodurch man

---

*) Wir verweisen hierbei auf den von Jul. Weisbach bearbeiteten Artikel „Ausfluss" der allgemeinen Maschinenencyclopädie von Hülsse, I. Bd. S. 464 ff., der eine grossentheils kritische Zusammenstellung aller wichtigeren Versuche und deren Resultate enthält, sowie auf die eigenen Untersuchungen desselben Verfassers: „Untersuchungen in der Mechanik und Hydraulik, Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers etc. Leipzig. 1843." und auf dessen „Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. I. Th."

**) *Philos. nat. princ. math. Lib. II.* 36.

***) *Résumé des leçons sur l'application de la mécanique. Paris.* 1844. *T. II.*

$$h=\left[\left(1-\frac{a}{A}\right)^2+1\right]\frac{v^2}{2g}$$

und

$$v=\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\left(1-\frac{a}{A}\right)^2}}$$

erhält. Die Ausflussmenge, als das Product des Querschnittes der Mündung und dieser Geschwindigkeit betrachtet, ist dann

$$m=\frac{a\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\left(1-\frac{a}{A}\right)^2}},$$

woraus der obige Ausflusscoefficient folgt. Man kann hierbei die angegebene Geschwindigkeit v nicht als die wirkliche des Strahles ansehen, denn diese ist nach den Beobachtungen viel weniger von der theoretischen verschieden. Es ist der obige Ausdruck für v nur dann für zulässig zu halten, wenn man diese Geschwindigkeit für eine hypothetische, für die Voraussetzung giltige betrachtet, dass das Wasser aus der Mündung in einem prismatischen Strahle ausfliesst. Nimmt man aber diese Geschwindigkeit für die des Strahles an, so hat die Formel eine entschieden falsche Bedeutung; das in ihr enthaltene richtige Element, insofern sie zu einem einigermassen richtigen Ausflusscoefficienten führt, muss demnach unter anderen, wenigstens dem Ausdrucke und der Bedeutung nach modificirten Voraussetzungen entwickelt werden. Bemerkt sei noch, dass wenn man a hinlänglich klein gegen A setzt, man den Ausflusscoefficienten Newton's $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und für die Geschwindigkeit v den Ausdruck $\sqrt{gh}$ erhält, welcher mit der von demselben Mathematiker zuerst gemachten Annahme übereinstimmt, dass die Geschwindigkeit gleich der eines von der halben Druckhöhe frei herabfallenden Körpers sei.

Eine zweite Formel für den Ausflusscoefficienten wird dadurch abgeleitet, dass die kreisförmige Mündung in gleiche concentrische Ringe zerlegt gedacht wird. Für jeden Ring wird die hindurchgehende Menge Wasser mit Berücksichtigung des Winkels, welchen dieselbe mit der Axenrichtung der Mündung bildet, bestimmt und die Summe dieser einzelnen Wassermengen wird dann mit der theoretischen Ausflussmenge verglichen. Es ergiebt sich nach diesem ein Ausflusscoefficient

$$=\frac{2}{\pi}=0{,}637,$$

welcher Werth mit der Erfahrung im Allgemeinen übereinstimmt. Poncelet legt auf diese Formel mehr als auf die übrigen Werth in seinen *Expériences hydrauliques*. In voriger Formel ist die Menge des Wassers in den einzelnen zur Axe peripherischen Schichten gleich gross angenommen, bei dieser dagegen die Geschwindigkeit. Beide Annahmen stimmen aber mit den Ausflusserscheinungen nicht überein und insofern sind beide Formeln mangelhaft in den Voraussetzungen; ausserdem fehlt bei ihnen jede Berücksichtigung der Druckhöhe und der Gestalt der Mündungen.

Buff*) geht bei der Bestimmung eines Ausflusscoefficienten von der Ansicht aus, dass das Wasser nach dem Umfange zu mit abnehmender

*) *Poggend. Annal. B. XLVI.*

Geschwindigkeit und in parallelen Strahlen ausströme. Er theilt dabei den Wasserstrahl in einen inneren Kernstrahl mit dem halben Querschnitt $\frac{a}{2} = \frac{r^2\pi}{2}$ der Mündung und der theoretischen Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ und in einen äusseren, den Kern umgebenden Strahl, dessen Geschwindigkeit nach dem Umfange bis zu 0 abnimmt. Die ausfliessende Wassermenge lässt sich somit in der Form eines abgekürzten Kegels denken, dessen beide Oberflächen $r^2\pi$ und $\frac{r^2\pi}{2}$ sind, dessen Höhe $\sqrt{2gh}$ und dessen Volumen demnach

$$r^2\pi\,\frac{(1+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}})}{3}\sqrt{2gh} = 0{,}735\, r^2\pi\sqrt{2gh}$$

ist. Hieraus ergiebt sich der Ausflusscoefficient $= 0{,}735$, der allen Erfahrungen zufolge viel zu gross ist.

Bidone betrachtet den Ausflusscoefficienten als ein Product des Geschwindigkeits- und Contractionscoefficienten. Mit Zugrundelegung dieses zweifelhaften Satzes sucht er letzteren Coefficienten direct zu bestimmen *) und findet ihn $= \frac{2}{3}$ bei einer kreisförmigen Mündung in einer dünnen Wand. Aus dem Ausflusscoefficienten 0,62 ergiebt sich dann der Geschwindigkeitscoefficient $= 0{,}62 \,.\, \frac{3}{2} = 0{,}93$.

In neuester Zeit hat Dejean der Academie der Wissenschaften zu Paris ein Memoire überreicht, in welchem nach einer neuen Theorie die Berechnung der Ausflussmenge für jede beliebige Oeffnung und Druckhöhe gegeben wird. Ein Auszug **) davon enthält Folgendes. Der Verfasser betrachtet die Flüssigkeiten aus kleinen festen Kügelchen (Bläschen) zusammengesetzt, welche einander durchdringen, ein sehr kleines Volumen, doch ein beträchtlich grösseres als ein Molecule haben. Der grössere oder geringere Durchmesser dieser Kügelchen ist je nach dem Flüssigkeitsgrade durch die Bedingung gegeben, dass die übrige Masse ohne Reibung auf deren Oberfläche hingleiten kann. Eine Flüssigkeitssäule von demselben Durchmesser soll wie ein fester Körper unempfänglich für die Wirkung der Seitenpressungen sein und ohne Reibung an der umgebenden Masse hingleiten können. Demgemäss soll dann im Momente, wo der Ausfluss beginnt, die Flüssigkeitsmasse sich in Fäden von der Dicke dieser Kügelchen zertheilen, welche dann an der Mündung unter gleichen Neigungen zu einander ankommen. Unter der Voraussetzung zuvörderst, dass diese Fäden ausserhalb des Gefässes dem Einflusse der Schwere noch entzogen und so weit unabhängig von einander sind, dass sie nur ihre Klebrigkeit (*ténacité*) behalten, berechnet der Verfasser die Ausflussgeschwindigkeit und findet dieselbe für alle Fäden gleich der eines von der halben Druckhöhe frei fallenden Körpers. Indem er hierauf für den Strahl wieder den vollkommenen Flüssigkeitszustand annimmt, dabei aber immer noch von der Wirkung der Schwere absieht, zeigt er, dass die Ablenkung der Fäden in der Nähe der Mündung, zu der sie normal ankommen, in jedem derselben eine elastische Kraft entwickelt, deren Intensität direct proportional zur Neigung der Fäden gegen die Axe der Mündung ist. Die elastische Kraft strebt einerseits, die Flüssigkeit, bevor sie durch die Mündung geht, in das In-

*) *Memoire sur la Determination théorique de la section contractée des veines liquides* im 34. Bande der Memoiren der Turiner Academie.

**) *Comptes Rendus des séances de l'Acad. Tom. XL.* 1855. *pag.* 467.

nere des Gefässes zurückzudrängen, andererseits derselben, nach dem Durchgange durch die Mündung, einen Zuwachs an Geschwindigkeit zu geben. Es wird somit die Flüssigkeit jedes Fädens mit zweierlei Geschwindigkeiten getrieben, von denen die eine v, die innere, den Ausfluss regelt, die andere, äussere, v' durch ihr Verhältniss zur inneren die Contraction des Strahles bestimmt.

Der Verfasser giebt für jeden Faden diese beiderlei Geschwindigkeiten zuerst unter der Annahme, dass die Trennung der inneren und äusseren Flüssigkeit ohne Widerstand vor sich gehen könne, sodann mit Berücksichtigung des Zusammenhanges der Molecüle. Er bestimmt hierauf den vollen Ausfluss, d. h. er berechnet die innere mittlere Geschwindigkeit der verschiedenen Fäden, welche er genau gleich der eines von dem dritten Theile der Druckhöhe herabfallenden Körpers findet; ebenso sucht er die mittlere äussere Geschwindigkeit, die er gleich der eines von $\frac{2}{3}$ der Druckhöhe frei herabfallenden Körpers erhält. Daraus ergiebt sich das Verhältniss beider Geschwindigkeiten zu $\frac{2}{3}$, welches demnach auch der Contractionscoefficient ist (wie ihn auch Bidone gefunden hat).

Unter Berücksichtigung des Einflusses der Schwere modificirt er die Formel für den Ausfluss dergestalt, dass er diese Wirkung zum Theil durch Zug auf die innere Flüssigkeit sich fortpflanzen lässt. Ist H die Druckhöhe, h die vertikale Länge des (zusammenhängenden) Strahles, so soll der Ausflusscoefficient sich mit dem Verhältniss $\frac{h}{H}$ vermehren oder vermindern.

Diese Formel wird noch durch ein Glied vervollständigt, das einen Zuwachs an Ausflussmenge giebt, welcher von dem Widerstande herrührt, der gegen jede durch die Geschwindigkeitszunahme $V' - V$ hervorgerufene Erweiterung des Strahles gerichtet ist. Dieser Widerstand (bedeutend in der Nähe der Mündung infolge einer Ungleichheit der Geschwindigkeiten, welche den Strahl in einen ganz eigenthümlichen Zustand versetzt) soll dem Durchmesser der Mündung umgekehrt proportional sein, d. h. der Strahl soll sich mit um so grösserer Leichtigkeit zusammenziehen, je beträchtlicher dieser Durchmesser ist. Daraus folge, dass bei einer quadratischen oder rectangulären Mündung der Strahl sich längs der Diagonale viel leichter zusammenziehe, woraus die bekannten Wendungen des Strahles oder der Blätter (*renversement des nappes*) hervorgehen.

Der Verfasser vergleicht die Ergebnisse seiner Formel mit denen, welche Poncelet und Lesbros aus ihren Versuchen erhalten haben, und findet sie mit denselben bis auf zwei oder drei Tausendtheile übereinstimmend bei beliebigen Oeffnungen und für einen Druck gegen $0{,}5^m$, dagegen vollkommen genau für einen Druck von 1^m und darüber. (??) Mit Berücksichtigung der inneren und äusseren Geschwindigkeiten und des Widerstandes der Luft entwickelt sodann der Verfasser den Zuwachs an Ausfluss durch Ansatzröhren und macht seine Formel anwendbar für den Ausfluss aus cylindrischen Ansatzröhren. Zuletzt geht er auf die Pulsationen ein, welche F. Savart in seiner Abhandlung über den Strahl beschrieben hat; eine Erscheinung, die nach ihm durch die Zerlegung der Flüssigkeiten in Fäden hervorgerufen wird, welche wegen ihrer Biegsamkeit sehr empfänglich für die an der Mündung entwickelten Druckveränderungen sind, während ihre eigene Geschwindigkeit viel weniger rasch durch die Druckveränderungen berührt wird, die sich an der Oberfläche der Flüssigkeit her

ausstellen. Er misst die Entstehung dieser Pulsationen der Wirkung entgegengesetzter Kräfte bei, denen die Flüssigkeit beim Durchgange durch die Mündung unterworfen ist und giebt die Gesetze derselben so, wie die Erfahrung sie kennen lehrt, nämlich, dass die Zahl derselben unabhängig von der Natur der Flüssigkeit, dem Durchmesser der Oeffnung umgekehrt, der Quadratwurzel der Druckhöhe direct proportional ist.

Er erklärt noch die Bildung der ringförmigen Anschwellungen, welche sich längs des durchsichtigen Theiles am Strahle fortpflanzen, und zeigt, wie dieser Theil durch ein in der Nähe der Mündung tongebendes Instrument bis auf zwei Drittel der ursprünglichen Länge verkürzt werden kann.

Man wird erst nach einer Veröffentlichung der vollständigen Abhandlung den Werth und die Richtigkeit der aufgestellten Gesetze über den Ausfluss beurtheilen und sehen können, ob die dem Calcul untergelegten Voraussetzungen nur Rechnungshypothesen sind, welche durch die Richtigkeit des Endresultates sich rechtfertigen müssen, oder ob der Verfasser zu deren Annahme noch durch anderweitige Beobachtungen und Versuche veranlasst worden ist. Eine Vergleichung dieser Resultate theoretischer Betrachtungen mit einigen Ergebnissen der von Magnus angestellten neueren Versuche kann indess schon jetzt zur Beurtheilung der ersteren führen.

Magnus hat bereits im Jahre 1850 Mehreres über die Bewegung einer Flüssigkeit in einer anderen gleichartigen veröffentlicht, namentlich über schon früher von Venturi u. A. beobachtete Erscheinungen, welche beim Einströmen einer Flüssigkeit in eine grössere ruhende Masse derselben Art entstehen, über das Eindringen von Luft beim Einfluss eines Strahles in eine grössere Flüssigkeitsmasse, sowie über den Vorgang beim sogenannten Wassertrommelgebläse*).

Die im 95. Bande der Poggend. Annal. und in den Monatsberichten der Preussischen Academie der Wissenschaften vom 14. December 1854 und 1. März 1855 bekannt gemachten Untersuchungen über den flüssigen Strahl gehen weniger auf Bestimmung numerischer Verhältnisse, als vielmehr auf die Ermittelung der physikalischen Bedingungen und Entstehungsursachen der Contraction und der verschiedenen Formen des Strahles hinaus, schliessen sich also den oben Seite 33 kurz erwähnten Bidone'schen Untersuchungen, sowie denen von Felix Savart an**).

Magnus geht bei Erforschung der Form eines Wasserstrahles planmässiger, wie es scheint, als seine Vorgänger zu Werke, indem er erst die Einwirkung zweier kreisförmigen Strahlen aufeinander untersucht, um so eine Ansicht über den gegenseitigen Einfluss der in einem zusammengesetzteren Strahle vereinigten Wasserfäden zu gewinnen. Schon aus den Untersuchungen Savart's ist bekannt, dass, wenn zwei Strahlen von gleichem Durchmesser und gleicher Geschwindigkeit gegen einander so gerichtet werden, dass ihre Achsen in eine Linie zu liegen kommen, das Wasser eine auf der gemeinschaftlichen Achse der Strahlen senkrechte kreisförmige Scheibe bildet. Wenn die Strahlenachsen nicht mehr in eine Linie fallen, aber parallele Richtung gegen einander haben, so bilden nach Magnus die sich treffenden Strahlen eine etwas gekrümmte, gegen die Strahlen geneigte Wasserfläche von mehr ovaler Begrenzung, so dass die grös-

*) *Poggend. Annal.* Bd. *LXXX.* S. 1.

**) *Annal. de chim. et de phys. II. Ser. Tom. LIII et LV.* Vergl. *Pouillet, élémens de phys. expér.* 6. *edit. Tom. I. pag.* 149.

sere Dimension in der durch die Achsen beider Strahlen gelegten Ebene enthalten ist.

Bilden die Strahlen einen Winkel mit einander und liegen die Achsen beider Strahlen in einer Ebene (Magnus nennt das Zusammentreffen bei dieser Lage der Achsen ein centrales); so entsteht eine auf der Ebene der Achsen senkrechte, ebene Wasserfläche, welche, wenn die Strahlen aus gleichen Oeffnungen mit gleicher Geschwindigkeit kommen, den Winkel der Strahlen halbirt. Diese Fläche ist, von dem Punkte des Zusammentreffens der Strahlen aus gerechnet, mehr nach der mittleren Richtung beider Strahlen ausgedehnt, dagegen um so weniger nach der Seite hin, welche innerhalb des von den Strahlen gebildeten hohlen Winkels liegt, je spitzer dieser Winkel ist. Ebenso nimmt die darauf senkrechte Dimension oder die Breite der Fläche mit der Grösse dieses Winkels und mit der Geschwindigkeit der Strahlen ab.

Treffen die unter einem Winkel zu einander gerichteten Strahlen nicht central, sondern berühren sie sich nur an ihren Rändern, so werden beide Strahlen in ihrer Richtung etwas abgelenkt und nähern sich einander, wenn der Winkel nicht grösser als 60°—70° ist; zwischen beiden Strahlen spannt sich dabei vom Punkte des Zusammentreffens an eine dünne Wasserfläche aus, welche je nach Umständen sich mehr oder weniger fortsetzt und dann zerreisst. Sie zerreisst aber nicht mehr, wenn unter übrigens gleichen Umständen die Achsen der Strahlen einander genähert werden, oder ein grösserer Theil der Wasserstrahlen auf einander treffen. Nach ihrem Zusammentreffen nähern sich dann die Strahlen viel mehr, kommen zum zweiten Male zusammen und gehen übereinander hinweg, so dass der Strahl, welcher vor dem ersten Zusammentreffen der obere und nach demselben der untere ist, nach dem zweiten Zusammentreffen wieder der obere wird. Magnus hat unter Beachtung einiger, den Apparat betreffender Vorkehrungen bei Winkeln unter 30°, sowie bei mässiger Geschwindigkeit ein viermaliges Uebereinandergehen der Strahlen und drei zwischen denselben ausgespannte dünne Wasserflächen oder Membranen hervorgebracht. Letztere bilden etwas gekrümmte Flächen, deren mittlere Stellung ziemlich parallel den Achsen beider Strahlen ist, wenn letztere sich nur an ihren äusseren Ränden treffen. Rücken dagegen die Achsen näher aneinander, so nimmt auch die mittlere Stellung der ersten Wasserfläche eine grösse Neigung gegen die beiden Strahlen parallele Ebene an, und die zweite Membrane bildet mit der ersten nahe denselben Winkel, so dass, wenn die Achsen der Strahlen in eine Ebene kommen oder ein centrales Zusammentreffen stattfindet, dieser Winkel am grössten wird, oder die erste Wasserfläche senkrecht auf der Ebene der Achsen steht, die zweite aber wieder in dieser Ebene liegt. Beide Strahlen bringen dann die durch Fig. 19 angedeutete Erscheinung hervor.

Von diesen in systematischer Reihenfolge hervorgerufenen Erscheinungen giebt Magnus folgende einfache Erklärung. Jeden der beiden gleichen Strahlen kann man als eine Aufeinanderfolge von gleichen Wassertheilchen betrachten, die, wenn sie gegen einander und central gerichtet sind, vermöge ihrer leichten Beweglichkeit und in Folge des allseitigen und gleichmässigen Drucks der darauf folgenden Theile von dem Orte des Zusammentreffens aus eine gegen die Richtung der Strahlen symmetrische Seitenbewegung annehmen, also mit gleicher Geschwindigkeit in Linien senkrecht zur gemeinschaftlichen Achse ausweichen. Die Cohäsion bewirkt, dass diese Linien sich zu einer einzigen kreisrunden Wasserfläche vereinigen, welche

Die noch willkührliche ganze Zahl k werde nun $\geqq \frac{1}{\alpha - \beta}$ gewählt, es ist dann $k(\alpha - \beta) \geqq 1$ mithin

$$\frac{\beta + m}{\alpha + m} < \sqrt[k]{\frac{\beta + m}{\beta + m + 1}};$$

dies giebt für $m = 0, 1, 2 \ldots n - 1$ und durch Multiplication aller entstehenden Beziehungen

$$\frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\ldots(\alpha + n - 1)} < \sqrt[k]{\frac{\beta}{\beta + n}}.$$

Hieraus folgt unmittelbar der zu beweisende Satz, von welchem bei Untersuchungen über die Convergenz und über die Reste der Reihen nicht selten Gebrauch gemacht wird. Das Nächste giebt hierzu ein Beispiel.

II. Restbetrachtung für die Arcussinus-Reihe.

In den Lehrbüchern der Differentialrechnung findet man gewöhnlich die Discussion der Reihenreste für $(1+x)^\mu$, $\log x$, a^x, $\cos x$, $\sin x$, $Arc \tan x$ nicht aber für $Arc \sin x$ wahrscheinlich wegen des etwas complicirten Ausdruckes, den der n^{te} Differentialquotient von $Arc \sin x$ liefert. Auf folgende Weise wird die Sache sehr einfach.

Man hat zunächst

$$D^{n+1} Arc \sin x = D^n \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = D^n \left[(1 + x)^{-\frac{1}{2}}(1 - x)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

und mittelst der bekannten Regel für die mehrmalige Differentiation der Producte

$$D^{n+1} Arc \sin x$$
$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n \sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(1-x)^n} \left\{1 - \frac{1(n)_1}{2n-1}\frac{1-x}{1+x} + \frac{1.3(n)_2}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \right.$$
$$\left. - \frac{1.3.5(n)_3}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \ldots\right\},$$

wobei $(n)_1$, $(n)_2$ etc. die Binomialcoefficienten n, $\frac{1}{2}n(n-1)$ etc. bedeuten. Hinsichtlich der Coefficienten

$$1, \frac{1(n)_1}{2n-1}, \frac{1.3(n)_2}{(2n-1)(2n-3)}, \frac{1.3.5(n)_3}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \ldots$$

welche unter der allgemeinen Form

$$\frac{1.3.5\ldots(2\varkappa-1)(n)_\varkappa}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-[2\varkappa-1])} = C_\varkappa$$

enthalten sind, ist nun Folgendes zu bemerken. So lange $\varkappa < \frac{1}{2}(n-1)$ oder $n > 2\varkappa + 1$ bleibt, hat man

$$n - \varkappa > \varkappa + 1, \quad \frac{1}{n - \varkappa} < \frac{1}{\varkappa + 1}$$

$$2 - \frac{1}{n - \varkappa} > 2 - \frac{1}{\varkappa + 1},$$

$$1 > \frac{2 - \frac{1}{\varkappa + 1}}{2 - \frac{1}{n - \varkappa}}$$

d. h. nach gehöriger Reduction

$$1 > \frac{2\varkappa + 1}{2n - [2\varkappa + 1]} \frac{n - \varkappa}{\varkappa + 1}$$

und daraus folgt durch beiderseitige Multiplication mit $C_\varkappa$

$$C_\varkappa > C_{\varkappa+1}.$$

Wird später $\varkappa > \frac{1}{2}(n-1)$, so kehren sich alle diese Verhältnisse um, d. h. zusammen: anfangs nehmen die Coefficienten ab und gegen das Ende hin wieder zu. Ferner bemerkt man leicht, dass die von Anfang und Ende gleich weit entfernten Coefffcienten $C_\varkappa$ und $C_{n-\varkappa}$ gleich sind, dass mithin das Wachsthum der Coefficienten nicht über $C_n = C_0 = 1$ hinausgeht. Da hiernach keiner der Coefficienten die Einheit überschreitet, so beträgt die Summe der endlichen Reihe

$$1 - \frac{1(n)_1}{2n-1} \frac{1-x}{1+x} + \frac{1 \cdot 3 (n)_2}{(2n-1)(2n-3)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \ldots$$

in welcher wir x als positiv voraussetzen, ihrem absoluten Werthe nach weniger als die Summe der unendlichen convergirenden Reihe

$$1 + \frac{1-x}{1+x} + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \ldots = \frac{1+x}{2x},$$

folglich ist, wenn ε einen nicht näher bestimmbaren ächten Bruch bezeichnet

$$D^{n+1} \, Arc \sin x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n \sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(1-x)^n} \frac{\varepsilon}{2} \frac{1+x}{x}.$$

Nehmen wir jetzt den Mac Laurin'schen Satz:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n + R_{n+1},$$

$$R_{n+1} = \frac{(1-\vartheta)^n x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n+1)}(\vartheta x), \quad 1 > \vartheta > 0$$

für $f(x) = Arc \sin x$ in Anspruch, so erhalten wir

$$R_{n+1} = \tfrac{1}{2}\varepsilon \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \left(\frac{(1-\vartheta)x}{1-\vartheta x}\right)^n \frac{1}{\vartheta} \sqrt{\frac{1+\vartheta x}{1-\vartheta x}};$$

bei unendlich wachsenden n wird hier (nach Nr. I. für $\alpha = 1$ und $\beta = \frac{1}{2}$)

$$Lim \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} = 0;$$

die übrigen Factoren bleiben endliche Grössen so lange x die Einheit nicht überschreitet, und so ergiebt sich $Lim \, R_{n+1} = 0$ unter der Bedingung, $1 \geqq x \geqq 0$, welche sich leicht auf $1 \geqq x \geqq -1$ ausdehnen lässt.

O. Schlömilch.

III. Lehrsätze der analytischen Geometrie.

Herr Prof. Dr. Junge an der K. S. Bergakademie zu Freiberg hat mir folgende Sätze mitgetheilt, deren Beweis als zweckmässige Uebung in der analytischen Geometrie der Ebene dienen kann:

Wenn die Grundlinie eines Dreiecks unveränderlich gelassen und die Spitze desselben auf irgend einer festen Geraden fortgeführt wird, so beschreibt der Durchschnitt der drei Höhen des Dreiecks im Allgemeinen eine Hyperbel; umgekehrt, wenn die Leitlinie der Dreieckspitze eine Hyperbel ist, so wird der geometrische Ort des Höhendurchschnittes zu einer Geraden.

Die Hyperbel degenerirt in eine Parabel, wenn die Leitlinie parallel zur Basis liegt, und in eine Gerade, wenn die Leitlinie entweder auf der Basis senkrecht steht oder mit einer der Dreiecksseiten zusammenfällt.

Heisst AB die Grundlinie des veränderlichen Dreiecks ABC und D der Durchschnitt der Directrix mit der Basis, so ist die in D auf AB errichtete Senkrechte die eine Asymptote der Hyperbel; die andere Asymptote erhält man dadurch, dass man vom Mittelpunkte M der Basis aus den Abschnitt ME entgegengesetzt $= MD$ nimmt und von E eine Senkrechte auf die Directrix herablässt.

In dem speciellen Falle, wo die Leitlinie parallel zur Basis liegt, kann man über letzterer ein gleichschenkliges Dreiek construiren, dessen Spitze auf die Directrix fällt; der Höhendurchschnitt dieses Dreiecks ist der Scheitel und der Abstand der Directrix von der Basis der doppelte Parameter jener Parabel.

Die obige Mittheilung veranlasste mich zu einer flüchtigen Untersuchung der Geraden, welche den Höhendurchschnitt, den Schwerpunkt und den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises verbindet; bei jener Bewegung der Dreieckspitze berührt nämlich die genannte Gerade im Allgemeinen eine Curve, die aber meistens einem höheren Grade anzugehören scheint. Nur in einem Falle gestaltet sich die Sache sehr einfach, nämlich:

Wenn die Spitze des veränderlichen Dreiecks eine auf der Basis senkrechte stehende Gerade durchläuft, so bleibt die erwähnte Transversale des Dreiecks Tangente an einem festen Kegelschnitte; dieser ist eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem die Leitlinie die Basis oder deren Verlängerung schneidet. In Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfang im Mittelpunkte M der Basis liegt und dessen x-Achse die Grundlinie ist, erhält man als Gleichung des berührten Kegelschnittes:

$$\frac{(x-\frac{2}{3}a)^2}{(\frac{1}{3}a)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}(c^2-a^2)} = 1,$$

worin c die halbe Basis MA und a den Abstand der Directrix vom Coordinatenanfange bezeichnet.

Man kann diesen Satz ebensowohl seiner Fassung entsprechend beweisen, als aus der Theorie der eingehüllten Curven herleiten.

SCHLÖMILCH.

IV. Die gleichgespannte Kettenbrückenlinie *).

Bekanntlich wächst die in der Tragkette einer Hängebrücke vorhandene Spannung vom Scheitel nach den Aufhängepunkten zu und es ist daher bei einer überall gleich starken Kette die auf die Flächeneinheit fallende Spannung (die ganze Spannung an einer Stelle dividirt durch den Querschnitt) in demselben Maasse veränderlich. Diese Ungleichheit jener Spannung hat eine ungleiche Sicherheit des ganzen Bauwerks zur Folge, denn sobald an den Aufhängepunkten schon die nöthige Sicherheit vorhanden ist, findet im Scheitel eine noch grössere Sicherheit statt, die nicht nur überflüssig, sondern sogar schädlich ist, weil das eigene Gewicht der Tragkette geringer ausgefallen wäre, wenn man ihren Querschnitt im Scheitel kleiner und zwar gerade nur so gross genommen hätte, als zur Erreichung derselben Sicherheit wie an den Aufhängepunkten nöthig sein würde. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, muss man der Kette einen veränderlichen Querschnitt geben, der vom Scheitel nach den Aufhängepunkten hin in der Weise zunimmt, dass das Verhältniss der Spannung in jedem Kettenelemente zu dessen Querschnitte constant ist. Eine kurze Notiz über die Gleichung einer solchen gleichgespannten oder gleichsicheren Kettenbrückenlinie giebt Coriolis in Liouville's Journal, Bd. I., S. 75, ohne jedoch die Frage zu erörtern, wie bei gegebener Spannweite, Pfeil, Sicherheit etc. das wichtigste Element, nämlich der Querschnitt in jedem Punkte, bestimmt werden könne; mit der letzteren Aufgabe hat sich Prof. Kulik mehrfach beschäftigt (u. A. in seinen Anfangsgründen der höheren Mechanik, Cap. VIII.), ist aber zufolge einer nicht glücklichen Anlage des Calcüls in eine umständliche Näherungsrechnung gerathen, welche sich vollständig vermeiden lässt. Dies ist der Grund, warum wir jene in theoretischer Beziehung ebenso interessante als practisch wichtige Frage wieder vornehmen.

Zwei in einer horizontalen Geraden liegende Punkte A und B denke man sich durch eine Kette verbunden, deren tiefster Punkt C von A und B gleichweit entfernt sein möge. Den Scheitel C nehmen wir zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystemes und legen die Abscissenachse horizontal mit der positiven Seite nach A hin, die Ordinatenachse vertikal mit der positiven Seite nach oben, so dass die Curve convex gegen die Abscissenachse ist. Ferner sei

x die Abscisse eines Curvenpunktes P,
y die Ordinate „ „ P,
s der von C bis P reichende Bogen,
τ der spitze Winkel zwischen der Tangente an P und der positiven Seite der x-Achse,

---

*) Aus dem Osterprogramm von 1855 der K. polytechnisch. Schule zu Dresden.

q der Querschnitt der Kette im Punkte P,
T die an dieser Stelle auf q wirkende Spannung,
γ das Gewicht der Volumeneinheit des Kettenmaterials,
G das Gewicht der Längeneinheit der Brückenbahn sammt deren Maximalbelastung mit Einschluss des auf die Längeneinheit reducirten Gewichtes der Tragstangen.

Lassen wir den Bogen s um sein Differential $PP_1 = ds$ zunehmen, so wachsen x, y, τ, T um ihre Differentiale und es entsteht ein Kettenelement, auf welches vier Kräfte wirken, nämlich die in tangentialen Richtungen an P und P_1 angreifenden Spannungen T und $T + dT$, ferner das eigene Gewicht des Kettenelementes, endlich das Gewicht von demjenigen Theile der Fahrbahn, welchen jenes Kettenelement tragen muss. Hinsichtlich jener Spannungen ist zu bemerken, dass sie in entgegengesetztem Sinne wirken, dass folglich T mit der Abscissenachse den Winkel $\tau + 180^\circ$, und $T + dT$ mit derselben Achse den Winkel $\tau + d\tau$ einschliesst; zerlegt man jede dieser Kräfte in zwei den Coordinatenachsen parallele Componenten, so sind die Seitenkräfte von T

$$T \cos(180^\circ + \tau) = -T \cos\tau \quad \text{und} \quad T \sin(180^\circ + \tau) = -T \sin\tau,$$

dagegen die von $T + dT$

$$(T + dT) \cos(\tau + d\tau) \quad \text{und} \quad (T + dT) \sin(\tau + d\tau).$$

Ferner ist $q\,ds$ das Volumen des Kettenelementes PP_1, mithin $\gamma q\,ds$ sein Gewicht, endlich hat das von dem Kettenelemente getragene Stück der Fahrbahn die Horizontalprojection von ds, nämlich dx zur Länge, mithin $G\,dx$ zum Gewicht; letztere zwei Kräfte wirken vertikal abwärts und sind daher negativ. Zum Gleichgewichte des Kettenelementes wird nun erfordert, dass die Summe sowohl der horizontalen als der vertikalen Kräfte für sich Null sei, und wir haben demgemäss die Bedingungsgleichungen:

$$(T + dT) \cos(\tau + d\tau) - T \cos\tau = 0,$$
$$(T + dT) \sin(\tau + d\tau) - T \sin\tau - \gamma q\,ds - G\,dx = 0,$$

oder in compendiöserer Form

$$1) \qquad d(T \cos\tau) = 0, \quad d(T \sin\tau) = \gamma q\,ds + G\,dx.$$

Die erste Gleichung liefert durch Integration

$$T \cos\tau = Constans,$$

und hier ergiebt sich die Bedeutung von Constans durch die Specialisirung $x = 0$, wobei τ zu Null und T gleich der im Scheitel C vorhandenen Spannung wird; bezeichnen wir letztere mit T_0, so ist

$$2) \qquad T \cos\tau = T_0 \quad \text{oder} \quad T = T_0 \sec\tau.$$

Vermöge des bekannten Werthes von $\sec\tau$ können wir statt dieser Gleichung

$$3) \qquad T = T_0 \frac{ds}{dx} = T_0\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

setzen und erhalten durch Substitution dieses Ausdruckes in die zweite Gleichung von Nr. 2)

$$T_0\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \gamma q\,ds + G\,dx,$$

oder, wenn wir $\frac{dy}{dx}$ wie gewöhnlich mit y' bezeichnen und ds durch dx und y' ausdrücken

$$T_0\, dy' = (\gamma q \sqrt{1 + y'^2} + G)\, dx.$$

Nach Sonderung der Variabelen giebt die Integration

$$4)\qquad T_0 \int \frac{dy'}{G+\gamma q \sqrt{1+y'^2}} = x + Const.,$$

wobei auf der linken Seite die Fälle eines constanten und eines variabelen q unterschieden werden müssen.

Für ein constantes q hat zwar die Ausführung der angedeuteten auf y' bezüglichen Integration keine Schwierigkeit, gleichwohl ist aber mit dem Resultate nicht viel anzufangen. Die gefundene Gleichung zwischen y' und x, welche im Allgemeinen die Form $f(y') = x$ besitzt, muss nämlich auf y' reducirt werden, in der neuen unter der Form $y' = \varphi(x)$ enthaltenen Form wäre dann für y' sein Werth $\frac{dy}{dx}$ zu setzen und durch nochmalige Integration nach dem Schema

$$y = \int \varphi(x)\, dx = \psi(x) + Const.$$

die endliche Gleichung der Kettenbrückenlinie abzuleiten. Von diesen Operationen ist schon die erste (die Reduction auf y') unausführbar, weil das auf y' bezügliche Integral Potenzen und Logarithmen von y' gleichzeitig enthält, wodurch die aufzulösende Gleichung eine transcentende Form erhält; hierin liegt der Grund, warum man sich mit Näherungen begnügen muss, indem man $\sqrt{1+y'^2}$ entweder schlechthin $=1$, oder etwas genauer $= 1 + \frac{1}{2}y'^2$ sétzt.

Die angedeuteten Schwierigkeiten verschwinden gänzlich bei der Voraussetzung, dass die auf die Flächeneinheit des Querschnittes fallende Spannung $\frac{T}{q}$ überall dieselbe mithin $= \frac{T_0}{q_0}$ sei, wo q_0 den Scheitelquerschnitt der Kette bezeichnet; wir haben in diesem Falle.

$$5)\qquad q = \frac{q_0}{T_0} T = q_0 \sec \tau = q_0 \sqrt{1+y'^2},$$

und bekommen jetzt statt der Gleichung 4) die folgende

$$T_0 \int \frac{dy'}{G+\gamma q_0 (1+y'^2)} = x + Const.,$$

wobei die Integration wegen des rationalen Nenners sehr einfach wird. Unter der Bemerkung, dass x und $y' = \tan \tau$ gleichzeitig verschwinden, ergiebt sich

$$\frac{T_0}{\sqrt{(G+\gamma q_0)\gamma q_0}}\ Arctan\ \frac{y'\sqrt{\gamma q_0}}{\sqrt{G+\gamma q_0}} = x,$$

oder umgekehrt

$$6)\qquad y' = \sqrt{\frac{G+\gamma q_0}{\gamma q_0}}\ \tan \frac{x\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}{T_0}.$$

Durch Multiplication mit dx und nochmalige Integration gelangt man zur Gleichung der gleichgespannten Kettenbrückenlinie

$$7)\qquad y = \frac{T_0}{\gamma q_0}\ l \sec \frac{x\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}{T_0},$$

wobei keine Integrationsconstante beizufügen ist, weil für $x=0$ auch $y=0$ werden muss.

Sind nun die halbe Spannweite a und der Pfeil b gegeben, welche als rechtwinklige Coordinaten des Endpunktes A betrachtet werden können, so gilt erstens die Gleichung

$$b = \frac{T_0}{\gamma q_0}\, l\, sec \frac{a\sqrt{\gamma q_0 (G + \gamma q_0)}}{T_0};$$

setzen wir zweitens voraus, dass die Kette überall die n-fache Sicherheit darbiete, so muss die auf die Flächeneinheit des Kettenquerschnitts wirkende Spannung $\frac{T}{q} = \frac{T_0}{q_0}$ der n-te Theil der absoluten Festigkeit des Kettenmaterials sein; letztere sei F und $\frac{F}{n} = f$, wir haben dann die zweite Bedingung

$$\frac{T_0}{q_0} = f \text{ oder } T_0 = q_0 f.$$

Um aus den beiden vorhandenen Bedingungsgleichungen die Unbekannten q_0 und T_0 zu finden, substituiren wir den obigen Ausdruck für T_0 in die erste Gleichung und erhalten:

$$b = \frac{f}{\gamma}\, l\, sec \frac{a\sqrt{\gamma q_0 (G + \gamma q_0)}}{q_0 f};$$

hieraus ergiebt sich q_0, wenn man erst den Hilfswinkel Θ nach der Formel

$$8) \qquad l\, sec\, \Theta = \frac{b\gamma}{f}$$

berechnet und daraus q_0, sowie T_0 ableitet, nämlich

$$9) \qquad q_0 = \frac{\frac{G}{\gamma}}{\left(\frac{\Theta f}{\gamma a}\right)^2 - 1}, \quad T_0 = q_0 f.$$

Hat man q_0 und T_0 hiernach ermittelt, so kann man die in den Gleichungen 6) und 7) vorkommenden Constanten berechnen, indem man etwa setzt:

$$10) \qquad h = \frac{T_0}{\sqrt{\gamma q_0 (G + \gamma q_0)}}, \quad k = \sqrt{\frac{G + \gamma q_0}{\gamma q_0}} = \frac{f}{\gamma h};$$

die ganze Rechnung geht dann nach den Formeln

$$11) \qquad y = \frac{f}{\gamma}\, l\, sec \frac{x}{h}, \quad tan\, \tau = k\, tan \frac{x}{h}, \quad q = q_0\, sec\, \tau, \quad T = qf,$$

und ist äusserst einfach, wenn man Tafeln der natürlichen Logarithmen der trigonometrischen Functionen zur Hand hat (z. B. J. C. Schulze's Sammlung mathematischer Tafeln, Berlin, 1778. 2 Bde.).

Um endlich das Gewicht der Kette zu bestimmen, braucht man sich nur zu erinnern, dass $\gamma q ds$ das Gewicht eines Kettenelementes bedeutet dass mithin die von $x = 0$ bis $x = a$ genommene Summe aller Elementargewichte das Gewicht der halben Kette giebt. Nennen wir Γ das Gewicht der ganzen Kette, so ist hiernach

$$\Gamma = 2\int_{x=0}^{x=a} \gamma q ds = 2\gamma q_0 \int_{x=0}^{x=a} sec\, \tau\, ds$$

und durch Substitution der Werthe von $sec\, \tau = \sqrt{1 + tan^2 \tau} = \sqrt{1 + y'^2}$ und ds

$$\Gamma = 2\gamma q_0 \int_0^a \left(1 + k^2 \tan^2 \frac{x}{h}\right) dx = 2\gamma q_0 \left[a + k^2 \left(h \tan \frac{a}{h} - a\right)\right].$$

Diese Formel vereinfacht sich durch die Bemerkung, dass $\frac{a}{h}$ einerlei mit dem vorhin benutzten Hilfswinkel Θ, mithin $h = \frac{a}{\Theta}$ ist; man findet so

$$12)\qquad \Gamma = 2\gamma a q_0 \left[1 + k^2 \left(\frac{\tan \Theta}{\Theta} - 1\right)\right].$$

Beispielsweise sei $a = 210'$, $b = 30'$, $G = 20$ Ctnr., $n = 3$, $F = 144.500$ Ctnr., mithin $f = 48.500$ Ctnr. und $\gamma = 5$ Ctnr.; die Formel 8) giebt dann

$$l \sec \Theta = \frac{5.30}{48.500} = 0{,}00625, \quad \Theta = 6^0 24' = 0{,}1117,$$

ferner ist nach Nr. 9)

$$q_0 = \frac{4}{\left(\frac{48.500 \,.\, 0{,}01117}{5 \,.\, 210}\right)^2 - 1} = \frac{4}{5{,}5178} = 0{,}7249 \,\square',$$

oder nahe

$$q_0 = 100 \,\square'' \text{ und } T_0 = \frac{4}{5{,}5178} \,.\, 48.500 = 17438 \text{ Ctnr.}$$

Die Formeln 11) werden

$$y = 4800 \,.\, l \sec \frac{x}{1884{,}5}, \quad \tan \tau = 2{,}547 \,.\, \tan \frac{x}{1884{,}5},$$
$$q = 0{,}7249 \,.\, \sec \tau, \quad T = 24000 \,.\, q;$$

hiernach beträgt z. B. an den Aufhängepunkten der Tangentenwinkel $15^0 57'$, der Querschnitt $108{,}57 \,\square''$ und die Spannung 18095 Ctnr., für das Gewicht der ganzen Kette ergiebt sich 1563,7 Ctnr. Zur Vergleichung setzen wir die nach der gewöhnlichen parabolischen Theorie (d. h. für $q = Const.$ und $\sqrt{1 + y'^2} = 1$) berechneten Werthe daneben; sie sind

$$q = 0{,}7577 \,\square' = 109 \,\square'' \text{ circa},$$
$$T_0 = 17485 \text{ Ctnr.},$$
$$y = \frac{x^2}{1470}, \quad \tan \tau = \frac{x}{735},$$
$$T = 17485 \,.\, \sec \tau, \quad \Gamma = 1612{,}4 \text{ Ctnr.},$$

wonach die gleichgespannte Kettenbrückenlinie bei der nämlichen Sicherheit eine Materialersparniss von 48,7 Ctnr. gewährt.

In practischer Hinsicht bemerken wir noch, dass die wenigstens näherungsweise Ausführung einer Kette von wachsendem Querschnitte keine Schwierigkeit darbietet, weil die einzelnen Kettenglieder aus Schmiedeeisen hergestellt werden und eben desswegen jede beliebige Form erhalten können. Auch existirt bereits in London eine derartige Brücke (*Hungerford-bridge*), doch ist nichts über die ihr zu Grunde liegende Theorie bekannt geworden; wahrscheinlich haben auch die in der Praxis gewandten und kühnen, mit der Theorie aber meistens wenig vertrauten englischen Ingenieure überhaupt nach gar keinen Formeln construirt, sondern sich hier wie bei unzähligen anderen Gelegenheiten auf empirische Versuche und graphische Methoden verlassen. SCHLÖMILCH.

V. Einfacher Apparat zum Nachweis des Zusammenhanges der Tonhöhe mit der Schwingungsgeschwindigkeit.

In einer Abhandlung von Oppel (Poggend. Annal. Bd. 94. S. 564) bezüglich einer besonderen Entstehungsweise von Tönen (Reflexionstöne) wird gelegentlich von demselben Verfasser eine einfache Vorrichtung angegeben, welche statt der Savart'schen Zahnräder oder anderer mehr complicirter Apparate zur Anstellung der Fundamentalversuche über die Entstehung der Töne dienen kann. Zum Einbinden der Bücher wird jetzt häufig ein unter dem Namen „Cambric" bekannter Baumwollenstoff, in welchem verschiedene Muster eingepresst sind, benutzt. Eine der einfachsten Sorten derselben ist diejenige, bei welcher das Dessin als ein System dichter paralleler gerader Linien sich hervorhebt. Mit diesem Stoffe überkleide man zweckmässig geformte Körper von Holz oder Pappe, so dass dieselben fein gefurchte Oberflächen erhalten. Zieht man dann eine solche Fläche über eine andere, (z. B. die Decken zweier mit „Cambric" eingebundener Bücher) etwas rasch und mit mässigem Drucke hinweg, so dass die Richtung des Zugs auf der der gepressten Streifen senkrecht steht, so hört man deutlich einen etwas hohen Ton, dessen Höhe mit der Geschwindigkeit der Bewegung sich verändert. Ebenso entsteht der Ton, wenn man über eine der gefurchten Flächen mit der Spitze eines geeignet zugeschnittenen Federkieles (eines Zahnstochers) in senkrechter Richtung hinwegfährt. Ueberzieht man die cylindrische Fläche eines scheiben- oder trommelförmigen Körpers (z. B. den Rand einer runden Pappschachtel), der mit einer Drehachse versehen ist, mit dem genannten Stoffe, so dass die Richtung der Furchen der Drehachse parallel ist, so hat man eine Vorrichtung, welche das Savart'sche Zahnrad für die angegebenen Zwecke recht gut ersetzt. Man kann mehrere solcher Trommeln von verschiedenen Durchmessern durch eine gemeinschaftliche Drechachse verbinden und gemäss nahe liegender Wahl in den Verhältnissen jener Durchmesser beliebige Tonverhältnisse zur Anschauung bringen. Voraussichtlich ändert sich auch unter übrigens gleichen Umständen die Tonhöhe mit der Richtung, welche man der Bewegung des Federkieles gegen die Richtung der Streifen giebt. Fährt man in einer krummen Linie über eine so gestreifte Ebene hin, so ist der Ton in dem Augenblicke am höchsten, wo die Bewegungsrichtung der Federspitze die Streifen der Fläche rechtwinkelig durchschneidet; vorher und nachher zeigt sich die Höhe des Tones um so geringer, je schiefer der Winkel beider Richtungen ist. Bei kleineren Winkeln (unter 35°—30°) wird der Ton zugleich merklich unbestimmter und undeutlicher. Es liessen sich daher bei einem Systeme vorhererwähnter Trommeln, welche alle über eine Drehachse geschoben werden können, noch mehrfache Abänderungen in sofern treffen, als man die Furchen des Stoffes nicht parallel mit der Drehachse, sondern unter gewissen Winkeln gegen dieselbe geneigt stellte, um so auch kleinere für gewisse Zwecke vorher bestimmte Tonintervalle hervorzubringen.

VI. Ueber die **Entstehung von Tönen durch Berührung ungleich warmer Körper** hat J. Tyndall neuere Versuche angestellt, deren Resultate zum Theil mehrere zeither als wahr hingenommene Ansichten berichtigen. Demgemäss ist es zunächst nicht nothwendig, dass die beiden zur Berührung kommenden Körper (Wieger oder Wackler und die Unterlage beim bekannten

Trevelyan'schen Versuche) verschiedene Metalle sind; auch gleiche Metalle geben, bei ungleichem Temperaturzustande unter geeigneten Bedingungen in Berührung gebracht, die bekannten Töne *). Auch Antimon und Wismuth bringen, eben so gut als Träger wie als Wieger verwendet, die Erscheinung hervor und bilden somit keine Ausnahme unter den Metallen. Ferner ist es nicht nothwendig, dass beide Körper Metalle sind; auch Unterlagen von verschiedenen anderen nicht metallischen Körpern sind mehr oder minder geeignet hierzu, nur müssen dieselben — was auch bei Metallen vortheilhaft ist — da, wo man den Wieger oder Wackler balanciren lässt, zu einer Kante zugeschärft, nicht abgerundet sein. Als eine ganz vorzüglich geeignete Substanz zur Unterlage hat sich Steinsalz bewährt. Auf der Kante eines Würfels davon geräth ein (messingener) Wieger schon bei verhältnissmässig geringeren Temperaturerhöhungen in Schwingungen, wobei ein deutlicher musikalischer Ton entsteht. Die merkwürdigen thermischen Eigenschaften dieses Salzes sind somit um eine neue vermehrt. Dieselben Versuche haben auch dargethan, dass die Vibrationen keineswegs mit einer dem Unterschiede des Wärmeleitungsvermögens der Metalle proportionaler Intensität geschehen, und dass das Metall von schwächerem Leitungsvermögen nicht nothwendig das kältere sein müsse. So geben kupferne, messingene, eiserne Wieger auf dem Rande einer dünnen Silberplatte deutliche musikalische Töne. (Poggendorff. Annal. Bd. 94. S. 613.)

VII. Das prismatische Spectrum des elektrischen Funkens ist nach Angström's Untersuchungen als eine Ueberdeckung zweier besonderer Spectren zu betrachten, von denen das eine dem Metall, oder dem Körper, aus dem der Leiter besteht, und das andere der Luft, in welcher der Funke überspringt, angehört. Es ergiebt sich dieses daraus, dass, wenn der Funke in anderen Gasarten als atmosphärische Luft überspringt, das Spectrum entsprechende Veränderungen zeigt, dagegen bei verschiedenen Metallen, welche als Leiter verwendet werden, in gewissen Theilen eine Unveränderlichkeit und Unabhängigkeit von der Verschiedenheit der angewandten Leiter zu erkennen giebt. Das elektrische Spectrum ist nämlich durchzogen erstens von einer grossen Menge leuchtender Linien nach Anzahl und Vertheilung in ähnlicher Weise wie das Sonnenspectrum von den dunklen Fraunhofer'schen Linien. Dieselben sind (beim Ueberspringen des Funkens in atmosphärischer Luft) für alle Metalle gleich, variiren nur an Intensität nach der Stärke des Condensators und nach dem Feuchtigkeitsgrade der Luft. Dagegen wird die Anzahl und Lage dieser Linien abgeändert, wenn man den Funken durch verschiedene Gase gehen lässt. Die helleren Linien im Spectrum der atmosphärischen Luft scheinen mehr dem Stickstoff angehörig zu sein, denn sie erscheinen zwar im reinen Stickstoff wieder, nicht aber im reinen Sauerstoff (und fast eben so wenig im Kohlensäuregas). Im Ganzen liegen die meisten hellen Linien beim Sauerstoffspectrum im blauen und violetten Felde, beim Stickstoffspectrum im grünen und gelben, beim Wasserstoffspectrum im rothen, was wohl mit den chemischen und thermischen Eigenschaften dieser Gase im Zusammenhange stehen mag. Die

*) Was übrigens schon Seebeck (Poggend., Ann. Bd. 51. 1.) nachgewiesen hat.

Entstehung dieses durch die Gase bedingten Spectrums erklärt Angström durch ein Erglühen der Gastheilchen, hauptsächlich hervorgerufen, oder wenigstens befördert, wie es scheint, durch das Erglühen der vom Conductor abgerissenen und fortgeführten Metalltheilchen. Letztere bedingen nämlich das Auftreten einer zweiten Art leuchtender Linien im elektrischen Spectrum, welche glänzender, jedem besonderen Metalle eigenthümlich und von den vorhergehenden in leicht bemerklicher Weise dadurch unterschieden sind, dass sie, bei nicht allzu starker Ladung des Condensators, unvollständige Querlinien bilden, indem sie scheinbar von beiden Kanten des Prisma's ausgehend schon erlöschen, ehe sie die Mitte erreichen. Der stärkere Glanz dieser Lichtlinien verdunkelt die vorhergenannten etwas und erschwert deren Beobachtung einigermaassen, doch sind jene wieder daran leichter zu erkennen, dass sie mit unveränderlicher Intensität für jeden Punkt der Querdimensionen erscheinen. Die Veränderlichkeit der Intensität der zweiten Art von Lichtlinien erklärt sich leicht dadurch, dass die von beiden Polen ausgehenden Theilchen der Leiter unterwegs ihre hohe Temperatur und zugleich ihre Leuchtkraft verlieren. (Somit scheint aber das Glühen der Gastheilchen zu einem grossen Theile auch durch die directe Fortpflanzung der Elektricität hervorgerufen zu werden.) (Poggend. Ann. Bd. 94. S. 141.)

VIII. Optische Eigenschaften einiger Krystalle des tesseralen oder regulären Systems. Das Gesetz, nach welchen die Krystalle des regulären Systems in allen Richtungen in gleicher Weisse auf das Licht wirken, dasselbe einfach brechen und in Bezug auf Polarisation von den Krystallen anderer Systeme abweichen, hat einige Ausnahmen gefunden. Brewster entdeckte eine Doppelbrechung am Analcim; er bezeichnete denselben als mit unzähligen Achsen doppelter Brechung begabt, weil beim Analcim in mehreren zu seinen Flächen symmetrisch gelegenen, doch einzelnen Ebenen nach jeder Richtung die Doppelbrechung fehlt. Ausserdem übt jedes Theilchen dieses Minerals eine ähnliche Wirkung auf das Licht aus, wie erhitztes oder gepresstes Glas. Dieselben Eigenschaften besitzen auch Leucit und Boracit. Biot fand, dass mehrere Krystalle des tesseralen Systems, namentlich Alaun, Flussspath, Kochsalz eine eigenthümliche Einwirkung auf polarisirtes Licht haben und somit auf ein Vermögen, das Licht wenigstens in einzelnen Theilen doppelt zu brechen, schliessen lassen. Er bezeichnete diese Art von Erscheinungen mit *polarisation lamellaire* und erklärte dieselbe durch Annahme eines lamellenartigen Baues dieser Krystalle (im Gegensatz zu einer molecularen Constitution). Mitscherlich entdeckte dieselben Eigenschaften am chlorsauren Natron und bezeichnete zugleich die Krystallisation desselben als eine hemiedrische. An demselben Salz entdeckte endlich H. Marbach in Breslau eine Drehung der Polarisationsebene, wie sie am Quarz und bis dahin nur an demselben, beobachtet wurde. (Poggend. Ann. Bd. 91. S. 482) Dieselben Erscheinungen zeigen nach ihm entschieden auch bromsaures Natron, essigsaures Uranoxyd-Natron ($NaO + 2\,Ur_2O_3 + 3\,C_4H_3O_3$) und wahrscheinlich noch einige andere Salze, welche die der *polarisation lamellaire* besitzen, nämlich bromsaures Nickeloxydul und bromsaures Kobaltoxydul (Poggend. Ann. Bd. 94. S. 414). Das chlorsaure Natron, bromsaure Natron und das essigsaure Uranoxyd-Natron geben nach Marbach die bezeichnete Erscheinung in folgender Weise zu erkennen.

1) Von jeder dieser Substanzen findet man einige Krystalle, welche die Polarisationsebene nach rechts, andere, welche sie nach links drehen. In welcher Richtung aber auch diese Drehung vor sich geht, immer ist die Grösse derselben für beide Arten von Krystallen dieselbe, wenn der vom Lichte zurückgelegte Weg gleich gross ist.

2) Bei jeder Substanz ist die Drehung der Dicke der Platte proportional. Legt man mehrere Platten desselben Salzes übereinander, so ist die Wirkung derselben proportional der Summe oder der Differenz der Dicken, je nachdem die Krystalle in gleichem oder entgegengesetztem Sinne wirken.

3) Die Drehung der Polarisationsebene bleibt für dieselbe Substanz und bei unveränderter Dicke dieselbe, welche Richtung auch die Lichtstrahlen zu den Krystallisationsachsen haben mögen.

4) Am chlorsauren Natron lassen die entgegengesetzten hemiedrischen Gestalten (Tetraeder oder Pentagondodekaeder) im Voraus erkennen, ob der Krystall ein rechts- oder linksdrehender ist. Denn die nach rechts oder links symmetrisch ausgebildeten Flächensysteme dieser Körper geben die damit übereinstimmende Drehungsrichtung unmittelbar an.

5) Die beschriebenen Erscheinungen erleiden bisweilen Modificationen durch die der *polarisation lamellaire.* An manchen Krystallen des chlorsauren Natrons werden, wenn sie in den Polarisationsapparat gelegt sind, im intensiv gefärbten Gesichtsfelde weisse Flecke sichtbar, die bei einer der Krystallplatte gegebenen Drehung in ihrer eigenen Ebene abwechselnd verschwinden und wieder entstehen. Wird ein derartiges Exemplar so in das verdunkelte Gesichtsfeld des Polarisationsapparates gelegt, dass je ein Paar der Würfelflächen einer der Polarisationsebenen parallel wird, und durch das dritte Paar von Würfelflächen das Licht geht, so zeigen sich vier weisse Flecke auf gefärbtem Grunde, die ein nicht in der Mitte zusammenhängendes Kreuz bilden und durch zwei Grade symmetrisch geschnitten werden, welche 45° gegen die dem Lichte parallelen Würfelflächen geneigt sind. Mit einer Drehung des Zerlegers wird der farbige Grund geändert, und wenn dieser die dunkelste, die violette, Färbung angenommen hat, so sind die Flecke am deutlichsten; dieselben verschwinden wieder, wenn die Drehung fortgesetzt und das Gesichtsfeld wieder hell wird. Sind die Flecke recht deutlich geworden, so werden sie durch eine Drehung des Krystalles wieder undeutlicher und verschwinden ganz, wenn die den Lichtstrahlen parallelen Würfelflächen 45° gegen die Polarisationsebenen geneigt sind. In dieser Stellung verhält sich der Krystall ganz wie ein gewöhnlicher desselben Salzes. Aehnliche Erscheinungen sind an (sehr vielen) Krystallen des bromsauren Natrons, des bromsauren Nickels und des bromsauren Kobalts zu beobachten, doch hat Marbach am essigsauren Uranoxyd-Natron keine Andeutung von *polarisation lamellaire* gefunden. An Krystallfragmenten bleiben diese Erscheinungen unverändert dieselben.

6) Eine Lösung eines solchen Salzes, in eine Röhre von 25 Centimeter Länge gebracht, zeigt keine Wirkung auf polarisirtes Licht, auch dann nicht, wenn man nur Krystalle von einer Art, welche eine Drehung nach ein und demselben Sinne bewirken, aufgelösst hat. Aus einer solchen Lösung von Krystallen derselben Art scheiden sich sowohl links- als rechtsdrehende Krystalle aus.

7) Die Grössen der Ablenkungen des gelben, der *teinte sensible* complementären Lichtes sind bei diesen Substanzen im Vergleich zu der beim

Quarz, Terpentinöl und der Zuckerlösung für die gemeinschaftliche Dicke von 1 par. Linie wie folgt gefunden worden.

Quarz	54°	rechts oder links,
chlorsaures Natron . . .	$8\frac{1}{4}$°	" " "
bromsaures Natron . . .	$6\frac{1}{3}$°	" " "
essigsaures Uranoxyd-Natron	4°	" " "
Zuckerlösung	1°,66	rechts,
Terpentinöl	0°,79	links.

(*Compt, Rend. T. XL. p.* 793. — Poggend. Ann. Bd. 94. S. 412.)

IX. Ein neuer **einfacher Lichtinterferenz-Versuch** wird von A. Poppe in Frankfurt a. M. in folgender Weisse angegeben. Man schneide in ein Stanniolblättchen von einem Punkte aus drei kleine etwa 1 Millimeter lange Linien unter Winkeln von 120°, biege die drei stumpfwinkligen Lappen so weit zurück, dass sie auf der Ebene des Blättchens senkrecht stehen und bringe über die somit entstandene Oeffnung von der Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks ein Tröpfchen klares Oel oder auch Wasser mit Hilfe eines feinen Pinsels. Die eingebrachte Flüssigkeit, von der sich ein Theil vermöge der Capillarattraction in das Loch ziehen wird, breite man auf der Vorderseite gleichmässig rings um die Oeffnung in eine ebene oder schwach convexe Fläche aus. Sieht man hierauf durch die dicht vor das Auge gehaltene Oeffnung dieses in eine geeignete Fassung gebrachten Präparates nach einem leuchtenden Punkte, so nimmt man eine schöne und scharf ausgeprägte Interferenzerscheinung wahr. In der Mitte des Sehfeldes sieht man auf lichtgrauem Grunde drei Systeme hyperbolisch gebogener schwarzer Streifen, welche durch helle Zwischenräume getrennt sind. Die Achsen der drei Systeme stossen in einem Punkte unter Winkeln von 120° zusammen. Im weissen Sonnenlichte erscheinen die Streifen gegen die Mitte des Gesichtsfeldes farbig gesäumt. Bedient man sich eines rothen Glases, so findet man die Anzahl der dunklen Streifen bedeutend vermehrt. Eines finsteren Zimmers bedarf man zu diesem Versuche nicht, sondern es genügt zur Abhaltung des Seitenlichts die Vorrichtung in die hohle Hand zu nehmen, oder in eine innen geschwärzte Röhre zu stecken und nach dem Sonnenbilde, welches von der vordern Fläche einer Sammellinse von 6—8 Zoll Brennweite, oder von einem geschwärzten Glase zurückgestrahlt wird, aus einer Entfernung von einigen Schritten zu sehen.

Die Erscheinung erklärt sich dadurch, dass durch die Adhäsion der Flüssigkeit an den drei zurückgebogenen Lappen sich besondere, gegen die Mitte der Oeffnung hin flacher werdende Erhebungen bilden, welche wie das Interferenzprisma die durchgehenden Lichtstrahlen zur Interferenz bringen. Die Zunahme des Abstandes der dunklen Streifen mit ihrer Annäherung nach der Mitte des Gesichtfeldes, ist von dem allmäligen Flacherwerden der Flüssigkeitsprismen gegen die Mitte der Oeffnung abhängig. Der Versuch ist als eine Modification und, wegen der leichteren Darstellung desselben, als eine Vereinfachung des Fundamentalversuchs mit den Spiegeln oder dem Prisma anzusehen. Lässt man den Wassertropfen verdünsten oder vermindert den Oeltropfen in geeigneter Weise, so stellt die Erscheinung eine Reihenfolge regelmässiger Phasen von prachtvollem Farbenwechsel dar, wobei sich in der Mitte des Gesichtsfeldes ein regelmässiges Sechseck bildet, das mit Roth beginnend der Reihe nach in

die übrigen Spectralfarben übergeht, während zugleich an seine Seiten sich andere Sechsecke unter stetem Farbenwechsel anschliessen. Je mehr solche Reihen entstehen, desto kleiner werden die Sechsecke, bis sie endlich nicht mehr erkennbar sind. Zuletzt erscheint noch ein dreiseitiger, mit feinen schwarzen Linien durchzogener Raum, der in dem Maasse dunkler wird, als er sich ausbreitet, bis endlich ein Platzen des Flüssigkeitshäutchens die Erscheinung beendigt. Die Interferenzfiguren gestalten sich ganz den gewöhnlichen Gesetzen gemäss anders, wenn statt der dreiseitigen mit drei zurückgebogenen Lappen versehenen Oeffnung eine andere polygonale vorbereitet wird. (Poggend. Ann. Bd. 95. S. 483.)

X. Ueber ein eigenthümliches Verhalten des geschmolzenen Wismuths beim Erstarren bemerkt Rose nach mitgetheilten Beobachtungen von R. Schneider Folgendes. Es wird gewöhnlich als ein sicherer Beweis für die Ausdehnung, die das Wismuth beim Erstarren erfährt, angesehen, dass, wenn dasselbe im geschmolzenen Zustande auf eine kalte Platte ausgegossen wird, während der Erstarrung zahlreiche Wismuthkugeln aus der Masse hervordringen. Der Beweis ist nicht richtig: gerade chemisch reines Wismuth, unbeschadet der Ausdehnung, die es beim Erstarren erfahren mag, zeigt wenigstens nicht die Erscheinung hervordringender Wismuthkugeln. Diese Erscheinung wird vielmehr nur bei unreinem Wismuth beobachtet und merkwürdiger Weise zeigt sich, dass die aus diesem hervordringenden Wismuthkugeln einen hohen Grad von Reinheit besitzen. Selbst dann, wenn das angewandte Metall eine bedeutende Menge fremdartiger Stoffe (Schwefel, Arsenik, Eisen, Nickel, Kupfer, Silber) in nicht unbedeutender Menge enthielt, wurden bis zu 50 Procent hervorgedrungener Wismuthkugeln erhalten, in welchen stets über 99,5 Procent Wismuth enthalten waren. Bemerkenswerth ist, dass von den schwereren Metallen nur das Silber dem hervortretenden Wismuth folgt, während z. B. Kupfer vollständig in der Grundmasse zurückbleibt.

Ohne Zweifel wird das Hervordringen der Wismuthkugeln aus der Oberfläche des erstarrenden unreinen Metalles dadurch bedingt, dass die binären Verbindungen und Legirungen des Wismuths mit den es verunreinigenden Stoffen sich im Momente ihrer Erstarrung ausdehnen und dabei das wegen seines niedrigen Schmelzpunktes und seiner späteren Erstarrung noch flüssige Wismuth aus der Masse herausdrängen. Da im Zeitpunkte dieses Hervortretens jene fremden Stoffe bereits fixirt sind, so können sie dem hervordringenden Wismuth nicht folgen. Dieses Verhalten könnte zu einer wenn auch nur vorläufigen Reinigung des käuflichen Wismuths benutzt werden. (Monatsber. der K. Preuss. Acad. d. Wiss. 1855. S. 495.)

XI. Für das von Wöhler entdeckte **Aluminium** sucht man bekanntlich in neuerer Zeit bequemere und weniger kostspielige Methoden seiner Darstellung im Grossen und in zusammenhängenden Massen. In letzterem Zustande zeigt nämlich dieses Metall Eigenschaften, welche an dem mehr pulverförmigen Metalle, wie es Wöhler zuerst erhielt, nicht wahrgenommen wurden. So kann es in zusammenhängenden Massen bis zur Rothgluht erhitzt werden, ohne merklich zu oxydiren, während es in Pulverform zu weisser Thonerde verbrennt. Das Metall ist sehr geschmeidig, besitzt

grosse Unveränderlichkeit an der Luft, widersteht der Salpetersäure, soll als ein vorzüglicher Elektricitätserreger zu galvanischen Elementen vortheilhaft zu verwenden sein etc. Dieses Metall wird nach Déville grösstentheils noch mittelst Zersetzung des Chloraluminiums durch Natrium gewonnen, ein Verfahren, das allerdings immer noch als ein mühsames wie kostspieliges bezeichnet werden muss. Eine Aussicht auf grössere Wohlfeilheit der Reductionsweise ist insofern gegeben, als es Deville gelungen ist, die Darstellung des bisher gleichfalls kostbaren Natriums zu verbessern und wohlfeiler zu machen. Die Anwendung des Chloraluminiums und seiner Verbindung mit alkalischen Chlormetallen hat indessen wegen der Eigenschaft desselben, leicht Feuchtigkeit an sich zu ziehen, noch seine besonderen unangenehmen Seiten. Man ist deshalb darauf bedacht, diese Verbindung durch eine andere zu ersetzen. H. Rose hat dafür die Verbindung des Fluoraluminiums mit Fluornatrium, welche in der Natur als Kryolith sich vorfindet, zu verwenden gesucht. Der Kryolith kann mit Leichtigkeit zu feinstem Pulver gebracht werden, ist wasserfrei, zieht keine Feuchtigkeit aus der Luft an und bietet somit schon mehrere Vortheile gegen die Anwendung des Chloraluminiums bei der Darstellung des betreffenden Metalles dar. Zudem kommt der Kryolith schon in bedeutenderen Massen und von grosser Reinheit im Handel unter dem Namen Mineralsoda vor (der Centner zu 3 Thlr., für welchen Preis er bisher von Grönland über Kopenhagen in Stettin zu beziehen ist; vermittelst gebrannten Kalkes lässt sich daraus eine Natronlauge bereiten, welche wahrscheinlich wegen ihres Thonerdegehaltes sich zur Darstellung mancher Seifen eignen mag). Rose bediente sich zur Reduction kleiner dünner gusseisener Tiegel, in welchen das feine Pulver des Kryoliths mit Natrium geschichtet und mit einer Lage von Chlorkalium bedeckt zur starken Rothgluht gebracht wurde. Nach dem Erkalten wurde der Inhalt des Tiegels mit Wasser behandelt, wodurch nur eine sehr geringe, bisweilen kaum merkliche Gasentwickelung stattfand. Die geringe Menge des entweichenden Wasserstoffgases hat denselben unangenehmen Geruch, welchen das bei der Auflösung des Roheisens in Chlorwasserstoffsäure sich entwickelnde Gas besitzt. Der Kohlengehalt rührt nur von der sehr geringen Menge des Steinöls her, welches dem Natrium auch nach dem Abtrocknen noch anhängt. Wegen der Schwerlöslichkeit des Fluornatriums erweicht die Masse nur langsam. Nach 12 Stunden indess kann man die ungelösten Klumpen mit einem Pistill in einem Porzellanmörser zerdrücken. Man findet dann nebst kleineren auch grössere Kugeln von Aluminium von 0,3 bis 0,4 Gramm Gewicht, welche man absondert. Die kleineren Kugeln können von der zugleich gebildeten Thonerde nicht durch Schlämmen getrennt werden. Man behandelt darauf das Ganze mit verdünnter Salpetersäure, wodurch zwar die geglühte Thonerde nicht gelöst wird, aber die Kugeln des Aluminiums erst ihren metallischen Glanz erhalten. Man trocknet sie und nach dem Trocknen trennt man die feine Thonerde durch Reiben auf seidnem Moussellin von den kleinen Metallkugeln, welche auf dem Zeuge zurückbleiben. Die kleinen Kugeln des Aluminiums können in einem bedeckten kleinen Porzellantiegel unter einer Schicht von Chlorkalium zusammengeschmolzen werden. Sie ohne ein Flussmittel durch Schmelzen zu vereinigen, gelingt nicht. Denn wenn auch das Aluminium durch Glühen an der Luft scheinbar sich nicht oxydirt, so überzieht es sich doch dabei mit einer kaum sichtbaren Oxydhaut, welche das Zusammenschmelzen verhindert. Das Zusammenschmelzen unter einer

Decke von Chlorkalium ist immer mit einem Verlust von Aluminium verbunden; eine Kugel von 3,88 Gramm verlor durch Schmelzen unter Chlorkalium 0,05 Gramm. Es wurde daher auch das Verfahren von Déville benutzt, nach welchem die Kugeln des Aluminiums in einem bedeckten Porzellantiegel unter einer Decke von Chloraluminiumnatrium vorgenommen wird. — Diese Darstellungsmethode lässt bezüglich der Ausbeute noch Manches zu wünschen übrig. Die günstigste Ausbeute betrug nur 9 Procent vom verwendeten Kryolith, der überhaupt nur 13 Procent Aluminium enthält. Wenn aber auch nur 6—4 Procent gewonnen wurden, so musste dieses Resultat immer noch ein günstiges genannt werden, denn oft wurden nur 3 Procent und bisweilen fast gar nichts erhalten. Diese verschiedenen Resultate hängen zum Theil von dem Grade der Erhitzung ab, sowie davon, dass während des Erkaltens, welches beim Zutritt von Luft geschah, der feinzertheilte Theil des reducirten Aluminiums sich oxydirte. Rose hofft, dass die Resultate dieser ersten Versuche nach fortgesetzten Untersuchungen günstiger ausfallen werden.

(Monatsber. d. K. Preuss. Academ. 1855. S. 513.)

XII. Krystallmodelle aus Glas. Dr. Schnabel, Dir. der Realschule zu Siegen, hat in Verbindung mit dem Oberlehrer Kysaeus Krystallmodelle aus Glas durch den Buchbindermeister Thomas an demselben Orte anfertigen lassen, welche den Unterricht in der Mineralogie vor zahlreicheren Classen nicht unwesentlich unterstützen und befördern dürften. Die Modelle, 5—8 Zoll gross, sind aus Glastafeln zusammengesetzt, die Axen und Hilfslinien darin durch ausgespannte Seidenfäden angedeutet, und zwar in abweichenden Farben für die verschiedenen Flächen und anderen Linien. Die Kanten von den äusseren und inneren Formen sind durch Leisten von Papier eingefasst und auch diese haben verschiedene, der Symmetrie der Kanten entsprechende Farben. Die Modelle umfassen in drei Abtheilungen: 1) die holoedrischen, 2) die hemiedrischen Gestalten und 3) die wichtigsten binären Combinationen derselben für die 6 Krystallsysteme.

Die Modelle der Holoëder unterscheiden sich von den bisher gebräuchlichen, aus Holz, Pappe etc. angefertigten dadurch, dass darin die Länge, Verschiedenheit und Neigung der Achsen zu erkennen ist und die Beziehungen der Flächensysteme zu denselben hervortreten; dass die Verschiedenheit und Gleichartigkeit der Ecken und Kanten ersichtlich ist; dass die Grundform und deren Verhältniss zu den abgeleiteten Formen veranschaulicht ist.

Die Modelle der hemiedrischen Körper sollen dienen, die Entstehung dieser Formen aus den entsprechenden holoedrischen durch Wachsen und Verschwinden einzelner Flächen oder Flächensysteme zu erklären und zu veranschaulichen. Zu dem Zwecke sind die Holoeder aus feinem Carton oder Glas angefertigt, die Flächen der Hemieder aus Glas über die wachsenden (colorirten) Flächen gelegt und bis zum Durchschneiden über den verschwindenden (weissen) Flächen erweitert. Die wichtigsten hemiedrischen Formen werden noch besonders mit Achsen und Grundformkanten construirt.

Die binären Combinationen werden durch die dritte Art von Modellen erläutert. Die aus Glas oder Carton angefertigte Krystallgestalt, welche

durch Combination mit einer anderen Abänderungen erlitten hat, ist auf den Combinationsflächen mit Glastafeln bedeckt, die bis zur Vervollständigung des abändernden Krystalles erweitert sind. Hinzugefügt zu diesen sind noch die wichtigsten Zwillingskrystalle aus Glas mit Achsen.

Die krystallographischen Zeichen nach Weiss oder Naumann sind auf den betreffenden Flächen in rother Oelfarbe angebracht.

Die Modelle sind verhältnissmässig billig, ihr Preis richtet sich hauptsächlich nach der Anzahl ihrer Flächen. Im Durchschnitt wird die Glasfläche zu 2 Sgr., die innen liegende Pappfläche zu 1 Sgr., jeder eingespannte Faden zu 1 Sgr. berechnet. (Poggend. Annal. Bd. 95. S. 626.)

XIII. Ueber Aufbewahrung des Brausepulvers, von Otto. Zu den gebräuchlichsten Hausmitteln gehört jetzt das Brausepulver, am besten zusammengesetzt aus 3 Theilen Weinsäure und 5 Theilen doppeltkohlensaurem Natron. Merkwürdig ist es nun, dass dasselbe in einer Glasflasche mit eingeriebenem Glasstöpsel schon nach einigen Tagen unbrauchbar wird, indem es sich zu einem Klumpen zusammenballt und damit den Beginn einer Zersetzung anzeigt, während es sich in einer ganz gewöhnlichen Pappschachtel, wenn dieselbe nicht an einem feuchten Orte aufbewahrt wird, ganz vortrefflich hält und seine lockere Beschaffenheit bewahrt. Die Ursache dieses eigenthümlichen Verhaltens liegt höchst wahrscheinlich darin, dass das Pulver eine gewisse Menge von Feuchtigkeit enthält, welche seine Zersetzung einleitet, wenn dieselbe nicht abdunsten kann oder weggeführt wird. Wird das Brausepulver scharf getrocknet und nachher in ein Glas gethan, so hält es sich besser; werden dagegen die Ingredienzen dazu vor dem Vermischen einzeln getrocknet, so zersetzt sich die Mischung in einem Glase ebenfalls sehr leicht. Es scheint somit, dass die Feuchtigkeit des Natronsalzes, welche die Zersetzung einleitet, in Folge der durch das Mischen des Salzes mit Weinsäure bewirkten Auflockerung und Zertheilung leichter und bei niederer Temparatur abdunsten könne.

(Annal. d. Chem. u. Pharm. v. Wöhler. Bd. 93. S. 378.)

Praktische Notizen.

Für Zeichner. Wer öfter Zeichnungen copirt hat, wird die Uebelstände kennen, welche aus der geringen Steifigkeit und unbedeutenden Haltbarkeit des gewöhnlich benutzten durchscheinenden Papiers entspringen; da auch das Aufkleben einer solchen Copie auf stärkeres Papier häufig mit dem Zerreissen oder Verziehen derselben endigt, so ist in der That ein längerer Gebrauch derartiger Copieen kaum möglich. Frei von allen diesen Unbequemlichkeiten hält sich eine neuerdings in den Handel gekommene Copierleinwand, die wir aus eigenem mehrfachen Gebrauche den Zeichnern bestens empfehlen können. Wir legen eine Probe dieses ausgezeichneten Fabrikates bei, welches durch Robert Winckler in Chemnitz zu beziehen ist. Schlömilch.

IV.

Ueber die Einführung unserer gegenwärtigen Ziffern in Europa.

Von Dr. Cantor, Privatdocent in Heidelberg.

„Der Gedanke, alle Quantitäten durch neun Zeichen auszudrücken, indem man ihnen zugleich einen absoluten und einen Stellungswerth giebt, ist so einfach, dass man eben deshalb nicht genugsam erkennt, welche Bewunderung er verdient."

Wenn noch der berühmte Verfasser der *exposition du système du monde* sich in dieser Weise aussprechen konnte, so wäre der jetzigen Generation gegenüber ein solcher Vorwurf der Undankbarkeit wohl ungegründet, indem in diesem Jahrhunderte die bedeutendsten Forscher sich gerade mit Untersuchungen über die Erfindung unseres Zahlensystemes beschäftigten und in der Heftigkeit ihrer Polemik ein glänzendes Zeugniss von der Wichtigkeit des behandelten Gegenstandes ablegten*). Wenn wir auch nach diesen Gelehrten versuchen wollen, über denselben Gegenstand Mittheilungen zu machen, so ist unser Zweck weniger der, Neues zu liefern, als vielmehr das vorhandene Material zu sichten und unbeschadet der scheinbaren Widersprüche es zu einem klaren Bilde zu vereinigen. Eben deshalb wollen wir uns auch auf die Betrachtung eines einzigen Zahlensystemes beschränken und von anderweitigen Bezeichnungen nur so viel erwähnend vorausschicken, als zum Verständniss unumgänglich ist.

So ist aber vor Allem nothwendig ein Begriff von der Zahlenschrift der Römer und Griechen. Beide basiren sich, wie es die Sprache auch mit sich brachte, auf die Grundzahl 10. Bei den Römern bezeichnete ein Verticalstrich I die Einheit; zwei zu einem Kreuze verbundenen Striche X die Zehner; drei Striche, von denen einer vertical, zwei horizontal waren, ⊏ die Hundert; endlich vier Striche, wo drei verticale von einem horizontalen

*) Zu den Hauptarbeiten, die in dieser Richtung erschienen sind, gehören: *Mannert, De numerorum quos Arabicos vacant, vera origine Pythagorica,* (*Norimb.* 1801). Alex. von Humboldt, Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen etc. (in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. IV, Berlin 1829). Chasles, Geschichte der Geometrie (übersetzt von Sohncke 1839 S. 526 ff. der Uebersetzung). *Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie (Paris* 1838 *T. I. pag.* 193, 201, 377, *T. II. pag.* 21, 287*)*. Nesselmann, Geschichte der Algebra bei den Griechen (Berlin 1842, drittes Kapitel: Ueber Zahlensysteme nnd Zahlzeichen).

bedeckt waren, ⊓⊓ die Tausend*). Daraus bildeten sich zum Theil durch Abrundung die späteren Zeichen I, X, C, (I) und aus den drei letzteren durch Halbirung die Zeichen V, L, D für 5, 50, 500, womit auch der Grundzahl fünf ein Recht eingeräumt war. Alle zwischenliegenden Zahlen bildeten sich durch blosse Juxtapposition theils additiv, theils subtractiv, je nachdem ein Zeichen von geringerem Werthe einem höheren folgte oder voranging. Wir finden in dieser Art der Bezeichnung die unvollkommenste Spur eines Systems, das unbehilflichste Mittel Rechnungen auszuführen.

Ganz unverhältnissmässig höher steht schon die Art, wie die Griechen ihre Zahlen schrieben. Bei ihnen waren schon besondere Zeichen für die einzelnen Zahlen zwischen jenen Hauptgrenzen so weit vorhanden, dass jeder der verschiedenen Einer, Zehner und Hunderter durch einen besonderen Buchstaben ihres Alphabetes angegeben wurde, was sowohl die Aussprache der einzelnen Zahlen bedeutend erleichterte, als auch der Rechnung eine übersichtlichere Basis darbot. Missverständnissen war dadurch vorgebeugt, dass in der Regel die Buchstaben als Zahlenausdrücke durch einen darüber gezogenen Horizontalstrich ausgezeichnet wurden, wie es auch bei den semitischen Völkern gebräuchlich war, z. B. $\overline{\mu\eta}=48$, $\overline{\psi o\eta}=778$, $\overline{\tau\iota\alpha}=311$. Um die Tausender zu schreiben, wurden die früheren Buchstaben, welche 1 bis 9 bezeichneten, wieder benutzt, indem denselben ein seitwärts unten angebrachter Strich den so erhöhten Werth beilegte. z. B. $,\alpha=1000$, $,\beta=2000$, $,\Theta=9000$. Um 10000 hingegen zu schreiben, benutzte man nicht $,\iota$ sondern *M* oder *Mv.* als Anfangssilbe des Wortes μυϱιας, welchen Zeichen die Einheitszahlen als Factoren entweder vorgestellt, oder übergeschrieben, oder auch wohl hinten angehängt wurden.**)

Jedenfalls ist aber nicht zu verkennen, dass der Gebrauch desselben Buchstabens mit oder ohne Strich in verschiedener Bedeutung, sich schon sehr der Bezeichnung nähert, welche einen Positionswerth anerkennt; und hätte man, wie Humboldt scharfsinnig bemerkt***), die Strichnotation für alle Gruppen angewandt und alle Zeichen nach dem $\Theta=9$ unterdrückt, so hätte man in β mit einem oder zwei oder drei Strichen Ausdrücke für 20, 200, 2000 gehabt, und wäre fast mit Nothwendigkeit auf die Bezeichnung durch Stellenwerth gekommen. Wenigstens lässt es sich nachweisen, dass auf ganz ähnliche Art die chinesische Ziffernschrift entstanden ist†), die von unserer jetzigen europäischen nur darin abweicht, dass die Zehner nicht links von den Einern, sondern über denselben stehen etc.

Unserer jetzigen Bezeichnung noch näher kamen die Griechen bei der Art, wie sie sechzigtheilige Brüche schrieben, wo der Nenner des Bruches nur durch accentartige Striche angegeben wurde. So bekamen die Sechzigstel eines Grades oder die Minuten einen Strich, die Sechzigstel der Minuten oder die Secunden zwei Striche u. s. f., eine Schreibart, deren wir uns noch heute bedienen, um das Maas eines Winkels anzugeben. In dieser Gedankenverbindung soll sogar das Zeichen der Null als Merkmal eines

---

*) Vergl. *P. Rami Scholarum Mathematicarum libri unus et triginta, Basileae,* 1569. 4. *p.* 117 und *G. J. Vossii de universae mathesecos natura et constitutione liber, cui subjungitur chronologia mathematicorum, Amstelod.* 1650, 4. *Cap. VIII.* §. 4.

**) Vergl. Nesselmann, Geschichte der Algebra bei den Griechen, S. 80.

***) Vergl. Crelle, Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. IV, S. 222.

†) Vergl. *Libri, Histoire de sciences mathématiques en Italie T. I, p.* 202.

fehlenden Gliedranges in Manuscripten des Ptolemaeus vorkommen*), sowie Boeckh Aehnliches auf einem von Müller bei Athen aufgefundenen Steine entdeckt haben will**).

In demselben Grade, wie die Zahlenschrift der Griechen über der der Römer stand, in demselben Grade war auch die Rechenkunst derselben weiter vorgerückt, und nur so liest man ohne allzugrosse Verwunderung z. B. die vollständige Theorie der Quadratwurzelausziehung bei Theon von Alexandrien ***) dem Commentator des Ptolemäus aus dem vierten Jahrhundert.

Eine Frage von grösster Wichtigkeit nun für unsere ganze Untersuchung liegt darin, ob es nicht ausser der volksthümlichen Zahlenbezeichnung durch Buchstaben noch eine andere dem europäischen Systeme ganz nahe stehende gab, aus welcher eben jene Bruchbezeichnung herstammte, und welche als der Wissenschaft allein angehörig vielleicht in dem verloren gegangenen Werke des Archimed über Zahlensysteme, in den ἀρχαῖς auseinandergesetzt war?

Zuerst Mannert, dann Chasles sprachen sich für die Wahrscheinlichkeit aus, Libri dagegen. Und doch verschwindet bei näherer Betrachtung ihrer Ansichten dieser scheinbare Widerspruch, und beide treffen in der Mitte überein, wo auch nach unserer Ansicht das Richtige zu finden ist. Auch wir glauben zwar nicht an eine ausgebildete Ziffernschrift von der angegebenen Art, schon deshalb nicht, weil eine solche kaum ausschliessliches Eigenthum der Gelehrten hätte bleiben können, weil sie dann wohl auch in deutlichen Ueberresten vorhanden sein müsste. Aber wir glauben an eine nach decadischem Systeme eingerichtete Rechenmethode, an die Existenz einer Rechentafel bei den Griechen in sehr früher Zeit, einer Tafel, welche die entschiedenste Aehnlichkeit mit dem Abacus der späteren Römer, mit dem Suanpan der Chinesen besass. Zeugnisse dafür liefern viele alte Schriftsteller †) und ein römischer Abacus war noch im 17. Jahrhunderte in den Händen eines augsburgischen Patriciers ††) aus der bekannten Familie der Welser, der eine Beschreibung davon hinterliess. Ausführlicheres hat darüber Klügel in seinem mathematischen Wörterbuche (Bd. II, S. 736) unter dem Artikel „Instrumentale Arithmetik", wo jene Beschreibung so wiedergegeben ist:

> „Der Abacus war von Metall und hatte 8 längere und 8 kürzere Einschnitte, je einen von jenen mit einem von diesen in gerader Linie. In den Einschnitten waren bewegliche Stifte mit Knöpfen, in einem der

---

*) Vergl. Delambre, Ueber die Arithmetik der Griechen, übersetzt von Hoffmann, Mainz 1817, S. 11.

**) Vergl. *Index lectionum quae in universitate Frid. Guilelma per semestre aestivum anni* 1841 *instituentur*.

***) Die ersten Ausgaben des betreffenden Werkes sind: *Κλ. Πτολεμάιου μεγάλης συντάξεως βιβλ. ιγ. Θεῶνος Ἀλεξανδρέως ἐις τά ἀυτὰ ὑπομνημάτων βιβλ. ια Basileae* 1533 und 1538.

†) Die Hauptstelle ist bei *Polybius* V, 26, 13: *Ὄντως γάρ ἐισιν οὗτοι παραπλήσιοι τᾶις ἐπὶ τῶν ἀβακίων ψήφοις. Ἐκεῖνάι τε γάρ κατὰ τὴν τοῦ ψηφίζοντος βούλησιν ἄρτι χαλκοῦν καὶ παραυτίκα τάλαντα ἴσχουσιν· οἵ τε περὶ τὰς ἀυλὰς κατὰ τὸ τοῦ βασιλέως νεῦμα μακάριοι, καὶ παρὰ πόδας ἐλεεινοὶ γίγνονται.* Ferner *Persius Sat. I, v.* 132: *Nec qui abaco numeros et secto in pulvere metas scit.* Dann noch *Plutarch. vita Catonis Uticensis* am Ende und *Martianus Capella, de nuptiis Philologiae et Mercurii, lib. VI de Geometria.*

††) Vergl. *Marci Velseri opera, Norib.* 1682 *pag.* 819.

längeren 5 Stück, in den übrigen 4, in den kürzeren je 1. Die längeren Einschnitte waren bezeichnet mit:

$$\ominus\,.\,\mathrm{I}\,.\,\mathrm{X}\,.\,\mathrm{C}\,.\,(\mathrm{I})\,.\,((\mathrm{I}))\,.\,(((\mathrm{I})))\,.\,[\mathrm{I}].$$

Der Gebrauch dieser Rechentafel ist leicht einzusehen. Die Stifte oder Knöpfchen in den längeren Einschnitten bedeuteten einzelne Einheiten ihrer Klasse, die einzelnen Knöpfe in den kürzeren Einschnitten galten 5 solcher Einheiten. Der mit $\ominus$ bezeichnete Einschnitt enthielt die *asses*, die übrigen die *uncias* oder *sestertios*, Einer, Zehner, Hunderte etc. In dem ersteren Einschnitte konnte man bis 11 bemerken und wenn noch mehrere dazu kamen, statt 12 daselbst 1 in dem Einschnitt I angeben. In den folgenden 7 Einschnitten konnte man bis 9 Einheiten in jeder Klasse von den Einern bis zu Millionen bezeichnen, wenn man die Knöpfe von dem unteren Ende eines Einschnittes bis zu dem oberen verschob, um sie dadurch zu bedeutenden Zahlzeichen zu machen. So zeigten 2 verschobene Knöpfe in einem längeren Einschnitte und der einzelne in dem zugehörigen kürzeren fortgerückt die Zahl 7 in der entsprechenden Klasse an. Neben dem längeren Einschnitte für die Asses finden sich noch 3 kleine mit 2 oder 1 Knöpfchen und gewissen Beizeichen. Vermuthlich dienten sie zu einer Bruchrechnung."

Nicht viel anders war der Suanpan der Ost-Asiaten, nicht viel anders auch die Rechentafel, die an Ende des 15. Jahrhunderts in Deutschland von allgemeinem Gebrauche war, und welche von Büchern aus jener Zeit dem Pythagoras zugeschrieben wird. Ein bedeutsames Denkmal in dieser Beziehung ist die *margaritha philosophica* des Gregorius Reisch (*Heidelbergae* 1496, *Argentorati* 1512 und häufiger). In diesem mannigfach merkwürdigen Buche*) findet sich nämlich ein Holzschnitt, auf welchem Pythagoras, wie es die Ueberschrift ausser Zweifel lässt, mit einer Rechentafel abgebildet ist, während neben ihm Boethius eine Rechnung mit Ziffern ausführt, die mit den jetzigen völlig übereinstimmen. Auf letzteren Punkt werden wir sogleich noch zurückkommen. Vorläufig galt es uns nur wahrscheinlich zu machen, dass schon den alten Griechen der ἄβαξ Nichts fremdes war, dass wenigstens die Pythogoräer und sonstige Mathematiker mit ihm vertraut waren.

Wenn aber diese Thatsache anerkannt ist, dann war bei der Unbehilflichkeit der metallnen Rechentafeln nichts natürlicher, als dass man bald darauf kemmen musste, in Ermanglung einer solchen einen Abacus in den Sand zu zeichnen und die Knöpfchen durch Punkte zu ersetzen. Dann war es auch ein leichter Schritt, die in jeder Columne enthaltenen Punkte durch ein Zahlzeichen anzugeben. Anfangs mochten dazu die Buchstaben des Alphabetes dienen, wenigstens haben wir keinen Grund das Gegentheil anzunehmen. Später aber wurden von Einigen, wie die Quellen sagen**) statt der Buchstaben besondere Zeichen mit besonderen Namen gewählt; und diese Einige waren wohl nur solche, die mit indischen und semitischen Völkern auf Reisen zusammengekommen waren, denn sowohl jene Zeichen als ihre Namen weisen deutlich auf diesen Ursprung hin. Gemeingut, selbst

*) Die strassburger Ausgabe, die einzige, deren wir uns bedienen konnten, enthält eine Karte, auf welcher Amerika verzeichnet ist; sowie eine hebräische Grammatik, welches nicht ohne Interesse sein dürfte, wenn man die Schwierigkeiten vergleicht, mit denen noch Luther bei seiner Bibelübersetzung zu kämpfen hatte.

**) Die hierher gehörige Stelle aus der Geometrie des Boethius ist bei Mannert und Chasles abgedruckt. Dann auch bei Nesselmann S. 93.

der Gelehrten, war aber diese letztere Neuerung gewiss nicht, geschweige denn dass sie ins Volksleben übergegangen wäre.

Deshalb finden wir auch so lange keinen sicheren Beleg vom Gebrauche eines solchen Columnenwerthen bis zu *Sextus Julius Africanus*, der um das Jahr 222 unserer Zeitrechnung in seinem *κεστοί* eine römische Signaleinrichtung beschreibt, die eines solchen sich bedient. Es waren nämlich drei Signalstangen aufgerichtet und an jeder konnten Fackeln befestigt werden. Dann bedeutete jede Flamme links eine Einheit, in der Mitte Zehen und rechts Hundert*).

Solche Andeutungen mögen noch hin und wieder vorhanden sein. Zur Gewissheit aber wird das bisher Ausgesprochene durch eine berühmt gewordene Stelle aus der Geometrie des Boethius, welche, wenn auch nicht in allen Manuscripten, doch in zwei an verschiedenen Orten aufbewahrten sich findet. Der Codex dieser Geometrie in Chartres, sowie der in Altdorf beide aus dem elften Jahrhunderte, beschreibt ganz deutlich eine Rechentafel und setzt hinzu, die früheren Mathematiker hätten sie dem Erfinder zu Ehren Tafel des Pythagoras genannt, in späterer Zeit habe man dafür das Wort *abacus* eingeführt. Andere Exemplare haben allerdings auch diese Namen, aber statt der Rechentafel eine Multiplicationstabelle und daher rührt die so lange verbreitete apocryphe Meinung, als habe das sogenannte Einmaleins Pythagoras zum Verfasser. Die erwähnten Manuscripte haben ferner beide jene schon oben angeführten Zeichen, die unter sich nur wenig verschieden**) ihre Verwandtschaft mit den jetzt gebräuchlichen Ziffern auch dem ungeübtesten Auge verrathen, während die Namen wenigstens zum grössten Theil von Nesselmann als semetisch erklärt sind.

Wenn daraus geschlossen werden kann, dass Boethius einen Positionswerth von Ziffern kannte, so war diese Ansicht zu Anfang des 16. Jahrhunderts zur Genüge verbreitet. Das ist der Sinn jenes Holzschnittes aus der *margaritha philosophica*. Dasselbe bezeugt ein anderes gleichzeitiges Werk, welches Kästner in seiner Geschichte der Mathematik (Bd. I, S. 82) beschreibt, nämlich die *Arithmetice opuscula duo Theodorici Tzwivel, Monasterii* 1507. In diesem heisst es ausdrücklich von den neun Ziffern: *characteres sive numerorum apices a divo Severino Boethio nuncupantur*.

Durch diese nicht wegzuleugnende Uebereinstimmung so vieler Quellen aus den verschiedensten Zeiten scheint es uns zur Evidenz erwiesen, dass schon die alten Griechen und Römer eine Rechenmethode besassen, welche von dem Positionswerthe der Zahlzeichen Gebrauch machte und dass nur drei allerdings wesentliche Momente der Verschiedenheit von der heutigen Zifferschrift es waren, die es erlauben, noch von einer Einführung derselben zu sprechen. Diese Momente bestehen darin, dass

1) der Abacus der Alten nur eine Rechenmethode, nicht aber eine Schrift war;
2) dass die Alten Columnen nöthig hatten, um den Stellungswerth der einzelnen Zahlzeichen anzugeben;
3) dass eben deshalb um das Nichtvorhandensein von Einheiten eines bestimmten Ranges anzugeben, das Leerlassen der betreffenden Columne genügte, während wir uns dazu eines besonderen Zeichens, der Null bedienen.

*) Vergl. *Vincent* in den *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences* für den 3. Januar 1842 (T. XIV, p. 43).

**) Die Zeichen vergl. Nesselmann S. 100, die Namen und deren Ableitung S. 102.

Die Hauptfrage ist also die: Wo wurde das Zeichen der Null erfunden, wann und durch wen wurde es in Europa bekannt?

Den früher erwähnten Hypothesen, als fände sich die Null schon bei den Griechen, dürfen wir nur wenig Gewicht beilegen, weil auch, wenn sie überhaupt begründet sind, keine der aus diesem Gebrauche so leicht folgenden Consequenzen irgend Beglaubigung finden. Wir stimmen daher mit der verbreitetsten Ansicht überein, dass den Indern die Ehre dieser Erfindung zukommt, und dass von ihnen erst die Araber sie erhielten in einer Zeit, deren Ermittelung wir Anderen überlassen müssen, denen die Werke in jener Sprache zugänglich sind.

Nur so viel müssen wir bemerken, dass die Behauptung von Libri*), als hätten die Araber im Jahre 700 die indischen Ziffern noch nicht gekannt, völlig unhaltbar erscheint. *Abul — Pharajii hist. compend. dynast.* sagt auf S. 129 (nicht S. 127 wie bei Libri citirt ist) Chalif Welid I. habe 699 das Gebot erlassen, die öffentlichen Bücher künftig arabisch zu führen, ohne etwas über die Zahlenbezeichnung hinzuzusetzen. Die Stelle in des *Theophanes Chronicon* aber ist so unverständlich**), dass wir es für sehr gewagt halten, ihr mit dem Commentator *Jacobus Goar* (um 1500) den Sinn beizulegen, als hätten die Araber damals noch keine Ziffernschrift gehabt. Denn jedenfalls war denselben doch, wie aus anderen Quellen bekannt genug ist, die Bezeichnung der Zahlen durch Buchstaben gebräuchlich, und die war nicht schwerer und nicht leichter als die der Griechen. Es war also kein Grund vorhanden, die Zahlen auf griechische Art schreiben zu lassen, während alles Uebrige arabisch eingetragen werden musste. Bei dem gänzlichen Mangel authentischer Nachrichten***) ist daher dem auch sonst unzuverlässigen Theophanes hier kein Glaube zu schenken. Am wenigsten aber möchten wir, wie Libri es thut, die Erklärung eines späten Commentators als quellenmässige Ansicht substituiren.

So wissen wir denn positiv nur, dass Alkindi im 9. Jahrhunderte die indische Arithmetik kannte; wahrscheinlich aber war sie schon viel früher bekannt. Jedenfalls kam die neue Arithmetik durch die Araber nach Spanien und bildete einen der Gegenstände, die an den dortigen gelehrten Schulen ausgebildet wurden; dieselben gelehrten Schulen, deren productiv mathematische Bedeutsamkeit man zu lange unterschätzt hat. Freilich war die Abgeschlossenheit von dem übrigen Europa einerseits und das mangelnde Interesse für die Wissenschaft andrerseits der Art, dass nur wenig von den neuen Entdeckungen durchdrang. So existiren schon vor dem Jahre 1200 deutliche Spuren einer Buchstabenrechnung †) bei *Ibn Almonam*, bei *Alahdam* und bei *Ibn Albanhâ*, während erst *Franciscus Vieta* (1540—1603) als europäischer Erfinder derselben gilt. Ganz ähnlich ging es mit der decadischen Ziffernrechnung. Während sie bei den östlichen dann bei den westlichen Arabern mehr und mehr blühte, ging parallel damit ein allmäliges Vergessen

*) Vergl. *Libri, Histoire des sci. math. en Italie T. I. p.* 378.

**) *Καὶ ἐκώλυσε γράφεσθαι Ἑλληνιστὶ τοὺς δημοσίους τῶν λογοθεσίων κώδικας, ἀλλ' Ἀραβίοις αὐτά παρασημαίνεσθαι χωρὶς τῶν ψήφων, ἐπειδὴ ἀδύνατον τῇ ἐκείνων γλώσσῃ μονάδα ἢ δυάδα ἢ τριάδα ἢ ὀκτὼ ἥμισυ ἢ τρία γράφεσθαι· διὸ καὶ ἕως σήμερόν εἰσιν σὺν αὐτοῖς νοτάριοι Χριστιανοί.*

***) Herr Professor G. Weil, der gelehrte Verfasser der Geschichte der Chalifen, versichert uns, dass selbst das von Abulpharajius angeführte Gesetz in älteren Quellen nirgends erwähnt werde.

†) Vergl. Woepke in dem *Comptes Rendus* vom 17. Juli 1854.

des früheren Abacussystemes in dem christlichen Europa, so dass nur einige erwähnenswerthe Werke über diese Rechnungsmethode sporadisch auftauchen; und auch diese nur innerhalb eines bestimmten engen Zeitraumes von 150 Jahren, vom Ende des 10. bis zur Mitte des 12. Jahrhunderts. Es sind dieses Werke, die alle einerlei Ursprung haben, die alle der von Gerbert in Reims gestifteten Schule angehören.

An der Spitze steht die berühmte Abhandlung „*de numerorum divisione*", welche von einer Widmung an Constantinus als Vorrede begleitet ist. Auffallender Weise findet sich dieselbe nicht nur in den Werken Gerberts (der bekanntlich als Pabst Sylvester II. 1003 starb), sondern auch in fast wörtlicher Uebereinstimmung unter den Werken des englischen Mönchs Beda Venerabilis, der drei Jahrhunderte früher (675—735) lebte. Es scheint indessen keinem Zweifel unterworfen, dass Gerbert der wahre Verfasser dieser Unterweisung in der Methode des Abacus ist, und zwar dass er die Kenntniss derselben aus der Geometrie des Boethius geschöpft hat.

Für das Erstere spricht ausser dem Zeugniss des *William von Malmesbury* (um 1250), der das Datum der Schrift näher auf das Jahr 999 präcisirt *) noch die Bemerkung des Richerus, eines Freundes Gerberts, dass „wer in der Kunst des Abacus sich unterrichten wolle, das Buch lesen müsse, welches Gerbert an C. den Gramatiker geschrieben habe" **). Und dass dieser C. der Gramatiker Niemand anders als jener Constantinus ist, geht wohl mit Bestimmtheit daraus hervor, dass auch sonst noch Briefe mathematischen Inhaltes von Gerbert an seinen Freund Constantinus, einen Mönch der Abtei Fleury existiren ***), während bei Beda dieser Name nirgends weiter vorkommt. Zudem ist es durch den neuesten Herausgeber von Beda's Werken klar genug gezeigt, mit welcher Schamlosigkeit man diesem Autor fremde Arbeiten zuschrieb †); und ziehen wir endlich noch in Betracht, dass nach der so gründlichen Darstellung der *biographie universelle* (neueste Ausgabe) Beda niemals England verlassen hat, dass also seine Kenntnisse in der Arithmetik nur um so räthselhafter erscheinen würden, so ist die Autorschaft Gerberts wohl bestimmt genug nachgewiesen.

Eben so evident erscheint es uns, dass Gerbert seine Kenntnisse in dieser Beziehung aus der Geometrie des Boethius und nicht, wie man sonst wohl behauptete, von den Arabern her hatte. Der schlagendste Grund dafür, den zuerst Chasles anführte, liegt darin, „dass zur Zeit Gerberts die Mauren in Spanien, sowie die Indier und Araber sich der Null (oder des Punktes als Null) bedienten; so dass Gerbert, indem er ihr Zahlensystem lieferte, von der Null Gebrauch gemacht und ausdrücklich gesprochen hätte, wovon wir aber in dem genannten Werke keine Spur finden, in welchem wir vielmehr annehmen müssen, dass dieses Hilfszeichen durch die Anwendung der

*) Vergl. *Montucla, Histoire des mathématiques, nouvelle édition T. I. p.* 501. Es wäre also kurz vor seiner Erhebung zum Pabste geschrieben, da diese am 2. April 999 stattfand.

**) *Richeri historiarum libri IIII* in den von Pertz herausgegebenen *monumenta Germaniae historica, T.* 3, *p.* 618. Die hierher gehörigen Stellen finden sich auch in einer Abhandlung von *Chasles: Comptes rendus* vom 23. Januar 1843.

***) Vergl. *Histoire literaire de la France, T. VI, p.* 576 und 583.

†) *Giles* sagt in der Vorrede zu Beda's Werken, London 1843: *The shamelessness, with which works were falsely ascribed to Bede is sufficiently evident from one instance. The musical tracts contain French names of airs, but that language could not have been spoken till many ages after the time of Bede.*

Columnen ersetzt wurde, wie bei Boothius." *) Zur Unterstützung dient dann der schon erwähnte Richerus, welcher ausdrücklich sagt: *In geometria vero non minor in docendo labor expensus est, cujus introductioni abacum, id est tabulam dimensionibus aptam opere scutarii effecit. Cujus longitudini in viginti septem partes diductae novem uumero notas omnem numerum significantes disposuil. Ad quarum etiam similitudinem mille corneos effecit caracteres, qui per viginti septem abaci partes mutuati cujusque numeri multiplicationem sive divisionem designarent.* Eine deutliche Beschreibung der römischen Rechentafel mit neun Zahlzeichen und folglich ohne Null. Endlich spricht noch eine Stelle aus dem Briefe *ad Constantinum* dagegen, dass arabische Lehren zu Grunde liegen. In jener Vorrede heisst es nämlich: *Itaque quum aliquot lustra jam transierint, ex quo nec librum, nec exercitium harum rerum habuerimus, quaedam repetita memoria eisdem verbis proferimus, quaedam eisdem sententiis.* Daraus geht hervor, dass Gerbert, was er hier lehrt, selbst aus einem bestimmten Buche schöpfte, welches er vor einer geraumen Zeit, mindestens 15—20 Jahre früher in Händen gehabt hatte. Ausserdem ist aus *Ademar von Chabanois*, seines Zeitgenossen, Chronik bekannt, dass Gerbert seine ersten Studien auf einer Rundreise durch Frankreich machte, während er erst später in Spanien den mündlichen Unterricht des Bischoffs Haïton genoss. **) Wenn nun noch heute ein Manuscript des Boethius aus dem elften Jahrhunderte in Chartres existirt, welches seinem Inhalte nach wohl der Abhandlung Gerberts zu Grunde liegen konnte, dann ist doch wohl anzunehmen, dass auch zu Gerberts Zeiten ein solches Manuscript in Frankreich existirte, dessen Abschrift vielleicht der Codex von Chartres ist.

Von sonstigen Werken, die denselben Gegenstand in der genannten Zeit behandeln, sind hauptsächlich die Schriften von Gerland und von Radulph v. Laon erhalten, sowie eine Abhandlung von unbekanntem Verfasser *regule abaci* betitelt, welche Chasles in einem alten Manuscripte wahrscheinlich aus dem Anfange des 12. Jahrhunderts aufgefunden hat. ***) Diese alle enthalten nicht blos Zeichnungen von Rechentafeln, sondern auch Ziffern, die mit denen im Boethius die grösste Aehnlichkeit haben, und welche dieselben semitischen Namen führen. Zum Theil liefern sie sogar die Rechnungsmethoden als Einleitung in die Geometrie, ganz wie sie bei Boethius eingeführt werden, so dass alle Einzelnheiten die Ueberzeugung noch bestärken müssen, dass Gerbert und seine Schule ihre Lehren vom Abacus nicht aus arabischen, sondern aus lateinischen Quellen schöpften.

Bis die indische Arithmetik in Europa bekannt wurde, sollte es noch einige Zeit anstehen. Zwar existiren Uebersetzungen aus dem Arabischen in's Lateinische, worin sie auseinandergesetzt wird, so die *Ysagoge alchorismi in artem astronomicam a magistro Abraham Judeo ispano, qui dicitur Savacorda*, 1134; aber doch blieben Uebersetzung wie Original ohne grössere Verbreitung. Da zu Beginn des 13. Jahrhunderts erschienen plötzlich von allen Seiten Bücher über die neue Rechnungsart, die mit fast unbegreiflicher Geschwindigkeit die früheren Methoden verdrängten, bis kaum eine Spur davon übrig blieb. Auch hier finden wir einen Mann an der Spitze, der wenn auch nicht vom Schicksal in so günstige Verhältnisse gestellt wie Gerbert, doch schon in der bescheidenen Lage als Kaufmann, Schule bil-

*) Vergl. Chasles, Geschichte der Geometrie, S. 529 der Uebersetzung.

**) Die *Histoire literaire de la France VI,* 560 citirt hierfür: *Adem, chr.* 169.

***) Der wörtliche Abdruck dieser Schrift in den *comptes rendus T. XVI, p.* 237.

dend auftrat und Denkmale seines Geistes hinterlies, die ihm nicht blos der Zeit nach einen Platz zwischen Archimed und Newton anweisen.

Leonardus mit dem Beinamen Bigollone war der Sohn eines Schreibers, der für einen Kaufmann aus Pisa die Douanengeschäfte an der nordafrikanischen Küste führte und der auch nur unter dem Spottnamen Bonaccio bekannt ist. Nach ihm nannte sich der Sohn Filius Bonaccio und daraus entstand durch Zusammenziehung der Name Leonardo Fibonacci Pisano. Schon frühe an dem Aufenthalsorte seines Vaters in die Geheimnisse der arabischen Rechenkunst eingeweiht, genügte es ihm nicht nur diese Methoden zu kennen, und auf den Geschäftsreisen, die er nach Aegypten, nach Syrien, nach Griechenland, Sicilien unn der Provence machen musste, suchte er sich überall neue Kenntnisse zu verschaffen. So war sein wissenschaftlicher Gang der, dass er zuerst die indische Arithmetik kennen lernte, welche er Abacus nennt, und dann erst die europäischen Methoden, die er als den Algorithmus des Pythagoras bezeichnet. Sein scharfer Geist erkannte alsbald die Vorzüge der ersteren vor den letzteren, die ihm so bedeutend erschienen, dass er sich ausdrückt: *Algorismum Pictagorae quasi errorem computavi respectu modi Yndorum.*

So entstand sein *liber Abacci compositus a Leonardo filio Bonacci Pisano in anno* 1202*), welches nur der Anfang einer ganzen Reihe von Büchern war, die den Algorithmus lehrten. Eigenthümlicher Weise scheint nämlich nur bei Fibonacci die Verwechslung eingetreten zu sein, dass er die Methode des Pythagoras Algorithmus nennt, während von allen anderen Autoren gerade umgekehrt die indische Arithmetik mit 9 bedeutsamen Ziffern und der 0 als zehntem Zeichen unter dem Algorithmus verstanden wird. So in den Schriften des *John of Halifax* (gewöhnlicher *Johannes de sacro Bosco* 1232); in einer Schrift aus dem 13. Jahrhunderte: *Opusculum de praxi numerorum, quod Algorismum vocant*, welche von *Jodocus Chlichtovaeus* 1503 herausgegeben wurde; in dem *Algorithmus de numeris integris, fractis, regulis communibus et de proportionibus* des Georg Purbach (1423—1461); in der *margaritha philosophica*; und selbst noch später wie bei Schoner, *Algorithmus demonstratus, Francofurti* 1599 etc.

Allerdings scheint der Name Algorithmus arabischen Ursprunges zu sein und so vorzugsweise für die Rechnungsmethoden zu passen, welche zuerst bei den Arabern einheimisch geworden waren. Möge man nun dieses Wort als Zusammensetzung des arabischen Artikels *al* mit dem griechischen ἀριθμος gelten lassen, oder es nach der Hypothese des gelehrten Orientalisten Reinaud von dem Namen des arabischen Mathematikers *Mohamed ben-Moussa Alkharesmi* (starb 812 am Hofe *Harun al Raschid's*) ableiten. Für die erstere Etymologie spricht indessen wohl die ganz ähnliche Entstehung des Wortes „Almagest“ aus *al* und μέγιστος.

Fassen wir unsere bisherigen Untersuchungen zusammen, so erhalten wir in Kürze ausgedrückt folgende Resultate:

1) Allen Sprachen des indogermanischen Stammes ist ein decadisches Zahlensystem gemeinsam.
2) Bei allen Völkern dieses Stammes hat sich eine Rechnungsmethode gebildet, welche gleichfalls von dem Systeme Gebrauch macht, indem die verschiedene Rangordnung durch die Stellung der Zeichen ausgedrückt wird.

*) Der Anfang ist abgedruckt bei Libri T. II. p. 287.

3) Die Europäer gingen nie über diese Rechnungsmethode hinaus und bedienten sich dazu einer mit Columnen versehenen Rechentafel.
4) Bei den Indiern machte die Erfindung der Null die Columnen unnöthig und von da an nimmt der frühere Kunstgriff ganz den Charakter einer Schrift an.
5) Die Ziffernschrift verbreitete sich als solche unter dem Volke der Araber, während die Rechnungsmethode nur bei einzelnen Gelehrten, wie Boethius, Gerbert sich erhielt.
6) Die Einführung der zehn Zeichen der Indier gehört dem Leonardo Fibonacci an und seit dieser Zeit wird die Rechenkunst mehr und mehr Volkseigenthum.

Auf diese Weise aufgefasst, erscheint die Leistung des Pisaners in einem ganz neuen Lichte. Es war nicht ein dem europäischen Bildungsgange ganz Fremdes, was er einführte. Dazu hätte jeder andere auch minder begabte Geist hingereicht, wenn der Zufall ihn die Entdeckung hätte machen lassen. Es war etwas scheinbar viel Geringeres, aber in Wirklichkeit viel Bedeutsameres, was er that. Er lernte den Unterschied der europäischen und der indischen Arithmetik kennen. Er begriff, dass die kleine Verschiedenheit derselben, wonach die eine an eine Rechentafel gebunden, die andere eine in jeder Beziehung freie Kunst war, von so grosser Wichtigkeit werden musste, dass er ausrief: Gegen die Indier war selbst Pythagoras nur ein Stümper! Um dieses im Voraus einzusehen, dazu gehörte allerdings das gewaltige Genie eines Leonardo Fibonacci. Es scheint fast unmöglich, dass Gerbert bei seinem Aufenthalte in Spanien die Ziffernschrift nicht sollte kennen gelernt haben; und doch kam er nicht über die Methode des Abacus hinaus. Er blieb in der alten Gewohnheit befangen. Der Pisaner erst zeigte der Welt, welche grosse Erfolge durch die kleinste Umänderung gewonnen werden konnten. Und so musste sein Name unter die der hervorragendsten Mathematiker eingetragen werden, wenn auch keins seiner sonstigen Werke sich erhalten hätte. Um wie viel schöner ist aber die nachträgliche Beglaubigung seiner Verdienste durch die im vorigen Jahre von *Baldassare Buoncompagni* in der ambrosianischen Bibliothek zu Mailand entdeckten Schriften, welche Leonardo Fibonacci auch als Meister in der Zahlentheorie documentiren, welche ihn als Vorgänger der grossen Algebristen zeigen, die erst Jahrhunderte nach ihm blühten.

V.

Ueber die Entwickelung vielfacher Integrale.

Von O. Schlömilch.

I.

Bekanntlich hat L. Dirichlet zuerst bewiesen, dass der Werth des vielfachen Integrales

$$\int\int\int \dots x^{m-1}\, y^{n-1}\, z^{p-1} \dots dx\, dy\, dz \dots,$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven, der Bedingung

$$1 \geqq x + y + z + \dots \geqq 0$$

genügenden $x, y, z \dots$ beziehen, durch

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)\dots}{\Gamma(1+m+n+p+\dots)}$$

dargestellt wird; dieser elegante in der Theorie vielfacher Integrale häufig anwendbare Satz erhielt später eine Erweiterung durch Liouville, welcher die allgemeinere Formel

$$\int\int\int \dots x^{m-1}\, y^{n-1}\, z^{p-1} \dots f(x+y+z+\dots)\, dx\, dy\, dz \dots$$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)\dots}{\Gamma(m+n+p+\dots)} \int_0^1 \varrho^{m+n+p\dots-1} f(\varrho)\, d\varrho$$

ableitete, worin linker Hand die für $x, y, z \dots$ geltenden Bedingungen dieselben wie vorhin sind und $f(\varrho)$ eine beliebige Function von ϱ bedeutet. Aber auch dieses Resultat ist nur ein specieller Fall des umfassenderen Theoremes

$$\int\int\int \dots \frac{x^{m-1}\, y^{n-1}\, z^{p-1} \dots f(x+y+z+\dots)}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\dots)^{m+n+p+\dots}}\, dx\, dy\, dz \dots$$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)\dots}{\Gamma(m+n+p+\dots)} \int_0^1 \frac{\varrho^{m+n+p+\dots-1} f(\varrho)\, d\varrho}{(1+\alpha\varrho)^m\,(1+\beta\varrho)^n\,(1+\gamma\varrho)^p \dots},$$

woraus durch Variation der beliebigen Constanten $\alpha, \beta, \gamma \dots$ noch zahlreiche Formeln ähnlicher Art hergeleitet werden können. Das genannte Theorem habe ich zuerst im 2. Bande meiner Analytischen Studien (§. 23) mittelst der Dirichlet'schen Integrationsmethode unter Assistenz des

Fourier'schen Satzes entwickelt, kann aber gegenwärtig einen weit einfacheren Beweis desselben geben, welcher nur die Kenntniss der Formel

$$1)\qquad \int_0^1 \frac{\xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\,d\xi}{[1+a\xi+b(1-\xi)]^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,\frac{1}{(1+a)^p\,(1+b)^q}$$

in Anspruch nimmt. Von der Richtigkeit derselben überzeugt man sich durch die Substitution

$$\frac{(1+a)\,\xi}{1+a\xi+b(1-\xi)} = \eta,$$

woraus

$$\frac{(1+b)\,(1-\xi)}{1+a\xi+b(1-\xi)} = 1-\eta, \qquad \frac{(1+a)\,(1+b)\,d\xi}{[1+a\xi+b\,(1-\xi)]^2} = d\eta;$$

man erhält nämlich

$$\int_0^1 \frac{\xi^{p-1}\,(1-\xi)^{q-1}\,d\xi}{[1+a\xi+b\,(1-\xi)]^{p+q}} = \frac{1}{(1+a)^p\,(1+b)^q}\int_0^1 \eta^{p-1}\,(1-\eta)^{q-1}\,d\eta$$

was mit der gemachten Angabe übereinstimmt. Lässt man $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ an die Stellen von a und b treten, so giebt Nr. 1)

$$2)\qquad \int_0^1 \frac{\xi^{p-1}\,(1-\xi)^{q-1}\,d\xi}{[a\xi+b\,(1-\xi)+c]^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,\frac{1}{(a+c)^p\,(b+c)^q}$$

und hieraus lassen sich durch mehrmalige Differenziation in Beziehung auf c neue Formeln ableiten, bei denen der Exponent von $a\xi+b\,(1-\xi)+c$ beliebig viel Einheiten mehr als $p+q$ beträgt.

Was nun das erwähnte vielfache Integral betrifft, so wird es hinreichen, die Reduction desselben bei einer nicht zu grossen Anzahl Variabelen zu zeigen, da aus dem Gange der Rechnung unmittelbar einleuchtet, dass das Verfahren bei jeder anderen Anzahl von Variabelen dasselbe bleibt. Wir betrachten demgemäss das vierfache Integral

$$S = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{x^{m-1}\,y^{n-1}\,z^{p-1}\,u^{q-1}\,f(x+y+z+u)}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta u)^{m+n+p+q}}\,dx\,dy\,dz\,du,$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven, der Bedingung

$$1 \geqq x+y+z+u \geqq 0$$

genügenden x, y, z, u erstrecken sollen; dabei sind unter Beibehaltung der angegebenen Reihenfolge der Integrationen die Grenzen

für x: $x=0$ und $x=1$,
„ y: $y=0$ „ $y=1-x$,
„ z: $z=0$ „ $z=1-x-y$,
„ u: $u=0$ „ $u=1-x-y-z$.

Das in Rede stehende Integral S ist ein specieller Fall des folgenden

$$\int_0^{\varrho}\!\int_0^{\varrho-x}\!\int_0^{\varrho-x-y}\!\int_0^{\varrho-x-y-z} \frac{x^{m-1}\,y^{n-1}\,z^{p-1}\,u^{q-1}\,f(x+y+z+u)}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta u)^{m+n+p+q}}\,dx\,dy\,dz\,du,$$

welches eine Funktion der beliebigen Grösse ϱ bildet und mit $F(\varrho)$ bezeichnet werden möge; man hat dann $S=F(1)$ oder auch, weil $F(\varrho)$ mit ϱ

gleichzeitig verschwindet, $S = F(1) - F(0)$. Um weiter $F(\varrho)$ zu finden, schreiben wir

$$F(\varrho) = \int_0^\varrho x^{m-1}\,dx\,\varphi(x,\varrho),$$

$$\varphi(x,\varrho) = \int_0^{\varrho - x} y^{n-1}\,dy\,\psi(y,\varrho), \quad \psi(y,\varrho) = \int_0^{\varrho - x - y} z^{p-1}\,dz\,\chi(z,\varrho),$$

$$\chi(z,\varrho) = \int_0^{\varrho - x - y - z} \frac{u^{q-1} f(x+y+z+u)\,du}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta u)^{m+n+p+q}}$$

und differenziren in Beziehung auf ϱ, indem wir von der bekannten Regel

$$\frac{d}{d\varrho}\int_a^b \Phi(x,\varrho)\,dx = \Phi(b,\varrho)\frac{db}{d\varrho} - \Phi(a,\varrho)\frac{da}{d\varrho} + \int_a^b \frac{d\Phi(x,\varrho)}{d\varrho}\,dx$$

Gebrauch machen und berücksichtigen, dass im vorliegenden Falle

$$\varphi(\varrho,\varrho) = 0 \text{ und } \psi(\varrho - x,\varrho) = 0$$

ist; es ergiebt sich

$$\frac{dF(\varrho)}{d\varrho} = \int_0^\varrho x^{m-1}\,dx\,\frac{d\varphi(x,\varrho)}{d\varrho},$$

$$\frac{d\varphi(x,\varrho)}{d\varrho} = \int_0^{\varrho - x} y^{n-1}\,dy\,\frac{d\psi(y,\varrho)}{d\varrho}, \quad \frac{d\psi(y,\varrho)}{d\varrho} = \int_0^{\varrho - x - y} z^{p-1}\,dz\,\frac{d\chi(z,\varrho)}{d\varrho},$$

$$\frac{d\chi(z,\varrho)}{d\varrho} = \frac{(\varrho - x - y - z)^{q-1} f(\varrho)}{[1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta(\varrho - x - y - z)]^{m+n+p+q}}$$

oder bei Substitution von jeder Gleichung in die vorhergehende

$$\frac{dF(\varrho)}{d\varrho} = f(\varrho)\int_0^\varrho\int_0^{\varrho - x}\int_0^{\varrho - x - y} \frac{x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1} (\varrho - x - y - z)^{q-1}\,dx\,dy\,dz}{[1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta(\varrho - x - y - z)]^{m+n+p+q}}.$$

Um den Werth des vorstehenden dreifachen Integrales, worin $f(\varrho)$ nicht mehr vorkommt, zu entwickeln, nehmen wir der Reihe nach

$$z = (\varrho - x - y)\,\zeta, \quad y = (\varrho - x)\,\eta, \quad x = \varrho\xi,$$

oder, was dasselbe ist,

$$x = \varrho\xi, \quad y = \varrho(1-\xi)\,\eta, \quad z = \varrho(1-\xi)(1-\eta)\,\zeta,$$

und erhalten

$$3) \qquad \frac{dF(\varrho)}{d\varrho} = \varrho^{m+n+p+q-1} f(\varrho)\,T,$$

worin T das dreifache Integral

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\xi^{m-1}(1-\xi)^{n+p+q-1}\,d\xi\,.\,\eta^{n-1}(1-\eta)^{p+q-1}\,d\eta\,.\,\zeta^{p-1}(1-\zeta)^{q-1}\,d\zeta}{[1+\alpha\varrho\xi+\beta\varrho(1-\xi)\eta+\gamma\varrho(1-\xi)(1-\eta)\zeta+\delta\varrho(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)]^{m+n+p+q}}$$

bezeichnet. Hier lässt sich die auf ξ bezügliche Integration nach Formel 1) ausführen und giebt

$$T = \frac{1}{(1+\alpha\varrho)^m} \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n+p+q)}{\Gamma(m+n+p+q)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{\eta^{n-1}(1-\eta)^{p+q-1}\,d\eta\,.\,\zeta^{p-1}(1-\zeta)^{q-1}\,d\zeta}{[1+\beta\varrho\eta+\gamma\varrho(1-\eta)\zeta+\delta\varrho(1-\eta)(1-\zeta)]^{n+p+q}},$$

wiederum kann jetzt mit Hülfe der Formel 1) in Beziehung auf η integrirt werden; es bleibt

$$T = \frac{1}{(1+\alpha\varrho)^m\,(1+\beta\varrho)^n} \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p+q)}{\Gamma(m+n+p+q)} \int_0^1 \frac{\zeta^{p-1}(1-\zeta)^{q-1}\,d\zeta}{[1+\gamma\varrho\zeta+\delta\varrho(1-\zeta)]^{p+q}},$$

endlich bei nochmaligem Gebrauche derselben Formel:

$$4)\quad T = \frac{1}{(1+\alpha\varrho)^m\,(1+\beta\varrho)^n\,(1+\gamma\varrho)^p\,(1+\delta\varrho)^q} \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(m+n+p+q)}.$$

Zufolge der Gleichung 3) ist nun

$$F(\varrho) = \int \varrho^{m+n+p+q-1} f(\varrho)\,T\,d\varrho$$

mithin

$$S = F(1) - F(0) = \int_0^1 \varrho^{m+n+p+q-1} f(\varrho)\,T\,d\varrho,$$

hier bedarf es nur der Substitution des für T gefundenen Werthes, um für S sogleich die Form zu erhalten, welche dem allgemeinen Theoreme entspricht.

Ersetzt man $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ durch $\frac{\alpha}{\varkappa}, \frac{\beta}{\varkappa}, \frac{\gamma}{\varkappa} \ldots$, so hat man etwas allgemeiner

$$5)\quad \int\!\!\int\!\!\int \ldots \frac{x^{m-1}\,y^{n-1}\,z^{p-1} \ldots f(x+y+z+\ldots)}{(\varkappa+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^{m+n+p+\ldots}}\,dx\,dy\,dz \ldots$$
$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)\ldots}{\Gamma(m+n+p+\ldots)} \int_0^1 \frac{\varrho^{m+n+p+\ldots-1} f(\varrho)\,d\varrho}{(\varkappa+\alpha\varrho)^m\,(\varkappa+\beta\varrho)^n\,(\varkappa+\gamma\varrho)^p \ldots};$$

durch Differenziation in Beziehung auf $\varkappa$ und Anwendung der bekannten Formeln

$$s\,\Gamma(s) = \Gamma(1+s), \quad dP = P\,dlP$$

ergiebt sich noch

$$6)\quad \int\!\!\int\!\!\int \ldots \frac{x^{m-1}\,y^{n-1}\,z^{n-1} \ldots f(x+y+z+\ldots)}{(\varkappa+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^{m+n+p+\ldots+1}}\,dx\,dy\,dz \ldots$$
$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+m+n+\ldots)} \int_0^1 \frac{\varrho^{m+n+\ldots-1} f(\varrho)\,d\varrho}{(\varkappa+\alpha\varrho)^m\,(\varkappa+\beta\varrho)^n \ldots} \left\{\frac{m}{\varkappa+\alpha\varrho} + \frac{n}{\varkappa+\beta\varrho} + \ldots\right\}$$

und überhaupt würde es keine Schwierigkeit haben, durch mehrmalige Differenziationen in Beziehung auf $\varkappa$ den Exponenten von $\varkappa+\alpha x+\ldots$ um beliebig viele Einheiten zu erhöhen. Wie die Dirichlet'sche Formel kann jede der Gleichungen 5) und 6) noch dadurch etwas verallgemeinert werden, dass der Reihe nach

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^n, \quad \left(\frac{z}{c}\right)^p \ldots \text{ für } x,\ y,\ z \ldots$$

und $\frac{m}{\mathfrak{m}}, \frac{n}{\mathfrak{n}}, \frac{p}{\mathfrak{p}} \ldots$ für $m, n, p \ldots$

gesetzt wird; die Integrationen beziehen sich dann auf alle der Bedingung

$$1 \geq \left(\frac{x}{a}\right)^{\mathfrak{m}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\mathfrak{n}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\mathfrak{p}} + \ldots \geqq 0$$

genügenden positiven $x, y, z \ldots$

II.

Das vorhin benutzte Verfahren passt auch auf das Integral

$$S = \int\int\int \ldots x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1} \ldots f\left(\frac{1-x-y-z-\ldots}{1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots}\right) dx\, dy\, dz \ldots,$$

worin sich die Integrationen wiederum auf alle positiven der Bedingung

$$1 \geqq x+y+z+\ldots \geqq 0$$

genügenden $x, y, z \ldots$ erstrecken mögen. Nehmen wir z.B. drei Variabele und setzen

$$F(\varrho) = \int_0^{\varrho}\int_0^{\varrho-x}\int_0^{\varrho-x-y} x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1} f\left(\frac{1-x-y-z}{1+\alpha x+\beta y+\gamma z}\right) dx\, dy\, dz,$$

so ist ähnlich wie früher

$$S = F(1) - F(0)$$

und durch Differenziation in Beziehung auf ϱ

$$\frac{dF(\varrho)}{d\varrho} = \int_0^{\varrho}\int_0^{\varrho-x} x^{m-1} y^{n-1} (\varrho-x-y)^{p-1} f\left(\frac{1-\varrho}{1+\alpha x+\beta y+\gamma(\varrho-x-y)}\right) dx\, dy.$$

Mittelst der Substitutionen

$$x = \varrho\xi, \quad y = \varrho(1-\xi)\eta$$

ergiebt sich hieraus

$$\frac{dF(\varrho)}{d\varrho} = \varrho^{m+n+p-1}\int_0^1\int_0^1 \xi^{m-1}(1-\xi)^{n+p-1} d\xi \,.\, \eta^{n-1}(1-\eta)^{p-1} d\eta\, f\left(\frac{1-\varrho}{1+\sigma\varrho}\right),$$

wobei zur Abkürzung

$$\sigma = \alpha\xi + \beta(1-\xi)\eta + \gamma(1-\xi)(1-\eta)$$

gesetzt worden ist. Durch Multiplication mit $d\varrho$ und Integration zwischen den Grenzen $\varrho = 0$ bis $\varrho = 1$ erhalten wir weiter

$$S = \int_0^1 \varrho^{m+n+p-1} d\varrho \int_0^1\int_0^1 \xi^{m-1}(1-\eta)^{n+p-1} d\xi\, \eta^{n-1}(1-\eta)^{p-1} d\eta\, f\left(\frac{1-\varrho}{1+\sigma\varrho}\right);$$

wir kehren hier die Anordnung der Integrationen in der Weise um, dass wir uns die auf ϱ bezügliche Integration zuerst ausgeführt denken; zu dem Zwecke sei

$$\frac{1-\varrho}{1+\sigma\varrho} = \tau, \quad \text{also } \varrho = \frac{1-\tau}{1+\sigma\tau}, \quad d\varrho = -\frac{1+\sigma}{(1+\sigma\tau)^2} d\tau,$$

den Grenzen $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$ entsprechen dann die Grenzen $\tau = 1$ und $\tau = 0$, so dass wir erhalten

$$S = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1+\sigma)(1-\tau)^{m+n+p-1} f(\tau)}{(1+\sigma\tau)^{m+n+p+1}} \xi^{m-1}(1-\xi)^{n+p-1} d\xi \, \eta^{n-1}(1-\eta)^{p-1} d\eta \, d\tau.$$

Versparen wir die auf τ bezügliche Integration an's Ende, so muss zunächst das nach ξ und η genommene Integral

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\xi^{m-1}(1-\xi)^{n+p-1} \eta^{n-1}(1-\eta)^{p-1}}{(1+\tau\sigma)^{m+n+p+1}} (1+\sigma) \, d\xi \, d\eta$$

entwickelt werden, was nach den anfangs erwähnten Formeln keine Schwierigkeit hat; man findet als Werth des fraglichen Doppelintegrales

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)}{\Gamma(1+m+n+p)} \frac{1}{(1+\alpha\tau)^m (1+\beta\tau)^n (1+\gamma\tau)^p} \left\{ m\frac{1+\alpha}{1+\alpha\tau} + n\frac{1+\beta}{1+\beta\tau} + p\frac{1+\gamma}{1+\gamma\tau} \right\}$$

und hieraus ein einfaches Integral für S. Ueberhaupt ist

$$7) \qquad \int\int \ldots x^{m-1} y^{n-1} \ldots f\left(\frac{1-x-y-\ldots}{1+\alpha x+\beta y+\ldots}\right) dx\, dy \ldots$$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+m+n+\ldots)} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{m+n+\ldots-1} f(\tau)}{(1+\alpha\tau)^m (1+\beta\tau)^n \ldots} \left\{ m\frac{1+\alpha}{1+\alpha\tau} + n\frac{1+\beta}{1+\beta\tau} + \ldots \right\} d\tau.$$

Nimmt man bei zwei Variabelen $m = n = \frac{1}{2}$, $f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ und lässt nachher x^2, y^2, τ^2, $-\alpha^2$, $-\beta^2$ für x, y, τ, α, β eintreten, so hat man die Formel

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{(1-x^2)}} dx\, dy \sqrt{\frac{1-\alpha^2 x^2-\beta^2 y^2}{1-x^2-y^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\pi \int_0^1 \frac{\tau^2\, d\tau}{\sqrt{(1-\alpha^2\tau^2)(1-\beta^2\tau^2)}} \left\{ \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2\tau^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\tau^2} \right\},$$

welche bekanntlich zur Complanation des dreiachsigen Ellipsoides dient.

III.

Um zu einer weiteren und neuen Reduction eines vielfachen Integrales zu gelangen, betrachten wir zunächst das einfache Integral

$$\int_0^{2\pi} f[k \sin(\alpha+\vartheta)]\, d\vartheta = C.$$

Wir zerlegen dasselbe in die drei Theile

$$C = \int_0^{\frac{1}{2}\pi-\alpha} f[k\sin(\alpha+\vartheta)]\, d\vartheta + \int_{\frac{1}{2}\pi-\alpha}^{\frac{3}{2}\pi-\alpha} f[k\sin(\alpha+\vartheta)]\, d\vartheta$$

$$+ \int_{\frac{3}{2}\pi-\alpha}^{2\pi} f[k\sin(\alpha+\vartheta)]\, d\vartheta,$$

und benutzen die Substitution

$$\sin(\alpha+\vartheta)=z;$$

aus dieser folgt

$$\alpha+\vartheta=Arc\sin z,\quad \alpha+\vartheta=\pi-Arc\sin z,\quad \alpha+\vartheta=2\pi+Arc\sin z \text{ etc.}$$

jenachdem

$$0<\alpha+\vartheta<\tfrac{1}{2}\pi,\quad \tfrac{1}{2}\pi<\alpha+\vartheta<\tfrac{3}{2}\pi,\quad \tfrac{3}{2}\pi<\alpha+\vartheta<\tfrac{5}{2}\pi \text{ etc.}$$

Durch die vorgenommene Zerlegung sind diese Bedingungen der Reihe nach in den einzelnen Integralen erfüllt, mithin ist im ersten Integrale

$$d\vartheta=+\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

im zweiten

$$d\vartheta=-\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

und im dritten

$$d\vartheta=+\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Hiernach ergiebt sich augenblicklich

$$C=\int_{\sin\alpha}^{+1}f(kz)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}-\int_{+1}^{-1}f(kz)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}+\int_{-1}^{\sin\alpha}f(kz)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

d. i. bei gehöriger Zusammenziehung

$$C=2\int_{-1}^{+1}f(kz)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Demnach hat man für $z=\cos\Theta$ die Formel

$$\int_0^{2\pi}f[k\sin(\alpha+\vartheta)]\,d\vartheta=2\int_0^{\pi}f(k\cos\Theta)\,d\Theta$$

oder für $\tan\alpha=\frac{b}{a}$, $k=\sqrt{a^2+b^2}$

$$8)\qquad \int_0^{2\pi}f(a\cos\vartheta+b\sin\vartheta)\,d\vartheta=2\int_0^{\pi}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\Theta\right)d\Theta.$$

Mittelst dieser Formel lässt sich das Doppelintegral

$$S=\int_{-h}^{h}\int_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{\sqrt{h^2-x^2}}F(a'+b'x+c'y)\,(h^2-x^2-y^2)^m\,dx\,dy$$

leicht auf ein einfaches Integral reduciren. Durch Einführung der Polarcoordinaten mittelst der Gleichungen

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta,\quad dx\,dy=r\,dr\,d\vartheta$$

erhält man zunächst

$$S=\int_0^h\int_0^{2\pi}F(a'+b'r\cos\vartheta+c'r\sin\vartheta)\,(h^2-r^2)^m\,r\,dr\,d\vartheta$$

und nach Formel 8) wenn $a=b'r$, $b=c'r$ und $f(u)=F(a'+u)$ gesetzt wird

$$S=2\int_0^h\int_0^{\pi}F\left(a'+\sqrt{b'^2+c'^2}\,r\cos\Theta\right)(h^2-r^2)^m\,r\,dr\,d\Theta.$$

Das vorstehende Integral würde man gleichfalls erhalten, wenn man in der Gleichung

$$S = 2\int_{-h}^{h}\int_{0}^{\sqrt{h^2-x^2}} F(a'+\sqrt{b'^2+c'^2}\,x)\,(h^2-x^2-y^2)^m\,dx\,dy$$

die Polarcoordinaten mittelst der Formeln $x = r\cos\Theta$, $y = r\sin\Theta$ eingeführt hätte; es bietet aber die letztere Gestalt des Integrales den wesentlichen Vortheil, dass die Variabele y nicht mehr in der willkürlichen Function F vorkommt und dass folglich die auf y bezügliche Integration ausführbar ist. Mittelst der Substitution

$$y = \sqrt{(h^2-x^2)\,t}, \quad dy = \frac{\sqrt{h^2-x^2}}{2\sqrt{t}}\,dt$$

erhält man

$$\int_0^{\sqrt{h^2-x^2}} (h^2-x^2-y^2)^m\,dy = (h^2-x^2)^{m+\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{(1-t)^m}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}\,(h^2-x^2)^{m+\frac{1}{2}},$$

setzt man diesen Werth ein und stellt die erste und letzte Form von S zusammen, so ergiebt sich

$$9)\qquad \int_{-h}^{h}\int_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{\sqrt{h^2-x^2}} F(a+bx+cy)\,(h^2-x^2-y^2)^m\,dx\,dy$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}\int_{-h}^{h}(h^2-x^2)^{m+\frac{1}{2}}\,F(a+\sqrt{b^2+c^2}\,x)\,dx.$$

Mittelst dieser Gleichung können wir das vielfache Integral

$$\int\int\int\ldots F(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,(1-x^2-y^2-z^2-\ldots)^m\,dx\,dy\,dz\ldots$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven und negativen der Bedingung

$$1 \geqq x^2+y^2+z^2+\ldots \geqq 0$$

genügenden $x, y, z\ldots$ erstrecken, leicht in ein einfaches Integral verwandeln; es wird hinreichen, dies an dem dreifachen Integrale

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} F(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,(1-x^2-y^2-z^2)^m\,dx\,dy\,dz$$

nachzuweisen. Denkt man sich in der Formel 9) die Grössen

$$a,\quad b,\quad c,\quad h,\quad x,\quad y$$

durch

$$\alpha x,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \sqrt{1-x^2},\quad y,\quad z$$

ersetzt, so ist

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} F(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,(1-x^2-y^2-z^2)^m\,dy\,dz$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)^{m+\frac{1}{2}}\,F(\alpha x+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\,y)\,dy$$

und folglich wird das betrachtete, dreifache Integral gleich dem Doppelintegrale

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)^{m+\frac{1}{2}}\,F\left(\alpha x+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\,y\right)dx\,dy;$$

dieses kann wieder nach Formel 9) behandelt werden, wenn man $m+\frac{1}{2}$ für m, $a=0$, $b=\alpha$, $c=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ setzt; der Werth des dreifachen Integrales ist folglich

$$\frac{(\sqrt{\pi})^2\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\frac{4}{2})}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m+\frac{2}{2}}\,F\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,x\right)dx.$$

Ueberhaupt gilt für das $n$fache Integral die Reductionsformel

$$10)\quad \int\int\ldots(1-x^2-y^2-\ldots)^m\,F(\alpha x+\beta y+\ldots)\,dx\,dy\ldots$$
$$=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{n+1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m+\frac{n-1}{2}}\,F(\varkappa x)\,dx,$$

worin $\varkappa$ zur Abkürzung für $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\ldots}$ gesetzt worden ist. Etwas allgemeiner wird die Gleichung, wenn man $x, y, z\ldots, \alpha, \beta, \gamma\ldots$ durch $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\ldots, \alpha a, \beta b, \gamma c\ldots$ ersetzt; die Integrationen linker Hand beziehen sich dann auf alle positiven und negativen der Bedingung

$$1\geqq\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2+\ldots\geqq 0$$

genügenden $x, y, z\ldots$ und es ist

$$11)\quad \int\int\ldots\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\ldots\right)^m F(\alpha x+\beta y+\ldots)\,dx\,dy\ldots$$
$$=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(m+1)\,ab\ldots}{\Gamma\left(m+\frac{n+1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m+\frac{n-1}{2}}\,F(\varkappa x)\,dx,$$
$$\varkappa^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2+\ldots$$

Diese Formel, von welcher ich den speciellen Fall $m=0$ schon früher (Analytische Studien II, S. 186) auf anderem Wege gefunden habe, enthält mehrere bekannte Resultate in sich, die bisher isolirt standen; so ist aus Nr. 10) für $n=3$ und bei Einführung der Polarcoordinaten

$x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta\cos\omega$, $z=r\sin\vartheta\sin\omega$, $dx\,dy\,dz=r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\omega$,

$$\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(1-r^2)^m\,F(\alpha r\cos\vartheta+\beta r\sin\vartheta\cos\omega+\gamma r\sin\vartheta\sin\omega)\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\omega$$
$$=\frac{\pi}{m+1}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m+1}\,F(\varkappa x)\,dx.$$

Nimmt man specieller $m=0$ und setzt überhaupt

$$\int_0^1 r^2\,F(\mu r)\,dr=f(\mu)$$

oder für $r\mu = t$,
$$\int_0^\mu t^2 F(t)\, dt = \mu^3 f(\mu)$$
woraus durch Differenziation in Beziehung auf μ
$$F(\mu) = 3f(\mu) + \mu f'(\mu)$$
folgt, so hat man
$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \cos\omega + \gamma \sin\vartheta \sin\omega) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega$$
$$= \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)\, [3f(\varkappa x) + \varkappa x f'(\varkappa x)]\, dx$$
$$= \pi \left\{ 3 \int_{-1}^1 (1 - x^2) f(\varkappa x)\, dx + \varkappa \int_{-1}^1 (x - x^3) f'(\varkappa x)\, dx \right\}$$
das zweite Integral rechter Hand ist bei partieller Integration einerlei mit
$$-\frac{1}{\varkappa} \int_{-1}^1 (1 - 3x^2) f(\varkappa x)\, dx,$$
und man gelangt so zu der von Poisson angegebenen Formel

12)
$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \cos\omega + \gamma \sin\vartheta \sin\omega) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega$$
$$= 2\pi \int_{-1}^1 f(\varkappa x)\, dx = 2\pi \int_0^\pi f(\varkappa \cos\Theta) \sin\Theta\, d\Theta.$$

Durch ein- oder mehrmalige Differenziation in Beziehung auf $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ können aus den bisherigen Resultaten leicht neue Formeln abgeleitet werden; auch die Differenziation in Beziehung auf das in der Gleichung 10) enthaltene beliebige m hat keine Schwierigkeit, wenn man von der bekannten Formel
$$\Gamma'(p) = \Gamma(p) \frac{d\, l\, \Gamma(p)}{dp} = -C + \int_0^1 \frac{1 - z^{p-1}}{1 - z}\, dz, \quad C = 0,5772156\ldots$$
Gebrauch macht. Bezeichnet man zur Abkürzung wie folgt

13)
$$J_{m,n} = \int_0^1 \frac{z^{2m+1}(1 - z^{n-1})}{1 - z^2}\, dz,$$
so gelangt man zu der Gleichung:

14)
$$\int\int \ldots (1 - x^2 - y^2 - \ldots)^m\, l(1 - x^2 - y^2 - \ldots)\, F(\alpha x + \beta y + \ldots)\, dx\, dy \ldots$$
$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\, \Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m + \frac{n+1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{m + \frac{n-1}{2}} \left\{ l(1 - x^2) - 2J_{m,n} \right\} F(\varkappa x)\, dx,$$
welche sich auf ähnliche Weise wie Nr. 10) noch etwas verallgemeinern lässt.

VI.

Die Fortschritte der elektrischen Telegraphie.

Von L. Galle,
Telegraphen-Inspector in Leipzig.

I. Kurze Geschichte der Telegraphie bis zur Anwendung des Elektromagnetismus und der Inductionselektricität auf dieselbe.

Dem zu allen Zeiten vorhanden gewesenen Bedürfnisse, wichtige Mittheilungen schnell an entfernte Orte gelangen zu lassen, konnte früher und bis zu dem Zeitpunkte, von welchem an man das elektrische Fluidum selbstständig zu erzeugen und in beliebigen Richtungen auf weite Strecken fortzuleiten verstand, nur sehr unvollkommen genügt werden. Man bediente sich hierzu akustischer und optischer Signale. Die akustischen Signale erfüllen den Zweck der schnellen Correspondenz auf grosse Entfernungen wegen der Unvollkommenheit der hierzu verwendeten Instrumente (Trompeten, Pfeifen, Glocken, Schallrohre, hohlgeschliffene Körper etc.) und wegen ihrer Unsicherheit nur sehr unvollständig und man musste sich daher fast ausschliesslich auf optische Signale beschränken. Die Alten bedienten sich hierzu der Fackeln, indem z. B. 24 beliebig sichtbar zu machende Feuerstellen, in drei gesonderte Gruppen zu je 8 getheilt, die Buchstaben des Alphabets bezeichneten, während ausserdem durch 3 gesonderte Feuerstellen angedeutet wurde, zu welcher der 3 Gruppen die gegebenen Feuerzeichen gehörten; doch konnte diese Art Telegraphie wohl nur bei zu erwartenden wichtigen Ereignissen, weniger bei unerwarteten zur Anwendung kommen.

Nachdem im Mittelalter wenig Gebrauch von den optischen Telegraphensignalen gemacht worden war, erlangte die optische Telegraphie erst eine weitere Ausbildung, als gegen Ende des 17. Jahrhunderts Hook und später Amontons die Anwendung des Fernrohres zur Beobachtung der optischen Signale vorschlugen, welche Vorschläge indess erst ein Jahrhundert später (1794) durch Chappe zur praktischen Anwendung kamen.

Der optische Telegraph von Chappe besteht aus einem senkrechten Maste, um dessen oberste Spitze ein gleicharmiger Hebel (Regulator) in senkrechter Ebene drehbar ist, welcher letztere an jedem Ende einen ebenfalls in senkrechter Ebene drehbaren Flügel trägt. Mittelst dieses Apparates, der gewöhnlich auf einem Thurme oder Berge angebracht ist, können durch die verschiedenen Stellungen des Armes und der Flügel 196 Zeichen gegeben werden, wenn man die leicht zu verwechselnde Stellung weglässt,

in welcher ein Flügel die Verlängerung des Armes bildet. Die englischen (1796) und preussischen (1832) optischen Telegraphen sind von den Chappeschen einigermaassen abweichend; die ersteren bestehen aus 6 achteckigen, in zwei senkrechten Reihen angeordneten drehbaren Tafeln, die, jenachdem sie als Fläche oder als Linie erscheinen, in ihrer Verbindung 64 verschiedene Zeichen geben können; die optischen Telegraphen in Preussen bestehen aus 3 unter einander befindlichen Flügelpaaren, welche durch Combination ihrer Stellungen 4096 Zeichen zu geben im Stande sind.

Obgleich verschiedene Vorschläge gemacht wurden, die optischen Telegraphen mittelst Lampen und Hohlspiegeln auch für die Nacht brauchbar zu machen, so sind sie doch ihrer Kostspieligkeit, Schwerfälligkeit und beschränkten Benutzung wegen nur auf wenigen Linien zur Einführung gekommen und gegenwärtig, mit Ausnahme auf Eisenbahnen und Schiffen, überall durch die elektrischen Telegraphen verdrängt worden.

Die grosse Geschwindigkeit und die Eigenschaft der Reibungselektricität, in der Ferne gewisse mechanische Bewegungen (Anziehung und Abstossung leichter Körper) hervorzubringen, sowie sich als überspringender Funke sichtbar zu machen, ist zwar schon sehr lange bekannt, doch findet sich erst im Jahre 1753 ein Vorschlag zur Anwendung derselben auf die Telegraphie. In diesem Jahre machte nämlich ein Unbekannter in einem englischen Journale den Vorschlag, soviel Drähte, als Buchstaben nöthig erscheinen, isolirt aufzuspannen, jedes Ende mit einer Metallkugel zu verbinden und darunter ein mit einem Buchstaben bezeichnetes Papierblättchen zu legen, welches, wenn der Conductor einer Elektrisirmaschine mit dem zugehörigen Drahte in Verbindung kommt, angezogen und gleich darauf wieder abgestossen wird.

Im Jahre 1774 schlug Lesage in Genf vor, die Abstossung von Hollundermarkkügelchen zur Telegraphie zu benutzen; an jedem der isolirten Leitungsdrähte sollte ein Paar solcher Kügelchen hängen, die bei der Ladung des Drahtes sich nach dem bekannten Gesetze abstossen und hierdurch einen gewissen Buchstaben zu bezeichnen hatten.

Im Jahre 1794 machte Reissner den Vorschlag zu einer telegraphischen Correspondenz mit Benutzung des überspringenden elektrischen Funkens. Er gedachte an der einen Station 26 Glastäfelchen aufzustellen, auf deren jeder eine parallele Reihe schmaler Staniolstreifen mit kleinen Unterbrechungen sich befinden sollten, dergestalt, dass die Lücken die Figur des Buchstabens bildeten. Von einem Ende jedes Staniolstreifens sollte nun ein Draht nach der andern Station laufen und dort mit dem Conductor einer Elektrisirmaschine oder mit dem einem Belag einer Leydner Flasche verbunden werden, während die sämmtlichen anderen Enden mittelst eines gemeinschaftlichen 27. Drahtes mit dem andern Belag der Leydner Flasche in Verbindung gebracht werden sollten. Durch die Entladung der Flasche durch den einen oder andern der Staniolstreifen hindurch musste nun der elektrische Funke über sämmtliche Lücken hinwegspringen und auf diese Weise das leuchtende Bild dds Buchstabens darstellen.

Praktischer waren schon die Vorschläge, welche darauf hinausgingen, mittelst weniger Drähte nur einige verschiedene Zeichen hervorzubringen und durch die verschiedenen Combinationen derselben das Alphabet darzustellen.

Hierher gehört der Vorschlag von Lomond (1787), welcher ebenfalls die Divergenz von Hollundermarkkügelchen zur Zeichengebung benutzte,

durch kürzer oder länger andauerndes Drehen der Elektrisirmaschine die Divergenz auf kürzere oder längere Zeit bewirkte und diese beiden unterscheidbaren Zeichen weiter combinirte; ferner der von Böckmann, welcher mittelst zweier Leitungsdrähte den überspringendeen Funken in gewissen Zeitzwischenräumen überspringen liess und durch Combination dieser Zeichen die Buchstaben und Ziffern darstellte.

Andere derartige Vorschläge gingen aus von Dr. Salva in Madrid im Jahre 1798, von Betankourt, von Cavallo im Jahre 1797, von Ronalds im Jahre 1816 und Andern.

Die Benutzung der Reibungselektricität zu telegraphischen Zwecken ist jedoch nicht zur praktischen Anwendung im Grossen gekommen, weil die Anlage wegen der vielen Drahtleitungen sehr kostspielig geworden wäre, weil das Geben und Empfangen der Zeichen umständlich und nicht sicher war und weil die Reibungselektricität unbeständig, von dem Feuchtigkeitszustande der Luft abhängig und schwer zu isoliren ist.

Durch die wichtige Entdeckung des Galvanismus im Jahre 1786 wurde ein glänzendes Feld für die weitere Ausbildung der elektrischen Telegraphie eröffnet, weil man durch die Volta'sche Säule, insbesondere durch die von Daniell, Grove und Andern construirten constanten Batterien einen ziemlich gleichmässigen elektrischen Strom erhält, dessen Stärke und Dauer man in seiner Gewalt hat, weil man also die durch den Strom hervorgebrachten Wirkungen den Sinnen auf beliebige Zeitdauer wahrnehmbar machen kann und weil die galvanische Elektricität weniger von dem Zustande der Atmosphäre abhängig und leicht zu isoliren ist.

Ungeachtet dieser für die Anwendung auf die Telegraphie vortheilhaften Eigenschaften der galvanischen Elektricität fand dieselbe doch vor der Entdeckung des Elektromagnetismus und der Inductionselektricität keine dauernde Anwendung in grösserem Maassstabe.

Sömmering war im Jahre 1808 der erste, welcher mit Benutzung der Volta'schen Säule einen Telegraphenapparat construirte, indem er die Zersetzung des Wassers durch den galvanischen Strom zur Zeichengebung benutzte. Er hatte ebensoviel Leitungsdrähte als Buchstaben im Alphabet und setzte mittelst einer Claviatur die Pole einer Volta'schen Säule immer mit zweien dieser Drähte in Verbindung. An der entfernten Station befanden sich in einem Wasserbehälter ebensoviel umgestülpte, mit Wasser gefüllte Gläschen, als Leitungsdrähte vorhanden waren, und die vergoldeten Enden der letzteren reichten von unten in je ein solches Gläschen hinein. Sobald durch das Niederdrücken zweier Tasten die Kette geschlossen war, entstand in zwei Gläschen auf der entfernten Station eine Gasentwickelung und es wurden hierdurch zugleich zwei Buchstaben bezeichnet, von denen der als der erste galt, bei welchem die Wasserstoffentwickelung vor sich ging. Auch hatte Sömmering mit seinem Apparate einen Wecker verbunden, welcher aus einem waagerechten Hebel bestand, der eine bei Aenderung der waagerechten Lage leicht herabfallende Kugel trug. Der eine Arm dieses Hebels hatte einen unten glockenförmig ausgehöhlten Ansatz, welcher unter Wasser über dem Ende eines Leitungsdrahtes hing. Sobald nun die Gasentwickelung unter dieser Glocke stattfand, wurde dieselbe gehoben und der Hebel aus der horizontalen Lage gebracht, so dass nun die Kugel, welche das Lärmzeichen zu geben hatte, herabfallen musste.

Schweigger hielt zwei Drähte für ausreichend, um alle erforderlichen Zeichen zu geben, indem er zwei Volta'sche Säulen von verschiede-

ner Stärke anwenden und die Zeit zwischen den einzelnen Gasentwickelungen in Betracht ziehen wollte.

Prof. Coxe in Philadelphia machte fünf Jahre später den Vorschlag, die Wirkung der galvanischen Elektricität auf verschiedene Salze und andere Substanzen zur Zeichengebung zu benutzen; doch ist dieser Vorschlag ebensowenig, wie der von Schweigger, zur praktischen Ausführung gekommen.

Eine anderweite Anwendung des Galvanismus in der Telegraphie wurde durch die Wahrnehmung hervorgerufen, dass der menschliche Körper, wenn er in den Schliessungsbogen der elektrischen Kette eingeschaltet wird, sowohl beim Oeffnen, als beim Schliessen der Kette Zuckungen und Schläge empfindet. Ein solcher Apparat ist im Jahre 1839 von Vorsselmann de Heer vorgeschlagen und in kleinerem Maassstabe ausgeführt worden. Derselbe besteht auf jeder Station aus zwei Abtheilungen von je zehn, nämlich fünf obern und fünf untern, metallischen Tasten, welche durch Niederdrücken mit den Polen einer Batterie in Verbindung gebracht werden können; je zwei Tasten, eine obere und die nächste untere, sind stets unter sich und mittelst eines Leitungsdrahtes mit den entsprechenden Tasten der entfernten Station in Verbindung.

Wenn man eine Nachricht durch diesen Apparat zu erhalten hat, so legt man die zehn Finger auf die zehn obern oder auf die zehn untern Tasten. Werden nun auf der entfernten Station gleichzeitig zwei Tasten niedergedrückt, so geht der Strom von einem Batteriepole in einen Leitungsdraht, durch zwei Finger des Zeichenempfängers und durch den andern, mit der zweiten niedergedrückten Taste in Verbindung stehenden Leitungsdraht zurück zum andern Pole der Batterie. Auf diese Weise kann man einen Finger der linken und einen der rechten Hand oder zwei Finger der rechten oder endlich zwei Finger der linken Hand gleichzeitig afficiren, wodurch 45 Zeichen gegeben werden können. Beim Zeichengeben muss man seidene Handschuhe anziehen, damit nicht der Strom durch die eigenen Finger sofort zur Batterie der Abgangsstation zurückkehre. Wenn der Apparat ausser Thätigkeit ist, so werden die fünf Tasten einer jeden Claviatur metallisch verbunden und mittelst zweier beweglichen Drähte mit Metallplatten an den Enden mit irgend zwei unbedeckten Theilen des Körpers in Verbindung gesetzt, so dass man auch in grösserer Entfernung vom Apparate auf den Umfang der Correspondenz aufmerksam gemacht werden kann.

Dieser physiologische Telegraph konnte um so weniger zur praktischen Anwendung gelangen, als er wegen der dazu nöthigen Drahtleitungen kostspielig, ferner unbequem zu handhaben und nicht hinreichend sicher ist, da bei schnellerem Arbeiten leicht eine Verwechselung der Finger eintreten kann und weil, wie die Erfahrung gezeigt hat, der Körper nach und nach unempfindlich für schwächere Erschütterungen wird, während häufige starke Erschütterungen nachtheilig auf das Nervensystem wirken.

In neuerer Zeit hat man, nachdem der Elektromagnetismus und die Inductionselektricität schon längst bei der elektrischen Telegraphie Anwendung gefunden hatten, den chemischen Wirkungen des galvanischen Stromes wieder grössere Aufmerksamkeit zugewendet und die Construction mehrerer Apparate hierauf gegründet, die zum Theil jetzt noch bei Telegraphenanlagen im Betriebe sind. Da dieselben jedoch gewöhnlich mit

Elektromagneten in Verbindung stehen und eigentlich zu den Schreibapparaten gehören, so sollen sie erst weiter unten näher betrachtet werden.

II. Ueber die Principien, auf denen die telegraphischen Nadel-, Zeiger- und Schreib-Apparate beruhen, sowie allgemeine Beschreibung derselben.

Die Entdeckung des Elektromagnetismus und der Inductionselektricität durch Oerstedt, Arago, Faraday u. A. wurde die Veranlassung zur Einführung der elektrischen Telegraphie in das praktische Leben und zur befriedigenden Lösung der Aufgabe derselben, die sich in folgenden Worten zusammenfassen lässt: Vollständige Gedankenmittheilung auf beliebige grosse Entfernungen zu jeder Zeit, auf schnelle, sichere und wenig kostspielige Weise.

Die Construction sämmtlicher elektrischer Telegraphenapparate beruht auf einem oder mehreren der folgenden Principien:

1) Eine Magnetnadel wird von ihrer natürlichen Richtung abgelenkt, wenn ein elektrischer Strom in der Nähe derselben vorbeigeht und es ist die Richtung der Ablenkung von der Lage und Richtung des elektrischen Stromes abhängig.

2) Ein Stück weiches, kohlenstofffreies Eisen wird, so lange ein elektrischer Strom um dasselbe circulirt, magnetisch, verliert aber den Magnetismus sogleich wieder, wenn der elektrische Strom unterbrochen wird. Die magnetische Polarität kehrt sich um, sobald die Richtung des elektrischen Stromes umgekehrt wird.

3) In einem geschlossenen Drahte entsteht bei Annäherung eines Magneten ein elektrischer Strom von gewisser Richtung, bei Entfernung desselben ein elektrischer Strom von entgegengesetzter Richtung.

4) Wenn ein elektrischer Strom durch einen Draht hindurchgeht, so entsteht in einem andern, nahe befindlichen geschlossenen Drahte in dem Augenblicke des Eintretens des erstern ein momentaner Strom von entgegengesetzter Richtung, dagegen im Augenblicke des Aufhörens des erstern ein momentaner gleichgerichteter Strom.

5) Viele farblose oder schwachgefärbte Flüssigkeiten werden beim Durchgange des elektrischen Stromes so zersetzt, dass sie eine tiefe Färbung annehmen.

Schon im Jahre 1820 gab Ampère die Idee zu einem elektromagnetischen Nadeltelegraphen an, indem er die Ablenkung von Magnetnadeln zur Zeichengebung zu benutzen vorschlug. Diese Idee kam jedoch damals nicht zur Ausführung in grösserem Maassstabe, hauptsächlich deshalb, weil sein Vorschlag dahin ging, ebensoviel Magnetnadeln und doppelt soviel Leitungsdrähte anzuwenden, als Buchstaben zu bezeichnen waren, und abwechselnd je zwei Leitungsdrähte mit den Polen einer Batterie in Verbindung zu setzen, um durch die Ablenkung der Nadel eines beliebigen Multiplicators irgend einen Buchstaben zu bezeichnen. Aehnliche Vorschläge gingen von Ritchie, Fechner, Davy und Alexander aus, die jedoch zum Theil einen gemeinschaftlichen Rückleitungsdraht annahmen.

Der russische Staatsrath Baron Schilling von Cannstadt erwarb sich dadurch ein Verdienst, dass er im Jahre 1832 einen Apparat mit nur zwei Leitungsdrähten construirte und durch die Ablenkung einer Magnetnadel nach rechts oder links, mittelst Wechseln der Pole, sowie durch die

Combinationen dieser beiden Ablenkungen die verschiedenen Zeichen darstellte. Auch verband er einen Wecker mit seinem Apparate, indem er durch die erste Bewegung der Magnetnadel eine Bleikugel fallen liess, welche durch ihren Fall den Wecker auslöste.

Im Jahre 1833 waren es die Professoren Gauss und Weber, welche das Princip der Nadelablenkung durch den elektrischen Strom zuerst in grösserem Maassstabe praktisch anwendeten und das Gauss'sche Magnetometer benutzten, um zwischen der Sternwarte und dem physikalischen Cabinet in Göttingen zu telegraphiren, indem sie aus den Ablenkungen eines Magnetstabes nach rechts und links und aus den Combinationen dieser beiden Zeichen bis zu vier ganze die Buchstaben und Ziffern zusammensetzten. Sie wandten Inductionsströme, von einem Stahlmagneten erzeugt, hierzu an.

Nach Gauss und Weber war es zunächst Steinheil, welcher sich um die elektrische Telegraphie verdient machte, indem er im Jahre 1837 den ersten elektromagnetischen Drucktelegraphen ausführte, zu welchem er ebenfalls Inductionsströme von verschiedener Richtung verwandte. Bei diesem Telegraphen dienen zwei in eine horizontale Linie fallende Stabmagnete zum Zeichengeben; dieselben kehren die entgegengesetzten Pole einander zu, sind um verticale Achsen leicht drehbar und von einer grossen Multiplicationsspule umgeben. An den einander zugekehrten Polen der Magnetstäbe befinden sich messingene Ansätze, welche an den vorderen Enden kleine Gefässchen tragen, die mit schwarzgefärbter Flüssigkeit gefüllt sind und in einer hohlen, stets mit aufgesaugter Flüssigkeit gefüllten Spitze endigen. Sobald nun ein elektrischer Strom in der einen oder andern Richtung durch die Windungen des Multiplicators hindurchgeht, so wird entweder der eine oder der andere Magnetstab mit dem Ende, welches die gefüllte Spitze trägt, seitwärts bewegt und gegen einen durch ein Uhrwerk fortbewegten Papierstreifen gedrückt, auf dem nun ein schwarzer Punkt entstehen muss. Das Zurückgehen der Magnetstäbe in ihre vorige Stellung nach dem Aufhören des Stromes erfolgt durch permanente Stahlmagnete. Die Punkte, welche durch die beiden Magnetstäbe auf dem Papierstreifen hervorgebracht werden, entstehen auf zwei verschiedenen Linien und es sind dieselben, um alle erforderlichen Zeichen geben zu können, bis zu vieren zu combiniren. Gleichzeitig mit den sichtbaren kann man auch hörbare Zeichen dadurch hervorbringen, dass man neben den Spitzen Hämmerchen anbringt, welche an verschieden tönende Glöckchen anschlagen.

Noch mehr als durch diesen Apparat hat sich Steinheil durch seine Entdeckung, die Erde als Rückleitung für den elektrischen Strom zu benutzen, verdient gemacht.

Die Engländer Cooke und Wheatstone haben zur praktischen Ausführung und Anwendung der Nadeltelegraphen viel beigetragen. Im Jahre 1837 vollendeten dieselben einen Nadeltelegraphen mit fünf Leitungsdrähten und fünf Multiplicatornadeln auf jeder Station, durch deren convergirende Stellung zu je zweien ein gewisser Buchstabe markirt wurde. Die im Jahre 1840 auf der Great-Western-Bahn erfolgte Einführung dieses Systems auf eine Länge von 39 engl. Meilen bewies sich nach den damaligen Anforderungen als praktisch, wurde jedoch seiner Kostspieligkeit wegen nicht weiter fortgesetzt.

Zu grösserer Ausbreitung gelangte der einfache Nadeltelegraph von Cooke und Wheatstone, welcher, mit Benutzung der Erde als Rücklei-

tung, nur einen einzigen Leitungsdraht erfordert und durch die Combinationen von zwei Zeichen (die Ablenkung der Nadel nach rechts und links) alle Buchstaben und Ziffern anzudeuten im Stande ist. Bei allen Apparaten, welche, wie dieser, mit umgekehrten Strömen arbeiten müssen, ist es von Wichtigkeit, eine Vorrichtung zu haben, durch welche der Strom leicht und sicher umgekehrt werden kann. Solche Vorrichtungen, Commutatoren, Stromwender oder Schlüssel genannt, können auf sehr verschiedene Weise construirt sein und es soll hier beispielsweise ein solcher mit Hilfe der Fig. 23 beschrieben werden.

Der Commutator besteht aus einer, mittelst eines Handgriffes nach rechts und links drehbaren Scheibe mit sieben in der Figur schwarz angedeuteten Metallstücken, von denen 1 mit 4, 2 mit 5, 3 mit 6 und 5 mit 7 in permanenter leitender Verbindung ist, während vier Metallfedern, die beziehentlich mit der Erde, den Batteriepolen und der Leitung verbunden sind, je nach der Drehung der Scheibe mit dem einen oder andern dieser Metallstücke in Berührung kommen und dadurch den Strom in beliebiger Richtung durch die Apparate gehen lassen. Ist die Commutatorscheibe, wie in der Figur angedeutet, etwas nach rechts gedreht, so geht der Strom in der Richtung der Pfeile vom + Pole der Batterie in das fünfte und siebente Metallstück, von da durch den Multiplicator und in die Leitung, kehrt in der Erde zurück und vollendet durch das dritte und sechste Metallstück den Lauf zum — Pole der Batterie. Wird die Commutatorscheibe ebensoviel nach links gedreht, so dass die Erde mit 1, die Batterie mit 4 und 5 in Berührung kommt, während die Leitung stets mit 7 in Verbindung bleibt, so geht der Strom vom + Pole durch 4 und 1 zur Erde, steigt an der letzten Station durch den Apparat in die Leitung empor und kehrt von da durch 7 und 5 zum — Pole der Batterie zurück. Da der Strom im letztern Falle die entgegengesetzte Richtung von jenem hat, so werden auch alle Nadeln nach der entgegengesetzten Seite abgelenkt, als bei der Drehung der Commutatorscheibe nach rechts.

Wenn der Apparat in Ruhe ist, also zum Zeichenempfangen geschickt sein soll, so steht die Cammutatorscheibe so, dass die Batteriepole ausgeschaltet sind und nur die hölzernen Zwischenräume zwischen 4 und 6 berühren, während die Erde mit 2 und die Leitung mit 7 in leitender Verbindung ist. Ein von der entfernten Station kommender Strom geht dann durch den Multiplicator in das 7., 5. und 2. Metallstück und von da zur Erdplatte *P*.

Der Doppelnadeltelegraph, welcher jetzt noch fast allgemein in England angewendet wird, ist eigentlich nur eine Verbindung von zwei einfachen Nadeltelegraphen zur Erzielung einer einfachern Zeichengebung, weil durch die einzelnen oder gleichzeitigen Bewegungen zweier Nadeln nach rechts und links die zu gebenden Zeichen aus weniger Nadelbewegungen zusammengesetzt sein können; doch sind hierzu zwei Leitungsdrähte erforderlich.

Der Nadeltelegraph von Bain ist im Principe dem einfachen Nadeltelegraphen von Cooke und Wheatstone gleich und unterscheidet sich von diesem nur in der Construction des Commutators und Zeichengebers. Eine Modification dieses Apparates vom Mechaniker Ekling in Wien besteht darin, dass der Commutator durch zwei nebeneinander liegende Tasten gebildet wird, dass ein durch den Strom rechts oder links abgelenkter Arm an zwei verschieden tönende Glöckchen schlägt und somit gleichzeitig

sichtbare und hörbare Zeichen giebt und dass die Bewegungen dieses Armes in kurze und lange geschieden werden; durch letztere Einrichtung werden die Zeichen selbst so vereinfacht, dass fast alle Buchstaben und Ziffern durch zwei Ablenkungen ausgedrückt werden können. Der Eklingsche Apparat ist an österreichischen Eisenbahnen im Gebrauch, war es auch früher, vor Einführung der Schreibtelegraphen, bei den österreichischen Staatstelegraphen.

Die elektromagnetischen Zeigertelegraphen, um deren Ausführung sich besonders Wheatstone, Pelchrzim, Drescher, Siemens und Halske, Fardely, Kramer und Stöhrer verdient gemacht haben, beruhen hauptsächlich auf der Erzeugung von temporären Magnetismus in weichem Eisen durch den elektrischen Strom, theilweise auch auf der Erregung von elektrischen Strömen durch permanente Magnete. Die Zeichengebung geschieht bei denselben durch einen Zeiger, welcher beliebig durch die Wirkung eines oder mehrerer Elektromagneten um den Mittelpunkt einer kreisförmigen Scheibe gedreht werden kann, bis er auf einem der darauf verzeichneten Buchstaben oder sonstigen Zeichen, welches angedeutet werden soll, stehen bleibt.

Bei den älteren Zeigerapparaten von Wheatstone geschieht die Bewegung des den Zeiger treibenden Echappement-Rades unmittelbar durch die anziehende Kraft des Elektromagneten, ohne die Wirkung eines Gewichtes oder einer Feder. Das successive Schliessen und Oeffnen der Batterie erfolgt mittelst einer senkrechten Speichenscheibe, welche an ihrem Umfange abwechselnd kurze und lange Speichen hat, deren jede auf der Scheibe selbst mit einem Buchstaben etc. bezeichnet ist. Unter der Scheibe befindet sich eine Feder, von der ein Ende an einem Metallstifte anliegt und dadurch den Schluss der Batterie durch die eine Leitung hindurch bewirkt. Steht nun eine lange Speiche unten senkrecht, so drückt sie die Feder nieder, entfernt sie dadurch von dem Stifte und öffnet die Kette, steht eine kurze Speiche senkrecht nach unten, so drückt die Feder empor an den Stift und schliesst den Strom. Durch das Umdrehen der Speichenscheibe wird also die Batterie abwechselnd geschlossen und geöffnet, und da die Buchstaben der Speichenscheibe mit denen der Zeigerscheibe correspondiren, so wird auf letzterer immer der Buchstabe angezeigt, welcher der unteren senkrecht stehenden Speiche entspricht. Bei der Stellung der Speichenscheibe auf dem Nullpunkte ist die Batterie ausgeschlossen, dagegen der Apparat zum Empfangen von Nachrichten bereit.

Wheatstone brachte, um solche Apparate auch mit schwächeren Strömen in Gang setzen zu können, ein besonderes Laufwerk mit Gewicht an, welches das Rad fortzubewegen hat, während dieses durch ein von dem Elektromagnet bewegtes Echappement bald angehalten, bald freigelassen wird, wobei jedesmal der Zeiger um ein Feld vorwärts rückt. Durch Fardely sind die zuletzt bezeichneten Apparate in mehrerer Beziehung verbessert und so an einigen deutschen Eisenbahnen in Gebrauch genommen worden.

Die elektro-magnetischen Wecker beruhen auf denselben Principien, wie die Zeigerapparate. Ein Schlagwerk der einfachsten Art besteht aus einem Elektromagneten, welcher den Hammer einer Glocke direct anzieht; doch ist diese Art nur bei kurzen Leitungen mit geringem Widerstande anwendbar, weil ein ziemlich starker Strom dazu gehört. Bei längeren Leitungen wendet man Weckerwerke an, welche durch ein Ge-

wicht oder eine Feder im Gange erhalten und nur durch eine vom Elektromagneten zu bewegende Armatur ausgelöst und wieder arretirt wird.

Um auch mit sehr schwachen Strömen Schlag- oder Weckerwerke in Bewegung zu setzen, kam Wheatstone auf die sinnreiche Idee, einen Uebertrager anzuwenden, d. h. durch den schwachen, von der entfernten Station kommenden Strom eine neue Batterie (Localbatterie) am Orte des Werkes zu schliessen und den kräftigen Strom dieser letzteren mittelst eines besonderen Elektromagneten direct auf die Glocke wirken zu lassen. Den Uebertrager bildet hier ein Multiplicator, innerhalb welches eine senkrechte Magnetnadel um eine horizontale Axe leicht drehbar ist. Rechtwinklig zu dieser Axe und der Nadel ist ein daran befestigter metallener Doppelarm, von dem ein Ende gabelförmig gestaltet ist und bei der seitlichen Ablenkung der Nadel durch den schwachen Strom in zwei Quecksilbernäpfchen taucht, die nun, miteinander metallisch verbunden, den Strom der Localbatterie ungehindert durch das Schlagwerk circuliren lassen.

Der Zeigerapparat von Siemens und Halske, einer der sinnreichsten Apparate seiner Art, arbeitet durch Selbstunterbrechung und ist in seinen Haupttheilen in Fig. 24 dargestellt. MM' sind die Pole eines Elektromagneten, AA' die Enden des zugehörigen um eine vertikale Achse drehbaren Ankers, welcher mit einem Hebel f und einem anderen oh fest verbunden ist. Letzterer trägt an seinem äussersten Ende einen Haken, welcher in das gezahnte Stahlrädchen r eingreift. Dieses Rädchen kann sich nur nach einer Richtung herumdrehen, indem ein an der linken Seite desselben befestigter Sperrhaken die entgegengesetzte Bewegung verhindert. Sobald der Anker AA' von dem Elektromagnet angezogen wird, greift der Haken um einen Zahn des Rädchens r weiter, während dieses still steht. Wenn aber nach dem Aufhören des elektrischen Stromes der Anker durch die am Arme f befestigte Feder wieder zurückgezogen wird, so wird das Rädchen r um einen Zahn fortgerückt, ebenso der auf derselben Achse sitzende Zeiger Z um ein Feld.

Die hin- und hergehende Bewegung des Armes o wird durch Selbstunterbrechung des Stromes hervorgebracht. Zu dem Ende trägt die Messingplatte S einen nahe unter dem Arme o hinlaufenden Messingstreifen m, auf welchem eine kleine metallene Brücke ss' mit metallenen Hervorragungen befestigt ist. Beim Hin- und Hergehen des Armes o, welcher innerhalb der Brücke durch elfenbeinerne Stifte von derselben isolirt ist, wird diese mit dem Streifen m um einen Drehpunkt der Platte S hin- und herbewegt, so dass m und dadurch ss' abwechselnd mit den Schrauben D und D' in metallische Berührung kommt.

Im Ruhestande des Apparates, wenn der Anker AA' nicht angezogen ist, liegt die Hervorragung s' an der Schraube D' an. Wenn nun bei D' ein Strom eintritt, so geht derselbe durch $s'mS$ durch die Windungen des Elektromagneten und weiter in die Linie; dadurch wird AA' angezogen und der Haken bei h greift in den nächsten Zahn von r, gleichzeitig wird aber auch die Brücke ss' an die Schraube D angedrückt, die Verbindung zwischen s' und D' aufgehoben und somit der Strom unterbrochen. Da nun der Elektromagnet den Anker AA' nicht mehr anzieht, so wird derselbe durch die Spiralfeder an f in seine vorige Lage zurückgebracht, wobei h den ergriffenen Zahn mit zurückzieht und dadurch den Zeiger auf den nächsten Buchstaben fortrückt. Durch das Zurückgehen von AA' wird

aber die Verbindung von s' und D' wiederhergestellt, also die Kette von Neuem geschlossen. Indem sich dieses Spiel wiederholt, geht der Zeiger Z sprungweise von einem Felde der Zeigerscheibe zum andern, so lange als die Batterie eingeschaltet bleibt oder bis ein mechanisches Hinderniss den Zeiger anhält. Das letztere geschieht durch eine Taste, welche oben auf der Zeigerscheibe, jedem Buchstaben gegenüber, angebracht ist und beim Niedergehen gleichzeitig den Strom unterbricht. Es bleiben also die Zeiger aller eingeschalteten Stationen auf dem Buchstaben stehen, dessen zugehörige Taste niedergedrückt worden ist, und zwar so lange, bis die Taste wieder losgelassen wird. Mit jedem solchen Zeigerapparate ist ein Wecker in Verbindung, der ganz ähnlich construirt ist und ebenfalls durch Selbstunterbrechung wirkt.

Der Stöhrer'sche Zeigerapparat unterscheidet sich wesentlich von den übrigen Zeigerapparaten; indem bei jenem der elektrische Strom nicht durch Batterien, sondern durch die magneto-elektrische Rotationsmaschine erzeugt wird, indem ferner die Bewegung des Zeigers nicht durch das abwechselnde Unterbrechen und Wiederherstellen des Stromes, sondern durch fortwährende Umkehrung desselben und durch den hierbei hervorgerufenen Polwechsel eines Elektromagneten bewirkt wird und indem das Telegraphiren nicht durch Niederdrücken von Tasten oder Drehung einer Scheibe, sondern durch Drehung eines Armes geschieht, den der Telegraphist mit beliebiger Geschwindigkeit und in beliebiger Richtung auf das beabsichtigte Zeichen einer Scheibe stellt.

Der elektro-magnetische Zeigertelegraph von Drescher besteht im Wesentlichen aus einem Uhrwerke, welches bei seinem Gange den Strom in gleichen Zeitzwischenräumen abwechselnd schliesst und unterbricht und hierdurch die Bewegung eines Zeigers veranlasst. Auf jedem Felde der Zeigerscheibe befindet sich ein Knopf oder eine Taste, welche, wenn sie niedergedrückt wird, den Zeiger auf dem entsprechenden Buchstaben anhält und das Uhrwerk arretirt. Die Batterien auf den verschiedenen Stationen sind so eingeschaltet, dass sie beim Telegraphiren sämmtlich in derselben Richtung wirken. Auf der arbeitenden Station sind die Zeiger und das Uhrwerk in Bewegung, auf der empfangenden Station steht das Uhrwerk still und nur der Zeiger läuft rund.

Der elektro-magnetische Zeigertelegraph von Kramer ist dem Principe nach ein Wheatstone'scher Zeigerapparat mit Laufwerk und unterscheidet sich von den oben beschriebenen hauptsächlich dadurch, dass der Strom, welcher nach der entfernten Station geht, nicht dazu verwandt wird, um dort den Zeigerapparat oder überhaupt den Zeichengeber zu bewegen, sondern vielmehr nur dazu dient, um durch eine kleine und leicht zu erzeugende Bewegung eine Localbatterie abwechselnd zu öffnen und zu schliessen, und es ist diess daher ein Zeigerapparat mit Uebertrager. Die Localbatterie wirkt direct auf den Zeichengeber und übt, da ihr Strom nur wenig Widerstand zu überwinden hat, eine sehr kräftige Wirkung aus. Kramer nennt den von ihm angewandten Uebertrager das Pendel.

Unter den elektrischen Schreibapparaten verdient der von Morse vor allen andern den Vorzug. Mit demselben können die Zeichen schnell (bis zu 100 Buchstaben in einer Minute) gegeben werden, er ist in seiner Construction einfach, leicht zu handhaben und daher nicht oft Störungen unterworfen, die Zeichen werden auf einem Papierstreifen fixirt und sind zugleich hörbar und es übt ein unrichtiges Zeichen keinen Einfluss

auf die folgenden Zeichen aus, wie es z. B. bei den Zeigertelegraphen der Fall ist.

Der Morse'sche Schreibapparat besteht in seiner einfachsten Gestalt aus zwei Haupttheilen, nämlich dem Taster und dem Schreibapparate, welche in Fig. 25 von der Seite und in Fig. 26 im Grundriss in ihren Haupttheilen und in ihrer Verbindung, mit Berücksichtigung später angebrachter Verbesserungen, dargestellt sind. Der Taster besteht aus einem Metallhebel *T*, welcher im Ruhestande durch den Druck einer Feder auf dem kleinen Ambose *q* fest aufliegt, während derselbe beim Zeichengeben mittelst des Holzknopfes *P* auf den vordern Ambos *p* niedergedrückt und dabei mit einem Pole *K* der Batterie in Verbindung gebracht wird. Der Schreibapparat besteht aus einem Elektromagnet *MM'*, dessen Drahtenden in dem vorliegenden Falle einerseits mit dem hintern Tasterambose *q*, andererseits mit der Erde oder dem anderen Batteriepole *Z* in Verbindung stehen. Der Eisenanker *a* ist in einem Hebel *H* eingelassen, welcher bei *r* drehbar ist und an andern Ende einen stumpfen Stahlstift *s* trägt, der als Schreibstift dient. Wenn ein Strom durch die Windungen des Elektromagneten geht, so wird der Anker *a* angezogen und der Schreibstift *s* schlägt eine Erhöhung in einem Papierstreifen *t* ein, welcher durch die mit einem Uhrwerke verbundenen Walzen *v* und *w* gleichmässig fortbewegt wird; bei kurzer Anziehung des Ankers *a*, entsprechend einem kurzen Niederdrücken des Tasters, entsteht auf dem Papierstreifen ein Punkt, bei länger dauernder Anziehung, also bei längerem Niederdrücken des Tasters, ein Strich, und aus den Combinationen dieser beiden Zeichen bis zu vier werden die Buchstaben, zu fünf die Ziffern und zu sechs die Interpunctions- und sonstigen Zeichen dargestellt. Wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, geht beim Fortgeben von Zeichen, also beim Niederdrücken des Tasters, der Strom vom Pole *K* durch *p* und *T* in die Leitung *L* nach der entfernten Station und kehrt in der Erde zurück; beim Empfangen von Zeichen, also im Ruhestande des Tasters, geht der ankommende Strom von *L* durch *T*, *q* und den Elektromagneten zur Erde und zurück zur Abgangsstation.

Der Doppelstiftapparat von Stöhrer hat zwei Elektromagnete und zwei Schreibstifte, welche willkührlich abwechselnd und auf zwei verschiedenen Linien im Papierstreifen die Grundzeichen (Punkt und Strich) hervorbringen, so dass die Buchstaben etc. durch viel einfachere Combinationen dargestellt werden können, als bei dem Morse'schen Einstiftapparate. Bei dem Stöhrer'schen Apparate ist ein Commutator, aus zwei Tasten bestehend, erforderlich, welcher den Strom bald in der einen, bald in der entgegengesetzten Richtung in die Leitung bringt, je nachdem der eine oder der andere Schreibhebel in Bewegung gesetzt werden soll.

Was nun die chemischen Schreibtelegraphen anlangt, so wurde im Jahre 1839 ein solcher von Davy construirt, welcher aus einer mit chemisch präparirtem Zeuge überzogenen Walze besteht, deren Oberfläche durch Längen- und Querlinien in kleine Quadrate abgetheilt ist. Diese Walze ist derart in die Leitung der Batterie eingeschaltet, dass durch die Zersetzung der chemischen Stoffe in dem einen oder dem andern Quadrate deutlich wahrnehmbare Striche entstehen, welche die Buchstaben bezeichnen. Vermittelst 7 oder 8 Drahtleitungen kann man diese Striche bald in dem einen, bald in einem andern Quadrate entstehen lassen und dadurch die erforderliche Mannichfaltigkeit der Zeichen hervorbringen. Die absatzweise Umdrehung der Walze geschieht durch ein besonderes Echap-

pement, welches bei jedem Anziehen und Loslassen des Ankers eines Elektromagneten einmal ausgelöst und wieder gehemmt wird, wobei jedesmal der Umfang der Walze um ein Quadrat vorwärts rückt.

Einer der vollkommensten chemischen Schreibtelegraphen ist unzweifelhaft der im Jahre 1852 von Stöhrer construirte elektro-chemische Doppelstiftapparat. Derselbe besteht aus einem beliebig in Gang zu setzenden Uhrwerke, welches einen mit Jodkaliumlösung getränkten und angenetzten Papierstreifen, auf dem zwei von einander isolirte metallene Schreibstifte liegen, gleichmässig fortbewegt. Der Papierstreifen geht unterhalb der Schreibstifte über eine Metallwalze hinweg, so dass ein elektrischer Strom von jedem der Stifte durch die feuchte Papierschicht hindurch zur Walze gelangen kann. Wenn nun ein positiver elektrischer Strom aus einem der Schreibstifte durch das feuchte Papier in die Walze übergeht, so wird das Jodkalium zersetzt und giebt auf der obern Fläche des Papierstreifens eine braune Färbung, die je nach der kürzeren oder längeren Dauer des Stromes als Punkt oder Strich erscheint.

Da man nun mittelst eines aus zwei Tasten bestehenden Commutators den positiven Strom beliebig durch den einen oder den andern Schreibstift zur Walze gelangen lassen kann, so werden die Zeichen auf zwei verschiedenen Linien bald an dem einen, bald an dem andern Schreibstifte auf dem Papier erscheinen und durch ihre Combinationen, so wie bei dem elektromagnetischen Doppelstiftapparate, die Schrift darstellen. Der Apparat ist ausserdem mit einem Glockenwerk versehen, damit man auf den Anfang des Telegraphirens von der entfernten Station her aufmerksam gemacht werden kann.

Der elektrochemische Schreibapparat von Dr. Gintl ist ganz ähnlich construirt wie der Stöhrer'sche, hat aber nur einen Schreibstift und verhält sich also zum Stöhrer'schen chemischen Apparate wie der Morse'sche Einstiftapparat zum Stöhrer'schen Doppelstiftapparate.

Endlich ist noch eines elektro-chemischen Copirtelegraphen von Bain zu gedenken, mittelst dessen es möglich ist, allerlei Handschriften und selbst Zeichnungen telegraphisch mitzutheilen. Derselbe hat im Allgemeinen folgende Einrichtung: Durch ein Triebwerk werden auf beiden Stationen zwei gleich grosse Metallcylinder mit genau gleicher Geschwindigkeit in rotirende Bewegung versetzt; auf jedem derselben, wovon einer in der Regel zum Geben, der andere zum Empfangen von Nachrichten benutzt wird, liegt ein Metallstift, welcher während der Drehung des Cylinders langsam fortrückt und also auf dem Mantel des erstern eine dichte Spirallinie beschreibt.

Die zu gebende Nachricht wird mit Harzfirniss oder einem andern nichtleitenden Stoffe auf Zinnfolie oder Goldpapier geschrieben und die so vorbereitete Mittheilung auf einen Cylinder gebracht, während ein Cylinder des correspondirenden Instrumentes auf einer andern Station mit chemisch präparirtem Papier überzogen wird. Der Strom der Batterie geht nun auf beiden Stationen durch den Stift und die Walze und erzeugt auf dem, mit chemisch präparirtem Papier überzogenen Cylinder der Empfangsstation, da derselbe rotirt, eine dichte Spirallinie, welche allemal dann unterbrochen wird, wenn der Stift auf der Abgangsstation über den nichtleitenden Stoff hinwegstreicht und dabei den Strom unterbricht. Die ausgelassenen Stellen der Spirallinie auf der Empfangsstation geben daher eine Copie der an der Abgangsstation aufgezeichneten Schriftzüge.

III. Ueber das Relais und den Uebertrager beim Morse'schen Schreibapparate.

Der Morse'che Apparat war, wie oben unter II. beschrieben wurde, ursprünglich so construirt, dass der von der entfernten Station kommende elektrische Strom direct in die Umwindungen des am Schreibwerk befindlichen Elektromagneten geführt wurde und dadurch den Schreibhebel anzog. Bei längeren Telegraphenlinien mit grossem Widerstande wird der Strom aber so schwach, dass der Elektromagnet nicht mehr im Stande ist, den Schreibhebel kräftig anzuziehen und dass dann eine Unsicherheit in der Zeichengebung entstehen muss. Dieser Umstand gab Veranlassung zur Construction des Relais, welches, durch einen schwachen Linienstrom afficirt, eine zweite Batterie — Localbatterie genannt — in der Nähe des Schreibapparates durch den Elektromagneten des letztern hindurch schliesst und dadurch eine kräftige Anziehung des Schreibhebels bewirkt.

Das Relais nach der neuesten Construction von Siemens und Halske ist in Fig. 27 in der Ansicht von oben dargestellt. m und m' sind die Pole eines mit sehr vielen feinen isolirten Drahtwindungen umgebenen Elektromagneten, dessen Drahtenden mittelst der Klemmen a und b mit den beiderseitigen Telegraphenleitungen oder mit einer Leitung und der Erde verbunden sind. hh ist ein um den Punkt i leicht drehbarer Hebel, welcher im Ruhestande des Apparates durch die mittelst der Schraube f zu regulirende Spiralfeder g an die Schraube k angedrückt wird; letztere ist mit einem Achathütchen versehen und bleibt demnach von dem Hebel h isolirt. l ist eine metallische Schraube, welche mit k zugleich in dem Gehäuse n sitzt und mittest der Schraube e verschoben werden kann, wobei gleichzeitig der Hebel h sich den Magnetpolen mm' nähert oder von denselben entfernt. B bezeichnet die Localbatterie und MM' den Elektromagnet des Schreibwerkes. Wenn nun ein elektrischer Strom durch die Umwindungen des Relais-Elektromagneten geht, so wird der Hebel h von den Polen mm' angezogen und das längere Ende desselben mit der Schraube l in Berührung gebracht. Hierdurch erfolgt der Schluss der Localbatterie, welche ihren Strom nur durch den Elektromagnet des Schreibwerkes gehen lässt und daher bei dem verhältnissmässig geringen Widerstande einen starken Magnetismus und eine kräftige Anziehung des Schreibhebels bewirkt. Der Localstrom geht dann nämlich von K durch d in den Hebel h, in die Schraube l, über n und c in die Umwindungen des Schreibelektromagneten und zurück zum andern Pole Z.

Um den Widerstand dieses Stromes möglichst zu verringern, lässt man die Localbatterie gewöhnlich nur aus einem oder wenigen grossen Elementen bestehen und umwindet den Elektromagnet des Schreibwerkes nur mit wenigen Lagen stärkeren Drahtes. Je schwächer der durch den Relaiselektromagneten gehende Strom ist, desto näher muss der Hebel h den Polen m und m' stehen und desto schwächer muss die Spiralfeder gespannt sein.

Obgleich jedes Relais mit dem Namen Uebertrager oder Translator bezeichnet werden kann, was auch häufig geschieht, so nennt man doch Uebertrager vorzugsweise eine solche Vorrichtung, mittelst welcher anstatt einer Localbatterie eine neue Linien- oder Telegraphir-Batterie nach einer entfernten Station hin geschlossen wird. Die Erfindung dieses

Instrumentes wurde durch den Umstand veranlasst, dass bei sehr grossen Entfernungen der Strom in der Leitung endlich so schwach wird, dass das Relais selbst bei sehr zarter Stellung und bei Anwendung starker Batterien nicht mehr im Stande ist, den Hebel *h*, welcher die Localbatterie zu schliessen hat, kräftig genug und sicher anzuziehen. Durch Anwendung von Uebertragern auf einer oder mehreren Zwischenstationen wird das Umtelegraphiren, das ausserdem nöthig werden würde, erspart.

Die Priorität der Erfindung des Uebertragers wird von verschiedenen Seiten her in Anspruch genommen und es ist auch nicht zu bezweifeln, dass es mehreremals selbstständig erfunden worden ist. Als Erfinder und Verbesserer der Uebertrager sind besonders zu benennen: Mazzenauer, Siemens und Halske und Steinheil.

Die Construction des Uebertragers ist in seiner einfachsten Function der des Relais ganz gleich und in Fig. 28 mit den zugehörigen Einschaltungen dargestellt. Wenn eine Nachricht von Station *A* nach *C* mittelst des Uebertragers telegraphirt werden soll, so tritt der Strom von *A* bei L_1 in den kleinen Hebel *y* ein und geht durch den Elektromagneten des Uebertragers zur Erde *E*. Der hierbei in den Eisenkernen *m* und *m'* entstehende Magnetismus bewirkt die Anziehung des Hebels *h* und die Berührung desselben mit der Schraube *l*. Dadurch wird der Strom der Telegraphirbatterie *B*, von welcher ein Pol mit der Erde in Verbindung steht, durch *l*, *h* und den Hebel *x* nach L_2 und weiter nach *C* so lange geführt, als der Strom von *A* her wirksam ist. Bei dieser Einschaltung kann man nur von *A* nach *C*, nicht aber umgekehrt mit Uebertragung sprechen. Soll letzteres geschehen, so sind die Hebel *x* und *y* in die Stellung *x'* und *y'* zu bringen. Dann geht der von *C* kommende Strom durch L_2 und *y'* in den Elektromagnet des Uebertragers und zur Erde, der Strom der Telegraphirbatterie *B* hingegen durch *l*, *h*, *x'* und L_1 nach *A*.

Bei der vorstehend beschriebenen Einrichtung des Uebertragers liegt ein grosser Uebelstand darin, dass die Hebel *x* und *y* abwechselnd in die Lage *xy* und *x'y'* gebracht werden müssen, jenachdem von *A* nach *C* oder umgekehrt von *C* nach *A* mit Uebertragung gesprochen werden soll. Soll diese unbequeme und störende Umschaltung vermieden werden, so ist es nöthig, auf jeder Uebertragungsstation zwei Uebertrager mit einander in Verbindung aufzustellen, denselben aber auch eine veränderte Einrichtung zu geben. Die Schraube *k* darf dann nämlich nicht mit einem isolirenden Achathütchen versehen, sondern muss ganz metallisch, aber von der andern Contactschraube *l* isolirt sein. Ein solcher Uebertrager heisst auch Doppelcontact-Relais, weil der Hebel *h* sowohl mit der Schraube *l* als auch mit *k* in metallischen Contact kommen kann. Die Einrichtung einer Uebertragungsstation mit zwei Uebertragern, wo dann in beiden Richtungen ohne weitere Hebelstellung mit Uebertragung gesprochen werden kann, ist in Fig. 29 dargestellt. Die von *A* kommende Leitung ist mit dem Hebel *h* des Uebertragers I., die von *C* kommende mit *h'* des Uebertragers II. verbunden, ferner steht je ein Drahtende der Umwindungen beider Elektromagnete mit der Erde, dagegen das andere Drahtende von I. mit *k'*, das von II. mit *k* in Verbindung. Ein Pol der Telegraphirbatterie *B* ist mit der Erde, der andere Pol mit den Schrauben *l* und *l'* in fortwährendem metallischen Contact.

Wenn nun von *A* nach *C* mit Uebertragung gesprochen werden soll, so geht der von *A* kommende Strom durch *h* und *k* des Uebertragers I. in den

Elektromagnet des Uebertragers II. und zur Erde *E*. Hierdurch wird der Hebel *h'* von *m'm'* dergestalt angezogen, dass er mit *l'* in Berührung kommt und den Strom der Batterie *B* durch *l'* und *h'* nach *C* hin so lange schliesst, als der Strom von *A* her wirksam ist. Soll umgekehrt von *C* nach *A* mit Uebertragung gesprochen werden, so geht der Strom von *C* durch *h'* und *k'* in den Elektromagnet des Uebertragers I. und zur Erde *E*, wodurch die Batterie durch *l* und *h* nach *A* hin geschlossen wird. Das Telegraphiren mit Uebertragung in beiden Richtungen ist daher möglich, ohne dass irgend eine Umschaltung vorgenommen zu werden braucht.

In vielen Fällen ist es wünschenswerth, dass das, was zwischen *A* und *C* correspondirt wird, auf der Uebertragungsstation mitgelesen werden könne. Dann kann man mit den beiden Uebertragern noch ein Relais gewöhnlicher Construction und einen Schreibapparat in Verbindung setzen. Schaltet man z. B. bei *R* Fig. 29 ein Relais ein, so wird dasselbe sowohl von dem von *A* als auch von dem von *C* kommenden und zur Erde gehenden Strome in gleicher Weise, wie einer der Uebertrager afficirt und ist demnach im Stande, den Strom einer besondern Localbatterie durch einen Schreibapparat hindurch zu schliessen und letzteren in Thätigkeit zu setzen. Man kann jedoch auch — und dies geschieht fast allgemein auf Uebertragungsstationen — das Schreibwerk gleichzeitig als Uebertrager benutzen und dann ist es nöthig, zwei Relais und zwei Schreibapparate aufzustellen, welche die Uebertragung in beiden Richtungen vermitteln. Bei einem solchen, gleichzeitig als Uebertrager wirkenden Schreibapparate (s. Fig. 25) vertritt die Schraube *c* diejenige Schraube *k* (Fig. 29) des Uebertragers, an welcher der Hebel *h* im Ruhestande anliegt, die Schraube *d* (Fig. 25) entspricht der Schraube *l* (Fig. 29) und der Schreibhebel *H* dem Uebertragungshebel *h*. Fig. 30 stellt eine Skizze einer Uebertragungsstation dar, auf welcher die Schreibapparate gleichzeitig als Uebertrager wirken.

Wird von *A* nach *C* mit Uebertragung gesprochen, so geht der Strom von *A* in den Schreibhebel *H* des Schreibapparates I. und in die Schraube *c*, hierauf in den Elektromagnet des Relais II. und zur Erde, der Relaishebel *h'* wird angezogen und mit *l'* in Berührung gebracht und hierdurch die Localbatterie II. geschlossen, deren Strom nach der punktirten Linie durch den Elektromagnet *M'M'* des Schreibapparates II. hindurchgeht. Letzteres bewirkt die Anziehung des Schreibhebels *H'* und die Berührung desselben mit der Schraube *d'*, welche mit einem Pole der Linienbatterie in Verbindung steht, gleichzeitig aber auch die Entfernung des mit *H'* verbundenen Armes *I'* von der Schraube *c'*. Der Strom der Linienbatterie geht in Folge dessen durch *d'* und *H'* in die Leitung nach *C* und zwar ebenso lange, als der Strom von *A* her wirksam ist. Ganz analog ist der Stromlauf, wenn von *C* nach *A* hin mit Uebertragung gesprochen wird. Der Strom geht dann von *C* nach *H'*, *I'* und *c'* durch den Elektromagnet des Relais I. und zur Erde, wodurch der Hebel *h* angezogen, mit *l* in Verbindung gebracht und der Strom der Localbatterie I. durch den Elektromagnet *MM* des Schreibapparates I. hindurch geschlossen wird. Die hierdurch bewirkte Anziehung des Schreibhebels *H* und dessen metallische Berührung mit *d* schliesst die Linienbatterie durch *d* und *H* in die Leitung nach *A*. Die telegraphische Correspondenz zwischen *A* und *C* mit Uebertragung ist also auch hier ohne irgend eine Umschaltung möglich. In der Regel werden jedoch noch besondere, in der Zeichnung nicht angegebene Umschalter

angebracht, durch deren Stellung man bewirkt, dass Apparat I. einseitig nach *C* hin und Apparat II. gleichzeitig nach *A* hin correspondiren, auch dass *A* und *C* direct, ohne Uebertragung, mit einander verkehren können.

Schliesslich möge hier noch das Relais des Stöhrer'schen Doppelstiftapparates Erwähnung finden. Dasselbe ist Fig. 31 in seinen Haupttheilen im Grundriss dargestellt. Es besteht aus zwei hufeisenförmigen, senkrecht stehenden, starken Stahlmagneten, deren Pole *NS*, *N'S'* mit Schraubenspitzen versehen sind, in welchen sich die eisernen Relaisanker *D* und *D'* leicht drehen. Die mittleren Theile dieser Relaisanker sind von Messing und es besitzen die Enden *ns*, *n's'* durch Induction dieselbe magnetische Polarität, wie die ihnen zunächst stehenden Enden der Stahlmagnete; erstere stehen im Ruhestande des Apparates den eisernen Schenkelenden *mm'* des Elektromagneten *MM'* sehr nahe, ohne dieselben jedoch zu berühren.

Wenn ein elektrischer Strom durch die Windungen des Elektromagneten geht, so erhalten bekanntlich die Pole *mm'* desselben entgegengesetzte magnetische Polarität und es ist klar, dass, je nach der Richtung des Stromes im Elektromagnete, entweder der eine oder der andere Relaisanker mit beiden Enden bis zur Berührung angezogen werden muss, wodurch der Schluss der Localbatterie entweder durch den Elektromagnet des einen oder durch den des andern Schreibhebels hindurch erfolgt. Es ist nämlich ein Pol der Localbatterie *B* mit den Eisenkernen *mm'* des Relais-Elektromagneten *MM'* fortwährend in leitender Verbindung, während der andere Pol durch einen Elektromagnet des Schreibwerkes hindurch mit demjenigen Relaisanker in Verbindung tritt, welcher vom Relais-Elektromagneten angezogen wird; auf diese Weise wird der Durchgang des elektrischen Stromes der Localbatterie entweder durch den einen oder andern Elektromagneten I. oder II. des Schreibwerkes vermittelt und demgemäss der eine oder andere Schreibhebel angezogen.

IV. Ueber das gleichzeitige Telegraphiren auf einem Drahte in entgegengesetzten Richtungen.

Das allgemein giltige Gesetz, dass zwei homogene gleichgrosse Kräfte, welche in entgegengesetzter Richtung wirken, sich in ihren Wirkungen aufheben, liess bis vor wenigen Jahren jeden Versuch einer gleichzeitigen telegraphischen Correspondenz auf einem Drahte in entgegengesetzten Richtungen als vergeblich erscheinen. Da es jedoch keine nothwendige Folge ist, dass die Kräfte, die sich in ihren Wirkungen aufheben, hierbei selbst vernichtet werden, da man ferner nach Analogie zu der Annahme berechtigt ist, dass dem Wesen der Elektricität, gleich jenem des Schalles, der Wärme und des Lichtes, Vibrationen eigenthümlicher Art zu Grunde liegen und dass demnach hier ähnliche Fälle eintreten können, wie z. B. bei der Fortpflanzung des Schalles, von welchem es nachgewiesen ist, dass sich die Wellen desselben durch eine Röhrenleitung in entgegengesetzter Richtung gleichzeitig und unbeirrt auf weite Distanzen fortpflanzen, da es ferner Thatsache ist, dass die elektrischen Ströme verschiedener Telegraphenleitungen in einem gemeinschaftlichen Erdleitungsdraht zu ihren Ausgangspunkten zurückgeführt werden können, ohne sich gegenseitig zu irritiren: so glaubte der österreichische Telegraphen-Director Dr. Gintl die Möglichkeit einer gleichzeitigen entgegengesetzten Correspondenz auf

einem Leitungsdrahte gegeben. Den Beweis für die gleichzeitige Coexistenz mehrerer elektrischen Ströme in einem Drahte hat Dr. Gintl durch folgenden Versuch zu führen geführt. In Fig. 32 bezeichnen *A* und *B* zwei chemische Schreibapparate, nämlich *T* und *T'* die Taster, *M* und *M'* Metallstege, *S* und *S'* metallene Schreibstifte, *P* und *P'* feuchte mit Jodkaliumlösung getränkte Papierstreifen, *p* und *p'* die positiven, *n* und *n'* die negativen Batteriepole. Beim Niederdrücken des Tasters *T* nimmt der positive Strom der Batterie I. die Richtung der mit der Ziffer 1 bezeichneten Pfeile und bringt am Apparat *B* bei seinem Uebergange vom Schreibstifte *S'* zum Stege *M'* auf der obern Seite des Papierstreifes *PP'* farbige Zeichen hervor; der vom positiven Pole der Batterie II. kommende Strom nimmt dagegen beim Niederdrücken des Tasters *T'* die Richtung der mit 2 bezifferten Pfeile und erzeugt am Apparate *A* beim Uebergange vom Schreibstifte *S* zum Stege *M* auf der obern Seite des Papierstreifens farbige Zeichen.

Werden nun beide Taster zugleich niedergedrückt, so erscheinen auf dem Papierstreifen der beiden Apparate *A* und *B* zugleich farbige Zeichen und zwar die am Taster *T* gegebenen Zeichen auf dem Papierstreifen des Apparates *B* und die am Taster *T'* gemachten Zeichen auf jenem des Apparates *A*, wovon man sich dadurch überzeugen kann, dass man z. B. mit dem Taster *T* lange und mittelst des Tasters *T'* gleichzeitig kurze Zeichen giebt. In diesem Falle erscheinen am Apparate *B* farbige Striche, welche den mit dem Taster *T* gegebenen langen Zeichen entsprechen, und am Apparate *A* farbige Punkte, welche von den mit dem Taster *T'* gegebenen kurzen Zeichen herrühren.

Dr. Gintl schliesst hieraus, dass sich die zwei von den Batterien I. und II. ausgegangenen elektrischen Ströme durch die Drahtleitung *x* in der Richtung der beigesetzten Pfeile gleichzeitig und ungehindert fortpflanzen.

Dieser Versuch kann indess nicht vollständig entscheidend genannt werden, weil beim gleichzeitigen Niederdrücken der Taster *T* und *T'* der Strom von Batterie I. nicht blos durch den Draht *x*, sondern getheilt durch *x* und *y* nach dem Apparate *B* hingelangt, und durch *z* zurückgekehrt, ebenso der Strom von Batterie II. getheilt durch *x* und *z* nach *A* hin und durch *y* zurück, und weil dann immer noch die Zeichen in der oben angegebenen Weise an den Apparaten *A* und *B* entstehen müssen, wenn auch die einander entgegengesetzten Zweigströme in dem Drahte *x* aufgehoben würden, denn in den Drähten *y* und *z* gehen die Ströme von I. und II. in gleicher Richtung.

Ein anderer Versuch Gintl's, welcher in Fig. 33 dargestellt ist, spricht indess mehr zu Gunsten der Annahme, dass mehrere Ströme in einem Drahte gleichzeitig coexistiren können. Die Buchstaben haben hier dieselbe Bedeutung, wie in Fig. 32. Hier sind die Pole der Batterien so verbunden, dass beim Niederdrücken der Taster T^1 und T^2 die positiven Ströme zwischen dem Schreibstifte und dem Metallstege des Apparats *A* entgegengesetzte Richtung haben, während der Strom von I. gleichzeitig in der Erde nach Apparat *B* geht, dort von *S'* zu *M'* übergeht und in der Leitung *L* zurückkehrt. Zwischen der Batterie II. und dem Metallstege *M* des Apparates *A* ist ein Widerstand *W* eingeschaltet, der grösser ist, als der im Papierstreifen des Apparates *A*, damit beim gleichzeitigen Niederdrücken der Taster T^1 und T^2 der von der Batterie I. ausgehende Strom den Apparat *A* nicht umgehen kann. Wird der Taster T^1 allein niedergedrückt, so erhält man am Apparate *A* das farbige Zeichen auf der obern Seite des Papier-

streifens und ebenso auf dem Papierstreifen des Apparates *B*. Durch das Niederdrücken des Tasters T^2 für sich allein erscheint das farbige Zeichen dagegen nur auf der untern Seite des Papierstreifens am Apparate *A*. Beim gleichzeitigen Niederdrücken des Tasters T^1 und T^2 erscheint auf dem Papierstreifen des Apparates *A* weder oben, noch unten ein farbiges Zeichen, während auf der obern Seite des Papierstreifens am Appasate *B* ein solches zum Vorschein kommt. Hieraus folgt, dass zwar die chemische Wirkung des elektrischen Stroms der Batterie I. am Papierstreifen des Apparates *A* durch den gleichzeitigen, aber auf demselben Apparat beschränkten Gegenstrom der Batterie II. aufgehoben, der Strom der Batterie I. selbst aber dadurch in seiner Existenz nicht vernichtet wird, weil sonst auf dem Papierstreifen des Apparates *B* kein Zeichen entstehen würde. Hebt man am Apparate *B* die Verbindung des Schreibstifts mit der Erde auf und schaltet dazwischen einen Taster T^3 und eine Batterie III. in gleicher Weise, wie beim Apparat *A* ein, so erscheint, wenn man die Taster T^1, T^2 und T^3 gleichzeitig niederdrückt, nicht allein das farbige Zeichen auf dem Papierstreifen des Apparates *B*, sondern auch auf dem des Apparates *A*, woraus zu schliessen ist, dass der von der Batterie III. in den Leitungsdraht *L* eingeführte elektrische Strom sich in demselben gleichzeitig mit dem von der Batterie I. erzeugten fortpflanzt und am Apparate *A* das farbige Zeichen hervorbringt, während das farbige Zeichen am Apparate *B* gleichzeitig durch den Strom der Batterie I. und III. erzeugt wird.

Wenn nun auch die Annahme von der unbeirrten Coexistenz mehrerer elektrischer Ströme in e i n e r Leitung Veranlassung zur Erfindung von Apparaten wurde, mittelst welcher gleichzeitig auf einem Drahte in entgegengesetzten Richtungen gesprochen werden kann, so zeigte doch die Construction dieser Apparate, dass es dabei auf die Entscheidung obiger Frage gar nicht ankam, sondern dass mehr eine technische Aufgabe zu lösen war. Die Schwierigkeit lag hauptsächlich darin, dass der Morse'sche und auch der elektrochemische Schreibapparat so eingerichtet ist, dass beim Fortgeben von Nachrichten, also beim Niederdrücken des Tasters, der zugehörige Apparat aus der Linie ausgeschaltet, dagegen nur im Ruhestande und beim Empfangen von Nachrichten in die Linie eingeschaltet bleibt. Wollte man — was leicht ausführbar ist — den Apparat fortwährend, also auch beim Fortgeben von Nachrichten, in der Leitung eingeschaltet lassen, so würde der Apparat nicht nur die ankommende, sondern auch die abgehende Schrift aufzeichnen, was nothwendig bei gleichzeitigem Arbeiten auf beiden Stationen Verwirrung herbeiführen müsste. Das für die Doppelcorrespondenz zu lösende Problem bestand demnach in Folgendem: D a s R e l a i s , r e s p. d e r e l e k t r o c h e m i s c h e S c h r e i b a p p a r a t m u s s s t e t s i n d e r L e i t u n g e i n g e s c h a l t e t b l e i b e n , o h n e j e d o c h d u r c h d e n S t r o m d e r z u g e h ö r i g e n B a t t e r i e b e i m F o r t g e b e n v o n N a c h r i c h t e n a f f i c i r t z u w e r d e n.

Dr. Gintl hat dieses Problem zuerst im Jahre 1853 auf folgende sinnreiche Weise gelöst. Jedes Relais der Apparate *A* und *B* Fig. 34 besitzt zwei von einander unabhängige Drahtumwickelungen, von denen die innere, wie gewöhnlich, in die Linienbatterie und Linienleitung, die darüber gewickelte, aus stärkerem Drahte bestehende in die Kette einer Localbatterie, Ausgleichungsbatterie genannt, so eingeschaltet ist, dass beide Batterien beim gleichzeitigen Schluss derselben in gleicher Stärke, aber in entgegengesetztem Sinne auf den Elektromagnet einwirken, denselben also nicht

afficiren. Um die Linien- und Ausgleichungsbatterie stets gleichzeitig zu schliessen und zu öffnen, wird ein Doppeltaster angewandt, bestehend aus zwei gewöhnlichen nebeneinander befindlichen, aber von einander isolirten Tastern, welche durch einen isolirenden Knopf gleichzeitig niedergedrückt werden. Dieser Taster ist später von Dr. Gintl in sehr compendiöser Weise mit einem aus zwei von einander isolirten Theilen bestehenden Hebel construirt werden. In Fig. 34 sind *bb'* die Charniere der beiden Tasterhebel, *aa'* die Ambose und *cc'* die Ruhelager.

Wird nun auf einer Station, z. B. in *A* der Doppeltaster niedergedrückt, so wird die Linien- und Ausgleichungsbatterie gleichzeitig geschlossen. Der Strom der Linienbatterie geht durch *a'* und *b'* und durch die inneren Umwindungen des Relais in die Leitung, dann auf der entfernten Station *B* durch die inneren Umwindungen des dortigen Relais, durch *b'* und *c'* zur Erde und zurück nach *A*. Da aber auf der Station *A* gleichzeitig der Strom der Ausgleichungsbatterie in entgegengesetzter Richtung durch die äussere Umwindung des Relais geleitet wird, so entsteht hier kein Magnetismus und der Relaishebel bleibt in Ruhe. Auf der entfernten Station *B* findet der ankommende Linienstrom im Relais keine solche Compensation und setzt letzteres in gewöhnlicher Weise in Thätigkeit.

Wird nun in *B* gleichzeitig der Doppeltaster niedergedrückt, so compensirt sich hier der Strom der Linien- und Ausgleichungsbatterie und es bleibt nur der von *A* herkommende Strom allein wirksam; ebenso wirkt in *A*, wo zeither das Relais durch das Tasterdrücken daselbst nicht afficirt wurde, allein der von *B* herkommende Linienstrom und es ist somit klar, dass gleichzeitig Zeichen von *A* nach *B* und von *B* nach *A* gelangen können. Es ist hierbei ganz gleich, welche Pole der Linienbatterie in die Leitung eingeschaltet werden, wenn nur der Strom der Ausgleichungsbatterie dem der zugehörigen Linienbatterie entgegengerichtet ist.

Weil nun aber der Linienstrom fortwährenden Veränderungen unterliegt und weil die Ausgleichungsbatterie wegen des geringen zu überwindenden Widerstandes schneller in ihrer Stärke abnimmt, als die Linienbatterie, so wird die Compensation der Stromwirkungen im Relais beim Niederdrücken des zugehörigen Doppeltasters nie vollständig erfolgen und zu vielen Störungen beim gleichzeitigen Entgegensprechen Veranlassung geben. Dieser Umstand veranlasste den Dr. Gintl, den elektrochemischen Schreibapparat hierbei anzuwenden, mit dem auch in der That ein günstigeres Resultat erzielt wurde, weil die Erfahrung gelehrt hat, dass auch bei ziemlich verschiedener Stromstärke der Linien- und Ausgleichungsbatterie in ihrer Verbindung dennoch eine Compensation der chemischen Wirkungen dieser Ströme bei ihrem Durchgange durch den feuchten, chemisch präparirten Papierstreifen in entgegengesetzten Richtungen eintritt. Fig. 35 stellt die Verbindungen zweier zum gleichzeitigen Entgegensprechen eingerichteten chemischen Schreibapparate dar und es findet hierbei folgender Vorgang statt:

Wenn auf Station *A* der Doppeltaster niedergedrückt wird, so geht der positive Strom der Linienbatterie durch *a* und *c* des Tasters in den Platinstift *d*, durch das feuchte Papier zur Metallwalze *e* und in die Leitung, der positive Strom der Ausgleichungsbatterie dagegen durch einen Rheostaten in die Metallwalze, in einer dem Linienstrome entgegengesetzten Richtung, durch den Papierstreifen und durch *d*, *c'* und *a'* zurück zur Batterie. Auf dem Papierstreifen des Apparates *A* entsteht folglich kein Zeichen, wohl

aber auf dem des Apparates *B*, wo der von *A* herkommende positive Linienstrom aus dem Schreibstifte *d* durch das feuchte Papier zur Walze *e* und von hier durch *c* und *b* des Tasters zur Erde gelangt. Der Rheostat ist deshalb eingeschaltet, damit der Linienstrom gezwungen wird, durch den Papierstreifen hindurchzugehen und nicht denselben auf dem Wege über *c' a'* und durch die Ausgleichungsbatterie hindurch umgehen kann.

Wird nun am Apparate *B* gleichzeitig der Doppeltaster niedergedrückt, so ist hier derselbe Vorgang wie bei *A*; die Ströme der Linien- und Ausgleichungsbatterie gehen in entgegengesetzter Richtung durch den feuchten Papierstreifen uud compensiren sich hier in ihrer chemischen Wirkung, so dass der von *A* herkommende Strom allein wirksam bleibt, dagegen geht der positive Linienstrom von *B* in der Erde nach *A*, durch die dortige Linienbatterie über *a* und *c* in den Schreibstift, durch den Papierstreifen und über *e* in der Leitung zurück zum andern Pole der Linienbatterie von *B*. Es entstehen also auf dem Papierstreifen des Apparates *A* so lange farbige Zeichen, als in *B* der Doppeltaster niedergedrückt wird, ebenso Zeichen auf dem Papier des Apparates *B* in dem Maasse als mit dem Taster in *A* gearbeitet wird, es mag dies gleichzeitig geschehen oder nicht.

Da der elektrochemische Apparat keine hörbaren Zeichen giebt, so muss mit jedem Apparate noch ein Weckerwerk verbunden werden, welches durch den von der entfernten Station kommenden Strom gelöst wird.

Im Jahre 1854 ist es dem Telegraphen-Ingenieur Frischen in Hannover, sowie den Herren Siemens und Halske in Berlin gelungen, dem Morse'schen Schreibapparate eine solche Einrichtung zu geben, dass das gleichzeitige Telegraphiren auf einem Drahte in entgegengesetzten Richtungen unabhängig von dem variabeln Zustande der Batterien und ohne Anwendung von Ausgleichungsbatterien vollkommen sicher ausgeführt werden kann. Die Einrichtung und Verbindung zweier solcher Apparate *A* und *B* ist in Fig. 36 dargestellt. Das Relais eines solchen Apparates ist mit zwei gleichlangen und gleichstarken von einander isolirten Drähten umwunden, so dass zwei gleichstarke elektrische Ströme, welche gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen durch diese beiden Drähte hindurchgesandt werden, sich in ihrer elektromagnetischen Wirkung vollständig aufheben und keinerlei Bewegung an denselben hervorbringen. Geht hingegen ein Strom durch eine dieser Windungen allein oder durch beide Windungen in derselben Richtung oder gehen endlich zwei ungleichstarke Ströme in entgegengesetzter Richtung durch beide Drahtwindungen, so wird das Relais dadurch afficirt und der Strom der Localbatterie durch das Schreibwerk hindurch geschlossen. Der Strom der Linienbatterie, welcher beim Niederdrücken des Tasters in Circulation tritt, theilt sich hinter dem Taster in zwei Zweigströme, welche die beiden Drähte des Relais in entgegengesetzten Richtungen und in gleicher Stärke durchströmen und demnach keine Wirkung auf dasselbe hervorbringen. Der eine dieser Ströme geht durch die Leitung nach der entfernten Station und kehrt in die Erde zurück, der andere hingegen, um mit jenem gleiche Stärke zu haben, durch einen eingeschalteten künstlichen Widerstand, welcher dem in der Leitung und den eingeschalteten Apparaten zusammengenommen gleich ist, und hierauf an derselben Station zurück zum andern Pole der Linienbatterie. Der Vorgang beim einfachen Telegraphiren von *A* nach *B* ist demnach folgender: Der Strom der Linienbatterie geht von *p* durch *a* und *b* des niedergedrückten Tasters nach einer Metallfeder *S* und in den Hebel *x* und theilt

sich hier in zwei Zweige; einer derselben geht durch einen Relaisdraht in der Richtung von e nach d, durch den Widerstand zur Erde und zum andern Batteriepole, der andere durch den zweiten Relaisdraht in der Richtung von d' nach e' und in der Leitung nach dem Apparate B, hier durch einen Draht des Relais in der Richtung von c' nach d' in den Hebel x und durch b und c des ruhenden Tasters zur Erde. Ein schwächerer Stromtheil geht hier auch noch durch den zweiten Relaisdraht, jedoch in derselben Richtung von e nach d und durch den Widerstand zur Erde. Das Relais des Apparates A bleibt demnach in Ruhe, während in B des Relaishebel f angezogen und mit der Schraube g in Berührung gebracht wird, wodurch sich die Localbatterie durch den Elektromagnet des Schreibwerks hindurch schliesst, wie aus der Zeichnung deutlich zu ersehen ist.

Wird nun in B gleichzeitig der Taster niedergedrückt, so geht auch hier der Linienstrom in zwei gleichstarken Zweigen und in entgegengesetzten Richtungen durch das Relais und übt demnach keine Wirkung auf dasselbe aus, es bleibt also nur der von A herkommende Strom hier wirksam. Derjenige Zweigstrom der Linienbatterie von B, welcher in der Leitung nach A gelangt, geht hier durch den einen Relaisdraht in der Richtung von e' nach d', über x und S in den Tasterhebel b und von hier aus über a (wenn der Taster niedergedrückt ist) oder über c (wenn der Taster in Ruhe ist) oder endlich durch den zweiten Relaisdraht in der Richtung von e nach d und durch den Widerstand (wenn der Tasterhebel b während des Niederdrückens weder mit a noch mit c in Berührung ist) zur Erde, afficirt hier das Relais und bewirkt dadurch den Schluss der Localbatterie. Das Niederdrücken des Tasters in A wird daher stets nur entsprechende Zeichen in B und das Tasterdrücken in B Zeichen in A hervorbringen, es mag dies gleichzeitig geschehen oder nicht.

Zu demselben Resultate der Erklärung des gleichzeitigen Entgegensprechens gelangt man auch, wenn man die gleichzeitige Coexistenz mehrere Ströme in einem Drahte läugnet. Wenn sich die Ströme in der Leitung zerstören, so bleibt an jeder Station der Zweigstrom übrig, welcher durch den Widerstand hindurchgeht und welcher wegen seines einseitigen Durchganges durch das Relais dasselbe nothwendigerweise afficiren muss.

Die in Fig. 36 dargestellten Apparate sind als Uebertragungsapparate so construirt, dass man durch jeden derselben eine ankommende Depesche ohne Zuthun eines Beamten gleichzeitig zurücktelegraphiren, also collationiren lassen kann. In diesem Falle verrichtet der Schreibhebel, indem er die Zeichen auf dem Papierstreifen einschlägt, gleichzeitig die Function des Tasters. Wenn eine Depesche, welche von A nach B telegraphirt wird, durch den Apparat B gleichzeitig nach A zurücktelegraphirt werden soll, so wird in B der Hebel x auf die Feder C gestellt, wodurch der Taster ausgeschaltet wird und der Schreibhebel an dessen Stelle tritt. Der von A nach B kommende Strom geht dann nämlich durch den einen Relaisdraht in der Richtung von e' nach d' in den Hebel x, über C in den Schreibhebel h und von hier analog wie beim Taster, entweder durch die Schraube i oder durch k oder endlich durch den andern Relaisdraht von e nach d und den Widerstand zur Erde.

Wenn nun der Schreibhebel h angezogen ist und auf der Schraube i aufliegt, so geht der Linienstrom von p durch i und h nach C in den Hebel x und von hier an in gleicher Weise, wie oben beschrieben wurde, nämlich in zwei gleichstarken Zweigen, aber in entgegengesetzten Richtungen

durch die beiden Relaisdrähte, hierauf einerseits durch den Widerstand zur Erde und Batterie zurück, andernseits in der Leitung nach A und bringt hier dieselben Zeichen hervor, welche von da aus mittelst des Tasters nach B hin telegraphirt werden.

In einem folgenden Artikel soll das auf einem ganz anderen Principe beruhende gleichzeitige Telegraphiren von zwei gleichgerichteten Depeschen besprochen werden.

VII.

Ueber die Gleichung der Ebene.

Von Dr. W. Schell,

Privatdocent an der Universität Marburg.

Um zu einer Gleichung für die Ebene in Bezug auf ein Parallelcoordinatensystem zu gelangen, besitzt die analytische Geometrie verschiedene Mittel. Entweder betrachtet man nämlich die Ebene als den Ort aller Punkte, welche von zwei festen Punkten gleichweit abstehen, oder man geht von der Eigenschaft der Ebene aus, vermöge welcher von irgend einem Punkte in ihr sich unzählige Gerade ziehen lassen, welche ganz in dieselbe hineinfallen, oder man sieht die Ebene als den Ort aller Punkte an, welche mit dreien festen Punkten in ihr die Ecken einer Pyramide bilden, deren Volumen gleich Null ist, oder endlich man benutzt den Satz, nach welchem die Projection eines geschlossenen Polygons auf irgend eine Gerade im Raume verschwindet. Jede dieser Methoden besitzt ihre Vorzüge, aber alle haben Das gemein, dass ihre Anwendung bei schiefwinkligen Coordinatensystemen weniger einfach, als beim rechtwinkligen ist. Im Folgenden soll nun eine Methode, die Gleichung der Ebene abzuleiten, gegeben werden, welche von diesem Mangel frei ist und zugleich die Rechnung auf ein Minimum reducirt. Es gründet sich dieselbe auf einen bekannten Satz über das Dreieck, dessen Beweis wir aber hier etwas sorgfältiger führen wollen, als sonst wohl zu geschehen pflegt.

I.

Sind A, B, C die Durchschnitte dreier festen Geraden, M ein beliebiger Punkt in ihrer Ebene und α, β, γ die Punkte, in welchen die Transversalen MA, MB, MC die den Punkten A, B, C gegenüberliegenden Linien BC, CA, AB treffen, so ist, welches auch immer die Lage des Punktes M und die gegenseitige Lage der drei festen Geraden sein mag, die Summe der absoluten Werthe der drei Verhältnisse

$$\frac{\alpha M}{\alpha A}, \quad \frac{\beta M}{\beta B}, \quad \frac{\gamma M}{\gamma C}$$

der positiven Einheit gleich.

Ein solches Verhältniss, z. B. $\frac{\alpha M}{\alpha A}$ wird hierbei als positiv oder negativ angesehen, je nachdem die beiden Linien αM und αA, zwischen denen es besteht, gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Im zweiten Falle ist also $-\frac{\alpha M}{\alpha A}$ als der absolute Werth dieses Verhältnisses einzuführen.

Beweis.

1. Wir wollen zunächst annehmen, dass keiner von den Punkten A, B, C im Unendlichen liege. Dann theilen die drei Geraden, welche sich in diesen Punkten schneiden, die ganze Ebene in sieben Theile (Fig. 37), von denen einer, die Fläche F des Dreiecks ABC, endlich ist, während die sechs übrigen sich ins Unendliche erstrecken. Von diesen letzteren werden drei (U) durch F zu den Räumen der Winkel A, B, C ergänzt, während die drei übrigen (V) in die Scheitelwinkel von A, B, C fallen. Liegt nun der Punkt M in irgend einem dieser sieben Räume, so ist, wie man leicht sieht, in allen Fällen die algebraische Summe der Dreiecke MBC, MCA, MAB gleich dem Dreiecke ABC. Insbesondere

a) wenn M in F liegt, so ist

$$\triangle MBC + \triangle MCA + \triangle MAB = \triangle ABC,$$

wenn dagegen

b) M sich in einem der Räume U befindet, so besteht eine der Relationen

$$\begin{aligned} \triangle MBC + \triangle MCA - \triangle MAB &= \triangle ABC \\ \triangle MBC - \triangle MCA + \triangle MAB &= \triangle ABC \\ -\triangle MBC + \triangle MCA + \triangle MAB &= \triangle ABC \end{aligned}$$

und zwar hat hierin jedesmal dasjenige Dreieck das Zeichen $-$, welches mit dem Dreieck ABC auf entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen Seite liegt; fällt endlich

c) der Punkt M in einen der Räume V, so ist diese Relation durch eine der folgenden

$$\begin{aligned} \triangle MBC - \triangle MCA - \triangle MAB &= \triangle ABC \\ -\triangle MBC + \triangle MCA - \triangle MAB &= \triangle ABC \\ -\triangle MBC - \triangle MCA + \triangle MAB &= \triangle ABC \end{aligned}$$

zu ersetzen und auch hier haben diejenigen beiden Dreiecke das Zeichen $-$, welche mit $\triangle ABC$ auf entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Seitenlinien liegen.

Liegt der Punkt M in einer der drei Geraden selbst, so gehört er zweien Räumen F, U oder F, V oder U, V gleichzeitig an und, wie leicht zu sehen, bestehen die beiden hierauf bezüglichen Relationen dadurch simultan, dass das Dreieck, welches in der einen das entgegengesetzte Zeichen von dem hat, das es in der andern führt, verschwindet. Dies Dreieck ist immer dasjenige, welches die beiden Punkte A, B oder A, C oder B, C in deren Verbindungslinie M liegt, mit M zu Ecken hat.

Fällt M in eine Ecke A, B, C, so gehört dieser Punkt dem Raume F, einem Raume V und zweien Räumen U gleichzeitig an. Die hierauf bezüglichen vier Relationen bestehen auch hier simultan und zwar wird dies da-

durch möglich, dass diejenigen beiden Dreiecke verschwinden, welche die Ecke gemein haben, mit welcher M zusammenfällt.

Rückt M ins Unendliche, so bestehen die obigen Relationen ebenfalls fort, nur gehen die Dreiecke, welche M zu einer Ecke haben, in Parallelstreifen über.

Da die aufgestellten sieben Relationen sich nur durch die Vorzeichen von einander unterscheiden, mit welchen die Dreiecke MBC, MCA, MAB behaftet sind, und also aus irgend einer von ihnen abgeleitet werden können, wenn man die nöthigen Bedingungen über den Wechsel dieser Zeichen hinzufügt, so genügt es, eine derselben als die allgemeine aufzustellen. Wir wählen hierzu die erste und stellen sie unter folgender Form dar:

$$1)\qquad \frac{\triangle MBC}{\triangle ABC} + \frac{\triangle MCA}{\triangle ABC} + \frac{\triangle MAB}{\triangle ABC} = 1.$$

Die Bedingung ihrer Allgemeingültigkeit ist dem Vorigen zufolge die, dass jedes der drei Verhältnisse auf der linken Seite mit dem Zeichen + oder — versehen werden muss, je nachdem die beiden Dreiecke, zwischen welchen es besteht, auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen Seitenlinie liegen.

Nun bestehen ferner, sowohl hinsichtlich der absoluten Werthe, als auch der Vorzeichen, die Gleichungen (Fig. 38 und 39)

$$2)\qquad \begin{aligned} \frac{\triangle MBC}{\triangle ABC} &= \frac{\alpha M}{\alpha A} \\ \frac{\triangle MCA}{\triangle ABC} &= \frac{\beta M}{\beta B} \\ \frac{\triangle MAB}{\triangle ABC} &= \frac{\gamma M}{\gamma C}. \end{aligned}$$

Von dem ersten Theile dieser Behauptung überzeugt man sich sofort; was aber die Vorzeichen betrifft, so erhält nach der oben gegebenen Erklärung ein Verhältniss, wie $\frac{\alpha M}{\alpha A}$, das Zeichen +, wenn αM und αA gleiche, das Zeichen —, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben. Liegen M und A auf derselben Seite von α, so tritt der erste, liegen sie auf entgegengesetzten Seiten dieses Punktes, der zweite Fall ein. Da der Punkt α aber in der Linie BC liegt, so liegen die beiden Dreiecke MBC und ABC im ersten Falle auf derselben, im zweiten auf entgegengesetzter Seite der gemeinschaftlichen Linie BC und es erhält also nach dem Obigen das Verhältniss $\frac{\triangle MBC}{\triangle ABC}$ ebenfalls das Zeichen + oder —. Es stimmen also auch die Vorzeichen von $\frac{\triangle MBC}{\triangle ABC}$ und $\frac{\alpha M}{\alpha A}$ überein. Ebenso verhält es sich bei den in der zweiten und dritten Gleichung vorkommenden Verhältnissen.

Addiren wir jetzt die drei Gleichungen 2), so folgt mit Rücksicht auf 1) ganz allgemein

$$\frac{\alpha M}{\alpha A} + \frac{\beta M}{\beta B} + \frac{\gamma M}{\gamma C} = 1$$

wie zu beweisen war.

2. Wir wollen jetzt zeigen, dass unser Satz auch noch gilt, wenn einer der Punkte A, B, C, z. B. C, im Unendlichen liegt. Da in diesem Falle die Linien AC und BC parallel laufen, so geht die Fläche F in einen

halben Parallelstreifen über, welchen einer der Räume U ergänzt; die beiden anderen Räume U fallen mit den Räumen der Nebenwinkel von A und B zusammen; ein Raum V verschwindet im Unendlichen, während die beiden anderen bleiben (Fig. 40). Nun erkennt man sogleich, dass unter denselben Bedingungen der Allgemeinheit, welche unter 1. aufgestellt wurden, auch jetzt noch die Relation

$$MBC + MCA + MAB = ABC$$

und also auch die folgende

$$\text{3)} \qquad \frac{MBC}{\triangle ABC} + \frac{MCA}{\triangle ABC} + \frac{MAB}{\triangle ABC} = 1$$

besteht. Ferner sieht man, dass, wenn

a) der Punkt M in den Halbparallelstreifen F oder in seine Ergänzung U fällt,

$$\triangle MAB = \triangle MA\gamma + \triangle MB\gamma,$$

dass dagegen

b) wenn M in einen der Räume U oder V fällt, welche durch die Linie BC von F und seiner Ergänzung geschieden werden,

$$\triangle MAB = \triangle MA\gamma - \triangle MB\gamma,$$

sowie, dass wenn

c) M in einem der Räume U oder V sich findet, welche durch AC von F und seiner Ergänzung getrennt sind,

$$\triangle MAB = \triangle MB\gamma - \triangle MA\gamma$$

wird.

Fasst man diese drei Fälle in einen zusammen, so kann man sagen, dass allgemein

$$\triangle MAB - \triangle MA\gamma - \triangle MB\gamma = 0$$

ist, wenn man dabei festhält, dass ein Dreieck wie $MA\gamma$ oder $MB\gamma$ das Zeichen ändert, sobald die dem M gegenüberliegende Seite $A\gamma$ oder $B\gamma$ ganz in die Verlängerung von AB fällt. Dividiren wir diese Gleichung mit $\triangle ABC$ und subtrahiren sie von der Gleichung 3), so kommt

$$\frac{MBC + MB\gamma}{\triangle ABC} + \frac{MCA + MA\gamma}{\triangle ABC} = 1,$$

oder weil

$$MBC + MB\gamma = CB\gamma$$
$$MCA + MA\gamma = CA\gamma$$

ist,

$$\frac{CB\gamma}{\triangle ABC} + \frac{CA\gamma}{\triangle ABC} = 1.$$

Weiter ist aber

$$\frac{CB\gamma}{\triangle ABC} = \frac{\alpha M}{\alpha A}$$
$$\frac{CA\gamma}{\triangle ABC} = \frac{\beta M}{\beta B},$$

daher hat man

$$\frac{\alpha M}{\alpha A} + \frac{\beta M}{\beta B} = 1.$$

Da der Punkt C im Unendlichen liegt, so ist

$$\frac{\gamma M}{\gamma C} = 0$$

und also, wenn man dies addirt,

$$\frac{\alpha M}{\alpha A} + \frac{\beta M}{\beta B} + \frac{\gamma M}{\gamma C} = 1,$$

wie zu beweisen war.

3) Rücken zwei Punkte B und C ins Unendliche (Fig. 41), so geht I in den Winkelraum A, zwei Räume U in die der Nebenwinkel von A über, der dritte Raum U verschwindet im Unendlichen, ebenso zwei Räume V, und von dieser letzteren Art bleibt nur der Scheitelraum von A. Man sieht leicht, dass auch hier noch

$$MBC + MCA + MAB = ABC$$

oder

$$\frac{MBC}{ABC} + \frac{MCA}{ABC} + \frac{MAB}{ABC} = 1$$

ist, obgleich hier MCA und MAB Halbparallelstreifen, MBC und ABC Winkelräume sind. Auch hier ist noch

$$\frac{MBC}{ABC} = \frac{\alpha M}{\alpha A}$$

$$\frac{MCA}{ABC} = \frac{AM}{\alpha A} = \frac{\beta M}{\beta B}$$

$$\frac{MAB}{ABC} = \frac{AM}{\alpha M} = \frac{\gamma M}{\gamma C}$$

und folglich

$$\frac{\alpha M}{\alpha A} + \frac{\beta M}{\beta B} + \frac{\gamma M}{\gamma C} = 1.$$

Allein weil

$$\frac{\alpha M}{\alpha A} = 1$$

$$\frac{\beta M}{\beta B} = 0$$

$$\frac{\gamma M}{\gamma C} = 0$$

wird, so löst sich diese Gleichung in eine bedeutungslose Identität auf.

Der im Vorstehenden bewiesene Satz drückt die Bedingung aus, welche erfüllt sein muss, wenn ein Punkt M in der Ebene dreier fester Punkte A, B, C liegen soll. Denn sobald M aus dieser Ebene heraustritt, so schneiden die Geraden MA, MB, MC die Seiten des Dreiecks ABC nicht mehr, es hören also die Momente αM, βM, γM, αA, βB, γC auf zu existiren. Unser Satz ist daher ein Ausspruch der charakteristischen Eigenschaft der Ebene und kann in Folge dessen dazu dienen, eine Gleichung für die Ebene zu entwickeln, wie wir dies sogleich sehen werden.

II.

Es werde die Ebene E auf irgend ein rechtwinkliges oder schiefwinkliges Parallelcoordinatensystem der x, y, z bezogen (Fig. 42) und seien A, B, C die Durchschnittspunkte derselben mit den Axen der x, y, z und also AB, BC, CA ihre Kantenlinien in den Ebenen der xy, yz, zx. Die Entfernungen der Punkte A, B, C vom Coordinatenursprung O, nämlich die Strecken OA, OB, OC bezeichnen wir mit a, b, c; die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Ebene seien x, y, z.

1. Nehmen wir zunächst an, es seien a, b, c alle endlich und positiv. Durch den Punkt M und die Axe x legen wir eine Ebene, welche die Ebene E und die der yz in den Geraden $A\alpha$ und $O\alpha$ schneiden wird, deren Durchschnittspunkt α auf der Geraden BC liegt. Ziehen wir nun durch M eine Gerade parallel der x-Axe, so ist das Stück Mp derselben von M bis zum Durchschnitt dieser Geraden mit $O\alpha$ die Coordinate x des Punktes M und es besteht sowohl dem absoluten Werthe als auch dem Vorzeichen nach die Gleichung

$$\frac{\alpha M}{\alpha A} = \frac{x}{a}.$$

Ersteres sieht man sofort vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke αMO und αMp ein, letzteres folgt so. Da a positiv ist, so hängt das Zeichen von $\frac{x}{a}$ nur vom Zeichen des x ab. Die Grenze für die positiven und negativen Werthe von x bildet aber die xz-Ebene; die Grenze für die positiven und negativen Werthe von $\frac{\alpha M}{\alpha A}$ ist aber nach den Entwickelungen unter I. die Linie BC und da diese in derselben Ebene liegt, ebenfalls die xz-Ebene. Daher stimmen $\frac{x}{a}$ und $\frac{\alpha M}{\alpha A}$ auch im Vorzeichen überein.

Legt man ebenso durch die y-Axe und den Punkt M eine Ebene, welche die Linie CA in β, und durch die z-Axe und M eine Ebene, welche AB in γ schneidet, so erhält man

$$\frac{\beta M}{\beta B} = \frac{y}{b}, \quad \frac{\gamma M}{\gamma C} = \frac{z}{c}.$$

Addirt man nun die drei Gleichungen, so folgt mit Rücksicht auf I.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

welches die Gleichung der Ebene ist.

2. Ist einer der Parameter z. B. negativ, so sind die Grössen

$$\frac{\alpha M}{\alpha A} \text{ und } \frac{x}{a}$$

absolut gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen, mithin

$$\frac{\alpha M}{\alpha A} = -\frac{x}{a},$$

mithin ist die Gleichung der Ebene

$$-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Aehnlich, wenn noch ein anderer oder auch alle drei Parameter negativ sein sollten.

3. Läuft die Ebene parallel der x-Axe, so fällt A ins Unendliche, es wird $a = \infty$ und

$$\frac{\alpha M}{\alpha A} = 0 = \frac{x}{a},$$

mithin bleibt blos

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

als Gleichung der Ebene.

4. Läuft die Ebene zugleich auch noch mit der y Achse parallel, ist also $b = \infty$, so bleibt blos

$$\frac{z}{c} = 1.$$

5. Fällt die Ebene mit einer der Coordinatenebenen z. B. der xy Ebene zusammen, so wird $c = 0$, $a = b = \infty$ und die Gleichung geht über in

$$z = 0$$

wie man sieht, wenn man sie unter der Form

$$\frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y + z = c$$

darstellt.

6. Verschwinden alle 3 Parameter, so dass $a = b = c = 0$ wird, während ihre Verhältnisse endlich bleiben, nämlich

$$a : b : c = \lambda : \mu : \nu,$$

so erhält man als Gleichung für eine durch den Ursprung der Coordinaten gehenden Ebene

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} + \frac{z}{\nu} = 0$$

wie man sieht, wenn man dieselbe unter einer Form, wie z. B.

$$x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = a$$

darstellt und für $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, a ihre Werthe $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda}{\nu}$, 0 einsetzt. Um die Bedeutung von λ, μ, ν zu erkennen, denke man a, b, c im Momente des Verschwindens und fälle auf die Ebene vom Coordinatenursprung ein Perpendikel, dessen Länge p gleichfalls mit a, b, c verschwindet. Dann ist, wenn α, β, γ die Determinantenwinkel der Richtung dieses Perpendikels sind,

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\frac{b}{p} = \frac{1}{\cos\beta},$$

$$\frac{c}{p} = \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Hieraus folgt

$$a : b : c = \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma}$$

und weiter durch Vergleichung mit dem obigen

$$a : b : c = \lambda : \mu : \nu$$

$$\lambda : \mu : \nu = \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Es sind also λ, μ, ν Zahlen, welche den Determinanten des im Ursprunge auf die Ebene errichteten Perpendikels umgekehrt proportional sind.

Die Ebene ist eine von den vielen Flächen, deren Gleichungen sowohl für rechtwinklige als schiefe Coordinaten in der allgemeinen Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} = 1$$

enthalten sind. Mit Hilfe des im Vorstehenden unter I. bewiesenen Theorems gelangt man ohne Mühe auch zu den Gleichungen solcher Flächen. Wir wollen hier nur das Ellipsoid betrachten.

1. Es seien a, b, c irgend drei conjugirte Diameter eines Ellipsoids, deren Richtungen wir als Richtungen der Achsen eines Coordinatensystems annehmen wollen, dessen Ursprung O im Mittelpunkt der Fläche liegt. Durch einen beliebigen Punkt M der Fläche, dessen Coordinaten x, y, z seien, legen wir an diese die Tangentenebene; sie trifft die Achsen der x, y, z in Punkten A, B, C und die Coordinatenebenen xy, yz, zx in den Graden AB, BC, CA. Durch die x Achse und den Punkt M legen wir weiter eine Ebene, welche das Ellipsoid in eine Ellipse und die Tangentenebene in einer Graden $A\alpha$, nämlich der Tangente dieser Ellipse in M, sowie die xz Ebene in einer Graden $O\alpha$ schneidet, deren Richtung zur Richtung OA conjugirt ist (Fig. 43). Zieht man nun nach $Mp = x$ parallel OA und MP parallel $O\alpha$, so hat man

$$\frac{\alpha M}{\alpha A} = \frac{x}{OA}.$$

Nun ist aber einem bekannten Satze über die Ellipse zufolge

$$OP \,.\, OA = x \,.\, OA = a^2$$

und daher wird

$$\frac{\alpha M}{\alpha M} = \frac{x}{\left(\frac{a^2}{x}\right)} = \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

vertauscht man die Achsen, so findet man ebenso

$$\frac{\beta M}{\beta B} = \frac{y}{\left(\frac{b^2}{y}\right)} = \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

$$\frac{\gamma M}{\gamma C} = \frac{z}{\left(\frac{c^2}{z}\right)} = \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

daher ist schliesslich unter Anwendung des unter I. bewiesenen Theorems

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Um die Gleichung der Tangentenebene des Ellipsoids im Punkte M (x, y, z) zu finden, genügt Folgendes. Ist N ein beliebiger Punkt dieser Ebene mit den Coordinaten ξ, η, ζ so ist, wenn die durch N und die Coordinatenachsen gelegten Ebenen die Graden BC, CA, AB in α', β', γ' treffen,

$$\frac{\alpha' N}{\alpha' A} + \frac{\beta' N}{\beta' B} + \frac{\gamma' N}{\gamma' C} = 1.$$

Nun ist aber, wie leicht zu sehen

$$\frac{\alpha' N}{\alpha' A} = \frac{\xi}{OA} = \frac{\xi}{\left(\frac{a^2}{x}\right)} = \frac{x\xi}{a^2}$$

und ebenso

$$\frac{\beta' N}{\beta' B} = \frac{y\eta}{b^2}$$

$$\frac{\gamma' N}{\gamma' C} = \frac{z\zeta}{c^2}$$

mithin
$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1.$$

2. Kennt man für irgend eine Fläche die Natur der ebenen Schnitte, welche durch die Achsen der x, y, z geführt werden können und kann man aus der Betrachtung dieser die Achsenabschnitte der Tangentenebenen, nämlich die Strecken OA, OB, OC erhalten, so ist die Gleichung der Fläche
$$\frac{x}{OA}+\frac{y}{OB}+\frac{z}{OC}=1$$
bedeuten ϱ, σ, τ die Subtangenten jener ebenen Schnitte, so wird
$$OA=x+\varrho,\quad OB=y+\sigma,\quad OC=z+\tau$$
und also die Gleichung der Fläche
$$\frac{x}{x+\varrho}+\frac{y}{y+\sigma}+\frac{z}{z+\tau}=1.$$
Da ϱ, σ, τ als Functionen der Coordinaten x, y, z ausgedrückt werden müssen, so ist diese Methode insbesondere dann brauchbar, wenn diese Längen nur von resp. x, y, z allein abhängen, so dass etwa $\varrho=\varphi(x)$, $\sigma=\psi(x)$, $\tau=\chi(x)$ wird, wie dies im Obigen der Fall ist. Die Gleichung der Tangentenebene ist in allen Fällen, wenn ξ, η, ζ laufende Coordinaten auf derselben bedeuten
$$\frac{\xi}{x+\varrho}+\frac{\eta}{y+\sigma}+\frac{\zeta}{z+\tau}=1.$$

3. Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass analoge Betrachtungen auch zur Auffindung der Gleichung ebener Curven dienen können. So ist z. B. für die Ellipse (Fig. 7), wenn dieselbe auf zwei conjugirte Diameter OA und $O\alpha$ bezogen wird und αA die Tangente in $M(x,y)$ ist
$$\frac{\alpha M}{\alpha A}+\frac{AM}{A\alpha}=1$$
oder weil
$$\frac{\alpha M}{\alpha A}=\frac{OP}{OA}$$
$$\frac{AM}{A\alpha}=\frac{PM}{O\alpha}$$
$$\text{1)}\qquad \frac{OP}{OA}+\frac{PM}{O\alpha}=1.$$

Da nun PM die Richtung der Polaren des Punktes A und pM die der Polaren von B ist, so sind A, P; D, D' und α, p; E, E' zwei Quadrupel harmonischer Punkte, mithin
$$OP\,.\,OA=\overline{OD}^2$$
$$Op\,.\,O\alpha=\overline{OE}^2$$
oder weil
$$OP=x,\quad Op=y$$
ist, wenn noch die halben Diameter OD und OE mit a und b bezeichnet werden
$$x\,.\,OA=a^2,\quad y\,.\,O\alpha=b^2,$$
mithin, wenn man hieraus OA und $O\alpha$ entnimmt und in die Gleichung 1) einsetzt, so kommt als Gleichung der Ellipse
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Kleinere Mittheilungen.

XIV. Discours de M. J. Liouville,

prononcé aux funérailles de M. Sturm,

le Jeudi, 20 Decembre 1855.

Messieurs.

Le géomètre supérieur, l'homme excellent dont nous accompagnons les restes mortels, a été pour moi, pendant vingt-cinq ans, un ami dévoué; et par la bonté même de cette amitié, comme par les traits d'un caractère naïf uni à tant de profondeur, il me rappelait le maître vénéré qui a guidé mes premiers pas dans la carrière des mathématiques, l'illustre Ampère.

M. Sturm était à mes yeux un second Ampère: candide comme lui, insouciant comme lui de la fortune et des vanités du monde; tous deux joignant à l'esprit d'invention une instruction encyclopédique; négligés ou même dédaignés par les habiles qui cherchent le pouvoir, mais exerçant une haute influence sur la jeunesse des écoles, que le génie frappe; possédant enfin, sans l'avoir désiré, sans le savoir peut-être, une immense popularitè.

Prenez au hasard un des candidats à notre École Polytechnique, et demandez-lui ce que c'est que le théorème de M. Sturm: vous verrez s'il répondra! La question pourtant n'a jamais été exigée par aucun programme: elle est entrée d'elle-même dans l'enseignement, elle s'est imposée comme autrefois la théorie des couples.

Par cette découverte capitale, M. Sturm a tout à la fois simplifié et perfectionné, en les enrichissant de résultàts nouveaux, les éléments d'algèbre.

Ce magnifique travail a surgi comme un corollaire d'importantes recherches sur la mécanique analytique et sur la mécanique céleste, que notre confrère a données, par extrait seulement, dans le *Bulletin des Sciences* de M. Férussac.

Deux beaux Mémoires sur la discussion des équations différentielles et à différences partielles, propres aux grands problèmes de la physique mathématique, ont été du moins publiés en entier, grâce à mon insistance. «La postérité impartiale les placera à côté des plus beaux Mémoires de Lagrange.» Voilà ce que j'ai dit et imprimé il y a vingt ans, et ce que je répète sans craindre qu'aujourd'hui personne vienne me reprocher d'être trop hardi.

M. Sturm a été le collaborateur de M. Colladon, dans des expériences sur la compressibilité des liquides, que l'Académie a honorées d'un de ses grands prix.

Nous lui devons un travail curieux sur la vision, un Mémoire sur l'optique, d'intéressantes recherches sur la mécanique, et en particulier un théorème remarquable sur la variation que la force vive éprouve lors d'un changement brusque dans les liaisons d'un système en mouvement. Quelques articles sur des points de détail ornent nos recueils scientifiques.

Mais, bien qu'il y ait de quoi suffire à plus d'une réputation dans cet ensemble de découvertes solidement fondées et que le temps respectera, les amis de notre confrère savent que M. Sturm est loin d'être là tout entier, même comme géomètre. Puissent les manuscrits si précieux que quelques-uns de nous ont entrevus se retrouver intacts entre les mains de sa famille! En les publiant, elle ne déparera pas les chefs-d'oeuvre que nous avons tant admirés.

L'originalité dans les idées, et, je le répète, la solidité dans l'exécution, assurent à M. Sturm une place à part. Il a eu de plus le bonheur de rencontrer une de ces vérités destinées à traverser les siècles sans changer de forme, et en gardant le nom de l'inventeur, comme le cylindre et la sphère d'Archimède.

Et la mort est venue nous l'enlever dans la force de l'âge! Il est allé rejoindre Abel et Galois, Göpel, Eisenstein, Jacobi.

Ah! cher ami, ce n'est pas toi quil faut plaindre. Échappée aux angoisses de cette vie terrestre, ton âme immortelle et pure habite en pais dans le sein de Dieu, et ton nom vivra autant que la science.

Adieu, Sturm, adieu.

Prix proposés
par
l'Académie des Sciences*).

L'Académie a proposé, sur des questions mathématiques, plusieurs grands prix dont nous croyons devoir donner ici les programmes. La solution des questions auxquelles ils se rapportent serait sans aucun doute d'un três-haut intérêt pour les géomètres. Tous ces prix consistent en une médaille d'or de la valeur de 3000 francs; les noms des concurrents doivent être renfermés dans un billet cacheté qu'on n'ouvrira que si la pièce est couronnée. Le terme de rigueur pour le dépôt des Mémoires (qui doivent être adressés francs de port au Secrétariat de l'Académie) est seul différent. Voici les programmes de ces prix au nombre de six.

I.

THÉORIE DES PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES.

«Reprendre l'examen comparatif des théories relatives aux phénomè-
»nes capillaires; discuter les principes mathématiques et physiques sur les-
»quels on les a fondées; signaler les modifications qu'ils peuvent exiger

---

*) *Voyez*, pour plus de détails, les *Comptes rendus*, tome XLII, séance du 28 janvier 1856.

»pour s'adapter aux circonstances réelles dans lesquelles ces phénomènes »s'accomplissent, et comparer les résultats du calcul à des expériences pré»cises faites entre toutes les limites d'espace mesurables, dans des condi»tions telles, que les effets obtenus par chacune d'elles soient constants.»

Terme de rigueur: le 1er avril 1856.

II.

THÉORÈME DE FERMAT.

«Trouver, pour un exposant entier quelconque n, les solutions en nom»bres entiers et inégaux de l'équation

$$x^n + y^n = z^n,$$

»ou prouver qu'elle n'en a pas, quand n est >2.»

Terme de rigueur: le 1er avril 1856.

III.

THÉORIE DES MARÉES.

«Perfectionner dans quelque point essentiel la théorie mathématique des Marées.

Terme de rigueur: le 1er mai 1856.

IV.

MOUVEMENTS GÉNÉRAUX DE L'ATMOSPHÈRE.

«Établir les équations des mouvements généraux de l'atmosphère ter»restre en ayant égard à la rotation de la terre, à l'action calorifique du »soleil, et aux forces attractives du soleil et de la lune.»

Les auteurs sont invités à faire voir la concordance de leur théorie avec quelques-uns des mouvements atmosphériques les mieux constatés.

Lors même que la question n'aurait pas été entièrement résolue, si l'auteur d'un Mémoire avait fait quelque pas important vers la solution, l'Académie pourrait lui accorder le prix.

Terme de rigueur: le 1er janvier 1857.

V.

ÉQUILIBRE INTÉRIEUR DES CORPS ÉLASTIQUES.

«Trouver les intégrales des équations de l'équilibre intérieur d'un corps »solide élastique et homogène, dont toutes les dimensions sont finies, par »exemple, d'un parallélipipède ou d'un cylindre droit; en supposant con»nues les pressions ou tractions inégales exercées aux différents points de »sa surface.»

Terme de rigueur: le 1er avril 1857.

VI.

MOUVEMENT DE LA CHALEUR DANS UN ELLIPSOIDE.

«Trouver l'intégrale de l'équation connue du mouvement de la chaleur, »pour le cas d'un ellipsoïde homogène, dont la surface a un pouvoir rayon»nant constant, et qui, après avoir été primitivement échauffée d'une ma»nière quelconque, se refroidit dans un milieu d'une température donnée.»

Terme de rigueur: le 1er octobre 1857.

Nous ajouterons encore le programme du prix *Bordin*. Quoique la question proposée se rattache surtout à la physique expérimentale proprement dite, elle n'est pourtant pas sans quelque liaison avec les questions mathématiques qui précèdent, par exemple avec celle des mouvements généraux de l'atmosphère.

PRIX BORDIN.

Feu M. Bordin, ancien notaire, ayant légué à l'Académie une rente de *trois mille francs* pour la fondation d'un prix annuel «à la meilleure composition sur des sujets ayant pour but: l'intérêt public, le bien de l'humanité, les progrès de la science et l'honneur national.»

L'Académie a décidé que ce prix serait décerné alternativement dans les Sections des Sciences mathématiques et dans celles des Sciences physiques.

Elle propose en conséquence, pour l'année 1856, la question suivante pour sujet de prix dans les Sections des Sciences mathématiques:

«Un thermomètre à mercure étant isolé dans une masse d'air atmosphé-»rique, limitée ou illimitée, agitée ou tranquille, dans des circonstances »telles, qu'il accuse actuellement une température fixe, on demande de dé-»terminer les corrections qu'il faut appliquer à ses indications apparentes, »dans les conditions d'exposition où il se trouve, pour en conclure la tem-»pérature propre des particules gazeuses dont il est environné.»

Ce prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*.

Les Mémoires devront être déposés, francs de port, au Secrétariat de l'Institut avant le 1er octobre 1856, terme de rigueur.

XV. Zur Theorie der Gammafunktion.

Nach einem von Gauss in den Comment. Gotting. rec. T. II. (1812) bewiesenen Satze kann die Funktion

$$\Gamma(\mu) = \int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{\mu-1} dz = \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-t}\, dt$$

als der Grenzwerth angesehen werden, welchem sich das Produkt

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)}\, n^\mu$$

bei unendlich wachsenden n nähert; noch etwas genauer lässt sich die Sache dadurch ausdrücken, dass man den Werth von $\Gamma(\mu)$ zwischen zwei derartige Produkte bringt, welche für unendlich werdende n gegen eine und dieselbe Grenze convergiren. Hierzu dient folgende Betrachtung.

Wendet man den bekannten Satz

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\vartheta h), \quad 1 > \vartheta > 0$$

auf $f(x) = a^x$ an, so ergiebt sich

$$a^h - 1 = h a^{\vartheta h} l a$$

und für $a = \frac{1}{z}$, $h = \frac{1}{n}$

$$l\left(\frac{1}{z}\right) = n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right) z^{-\frac{\vartheta}{n}};$$

demgemäss ist

$$\Gamma(\mu) = n^{\mu-1} \int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{\mu-1} z^{-\frac{\vartheta(\mu-1)}{n}}\, dz$$

und daraus wird mittelst der Substitution $z = y^n$

$$\Gamma(\mu) = n^\mu \int_0^1 (1-y)^{\mu-1} y^{n-1+\vartheta(1-\mu)} dy.$$

Setzen wir μ als positiv voraus und nennen k die nächst grössere ganze positive Zahl, so haben wir die Ungleichungen

$$0 < \mu < k,$$
$$1 > 1-\mu > 1-k,$$
$$\vartheta > \vartheta(1-\mu) > \vartheta(1-k),$$

deren letzte stärker wird, wenn wir linker Hand statt ϑ die grössere Einheit nehmen und rechter Hand die, wegen $\vartheta(k-1) < k-1$ geltende, Ungleichung $\vartheta(1-k) > 1-k$ benutzen. So ist nun

$$1 > \vartheta(1-\mu) > 1-k,$$
$$n > n-1+\vartheta(1-\mu) > n-k,$$

und weil y die Grenzen 0 und 1 nicht überschreitet,

$$y^n < y^{n-1+\vartheta(1-\mu)} < y^{n-k}.$$

Demgemäss haben wir

$$n^\mu \int_0^1 (1-y)^{\mu-1} y^n dy < \Gamma(\mu) < n^\mu \int_0^1 (1-y)^{\mu-1} y^{n-k} dy$$

und durch Ausführung der angedeuteten Integrationen, wenn n als ganze positive Zahl $> k$ vorausgesetzt wird,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1.2.3\ldots n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)} n^\mu < \Gamma(\mu), \\ \Gamma(\mu) < \dfrac{1.2.3\ldots(n-k)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-k)} n^\mu \end{array}\right\} n > k > \mu > 0.$$

Hieraus folgt der Gauss'sche Satz, wenn man die beliebige Zahl n in's Unendliche wachsen lässt und berücksichtigt, dass das erste Produkt nur die k Faktoren

$$\frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}{(\mu+n-k+1)(\mu+n-k+2)\ldots(\mu+n)}$$

mehr enthält als das zweite und dass diese in ihrer Gesammtheit für $n = \infty$ den Werth 1 geben. Bezeichnet man

$$\frac{1.2.3\ldots n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)}$$

mit P_n und setzt im zweiten Theile der obigen Formel $n+k$ für n, so hat man auch

$$n^\mu P_n < \Gamma(\mu) < (n+k)^\mu P_n$$

und umgekehrt

$$\frac{\Gamma(\mu)}{(n+k)^\mu} < P_n < \frac{\Gamma(\mu)}{n^\mu}.$$

Am einfachsten gestalten sich diese Verhältnisse, wenn μ ein positiver ächter Bruch, mithin $k=1$ ist.

XVI. Geometrische Aufgabe.

In der Dresdener mathematischen Gesellschaft stellte Herr Dr. Baltzer die Aufgabe:

Durch ein gegebenes Dreieck ABC eine Transversale, welche AC in G und BC in H schneidet, so zu legen, dass die Strecken AG, BH und GH gleich werden;

mit der allgemeineren Forderung, dass jene Strecken sich wie drei gegebene Zahlen verhalten sollen, löste der Verfasser die Aufgabe folgendermaassen.

Zur Abkürzung sei $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $BH = x$, $AG = y$, $GH = z$ und $x:y:z = \alpha:\beta:\gamma$; man bilde unter der jederzeit zulässigen Voraussetzung $a < b$ aus den Seiten AG und GH das Parallelogramm $AGHF$ und ziehe die Gerade BF, welche AC in D schneiden möge. Aus ähnlichen Dreiecken hat man jetzt

$$\frac{HF}{HB} = \frac{CD}{CB} \text{ mithin } CD = \frac{HF}{HB} \cdot CB = \frac{y}{x} a,$$

d. i. der gestellten Forderung gemäss,

$$1) \qquad CD = \frac{\beta}{\alpha} a.$$

Ferner geben die nämlichen Dreiecke

$$\frac{HF}{FB} = \frac{CD}{DB} \text{ oder } \frac{y}{FB} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{a}{DB},$$

und wenn y mittelst der Proportion $y:z = \beta:\gamma$ durch z ausgedrückt wird,

$$\frac{z}{FB} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{a}{DB}.$$

Legt man ferner durch D parallel zu GH eine Gerade, welche die verlängerte BA in E schneidet, so ist

$$\frac{FA}{FB} = \frac{DE}{DB} \text{ oder } \frac{z}{FB} = \frac{DE}{DB}$$

und der Vergleich mit dem Vorigen giebt

$$2) \qquad DE = \frac{\gamma}{\alpha} a.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt augenblicklich die Construktion; man bestimmt nämlich auf CA den Abschnitt CD nach Nr. 1) und beschreibt aus dem Mittelpunkte D mit dem Halbmesser $\frac{\gamma}{\alpha} a$ einen Kreis, welcher BA im Punkte E schneidet; der Durchschnitt der Geraden BD und $AF // DE$ giebt den Punkt F, worauf noch $FH // AC$ und $HG // DE$ zu ziehen sind. Da der Hilfskreis im Allgemeinen die verlängerte BA zweimal schneidet, so existiren zwei der Aufgabe genügende Transversalen, von denen die eine CA und CB, die andere die Verlängerungen dieser Seiten schneidet. — Für $\alpha = \beta = \gamma$ wird sehr einfach $CD = DE = CB$; für $\alpha = \frac{1}{a}$, $\beta = \frac{1}{b}$, $\gamma = \frac{1}{c}$ erhält man $ax = by = cz$, $CD = \frac{a^2}{b}$ und $DE = \frac{a^2}{c}$.

Die obige Aufgabe ist sehr wohl geeignet, den vortheilhaften Gebrauch von Hilfslinien zu zeigen; ohne diese, z. B. analytisch behandelt, führt sie auf ziemlich verwickelte Betrachtungen.

XVII. Einige trigonometrische Formeln.

In dem reichhaltigen Apparate von Formeln, womit die ausführlicheren Lehrbücher der Trigonometrie versehen sind, dürften wohl auch folgende Gleichungen Platz finden, auf die mich Herr Dr. Baltzer hier aufmerksam gemacht hat:

$$\sin^2(\varphi+\psi) = \sin^2\varphi + \sin^2\psi + 2\sin\varphi\sin\psi\cos(\varphi+\psi),$$
$$\sin^2(\varphi-\psi) = \sin^2\varphi + \sin^2\psi - 2\sin\varphi\sin\psi\cos(\varphi-\psi),$$
$$\cos^2(\varphi+\psi) = \cos^2\varphi + \sin^2\psi - 2\cos\varphi\sin\psi\sin(\varphi+\psi),$$
$$\cos^2(\varphi-\psi) = \cos^2\varphi + \sin^2\psi + 2\cos\varphi\sin\psi\sin(\varphi-\psi).$$

Da die Beweise für dieselben sich unmittelbar von selbst darbieten, so übergehe ich sie und erwähne nur den vortheilhaften Gebrauch, der sich von den obigen Formeln machen lässt. Nicht selten hat man es nämlich mit drei Gleichungen zu thun, deren erste auf $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ reducirt werden kann, deren zweite entweder $\sin\psi$ oder $\cos\psi$ giebt und deren dritte entweder $\varphi+\psi$ oder $\varphi-\psi$ kennen lehrt; in allen diesen Fällen dient eine der obigen Gleichungen zur Aufstellung einer vierten Beziehung, worin die Winkel φ und ψ nicht mehr vorkommen. Mit anderen Worten, die genannten Formeln geben unter jenen Voraussetzungen eine rasche Elimination. — Wendet man z. B. die erste Formel auf das geradlinige Dreieck für $\varphi = A$, $\psi = B$

$$\sin A = \frac{a}{c}\sin C, \qquad \sin B = \frac{b}{c}\sin C, \qquad A + B = 180^0 - C$$

an, so erhält man augenblicklich

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

In dem Pothenot'schen Probleme kennt man die gegenseitige Lage dreier Punkte A, B, C, mithin $BC = a$, $CA = b$, $\angle ACB = \gamma$ und ausserdem die an einem vierten Punkte D gemessenen Winkel $BDC = \alpha$ und $ADC = \beta$; will man nun sogleich die Diagonale $CD = z$ berechnen, so setze man $\angle CBD = \varphi$, $\angle CAD = \psi$ und beachte die Gleichungen

$$\sin\varphi = \frac{z}{a}\sin\alpha, \qquad \sin\psi = \frac{z}{b}\sin\beta, \qquad \varphi + \psi = 360^0 - (\alpha+\beta+\gamma).$$

Die erste trigonometrische Formel giebt dann sofort die rein quadratische Gleichung

$$\sin^2(\alpha+\beta+\gamma) = \left[\frac{\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} + 2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{ab}\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right]z^2$$

zur Berechnung von z.

Hat man eine Standlinie $AB = c$ und an den ausserhalb derselben liegenden Punkten C und D die Winkel $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$, $CDA = \gamma$, $ADB = \delta$ gemessen und will die Entfernung der Punkte CD direct berechnen, so setze man $CD = z$, $\angle ABC = \varphi$, $\angle BAD = \psi$; es ist dann

$$\sin\varphi = \frac{AC}{c}\sin\alpha, \qquad AC = z\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},$$

mithin

$$\sin\varphi = \frac{z}{c}\,\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{z}{c}m,$$

und auf ähnliche Weise

$$\sin\psi = \frac{z}{c}\,\frac{\sin\beta\sin\delta}{\sin(\beta+\gamma+\delta)} = \frac{z}{c}n,$$

endlich

$$\varphi + \psi = \beta + \gamma.$$

Durch Anwendung der ersten unserer trigonometrischen Formeln findet sich nun für z die rein quadratische Gleichung

$$\sin^2(\beta+\gamma)=\frac{m^2+n^2+2mn\cos(\beta+\gamma)}{c^2}z^2,$$

worin m und n zur Abkürzung benutzt worden sind.

XVIII. Ein Paar Sätze vom Dreieck und Viereck.

1. Durch ein beliebiges Dreieck ABC sei eine Transversale gelegt, welche AB in C_1, AC in B_1 und BC in A_1 schneidet; die Mittelpunkte der Strecken B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 mögen der Reihe nach A_0, B_0, C_0 heissen. Die Geraden AA_0, BB_0, CC_0 schneiden die Dreiecksseiten BC, CA, AB in drei in gerader Linie liegenden Punkten.

2. Durch ein beliebiges Viereck $ABCD$, dessen Gegenseiten AB und CD sich in E, dessen andere zwei Gegenseiten BC und DA sich in F, und dessen Diagonalen sich in G schneiden, sei eine Transversale gelegt, welche AB und CD in U_1 und U_2, BC und DA in V_1 und V_2, AC und BD in W_1 und W_2 trifft; die Mittelpunkte der Strecken U_1U_2, V_1V_2, W_1W_2 mögen der Reihe nach U, V, W heissen. Die Geraden EU, FV, GW gehen durch einen und denselben Punkt.

Der erste dieser Sätze ist das nach dem Reciprocitätsgesetze gebildete Correlat des Satzes vom Schwerpunkte des Dreiecks; das zweite Theorem entspricht dem Gauss'schen Satze, die Mittelpunkte der Diagonalen eines Vierecks betreffend. Es wäre wünschenswerth, von den obigen Sätzen ebenso einfache geometrische Beweise zu haben, wie sie für die entsprechenden Theoreme längst bekannt sind. SCHLÖMILCH.

XIX. Ueber das Aluminium theilen Prof. Dr. Heeren und Dir. Karmarsch in Hannover folgende bemerkenswerthe Thatsachen mit.

Auf der Pariser Industrieausstellung waren einige Dutzend Aluminiumbarren von etwa 1 Fuss Länge, 1 Zoll Breite und ½ Zoll Dicke, sowie ein aus diesem Metall gefertigter kleiner Becher nebst einigen Löffeln ausgelegt. Der Verkauf des Metalles ist der Handlung von *Rousseau frères*, *Rue de l'école de médicine*, übertragen, doch erst nach wochenlangem Harren war die bestellte Probe zu dem Preise von 3 Francs für das Gramm (11⅝ Thlr. das Hannover'sche Loth) zu erlangen. Die chemische Analyse derselben wies den nicht unbedeutenden Eisengehalt von 4,6 Procent nach (die Fabrikation im Grossen geschieht nämlich in eisernen Retorten) und es können daher die im Folgenden aufgeführten Eigenschaften nur für das unreine Pariser Aluminium gelten.

1. Physische Eigenschaften und Verhalten bei mechanischer Bearbeitung.

Eine reine blanke Fläche des Aluminiums erscheint grauweis von einer Nuance, welche zwischen der Farbe des Zinns und jener des Zinks liegt.

Die Bruchflächen zeigen eine körnige Textur und zwar um so feiner, je mehr das Metall einer mechanischen Bearbeitung unterworfen war (siehe weiter unten).

Das specifische Gewicht ist bei Gussstücken 2,7302 bis 2,7636, bei gewalztem Blech 2,7698 bis 2,7979. Dieser grossen Leichtigkeit zufolge glaubt man eher ein unecht versilbertes Stück Holz als ein Metallstück in der Hand zu haben; gleichwohl besitzt das Metall eine so bedeutende Festigkeit, dass jedenfalls eine ungewöhnliche Körperkraft dazu gehören würde, eine Barre von den obenerwähnten Dimensionen zu biegen oder abzubrechen.

Ein gegossenes Aluminiumstäbchen, an einem Faden freischwebend, mit einem harten Körper angeschlagen, giebt einen starken und schönen Klang.

Im rohen Gussstück ist das Aluminium härter als Zinn, aber weicher als Zink und Kupfer, etwa von gleicher Härte mit feinem Silber, vorausgesetzt, dass letzteres ebenfalls roher Guss ist; denn Blech und Draht von Feinsilber ritzen den Aluminium-Gussstab, sind also härter.

Das gegossene Stäbchen mit der Säge querüber nur ganz seicht eingeschnitten liess sich an dieser Stelle leicht abschlagen und brach mit unebener, zackig feinkörniger Fläche, auf welcher einzelne Pünktchen schimmerten, die aber im Ganzen ohne Glanz war. War kein vorläufiger Einschnitt gemacht, so bog sich das Stäbchen unter den Hammerschlägen und brach nur widerwillig ab.

Das Aluminium ist sehr leicht zu feilen, setzt sich aber im Feilhiebe fest und verstopft denselben wie Blei oder Zinn. Unter dem Hammer zeigte sich das Gussstäbchen geschmeidig, bekam aber bei etwas starkem Ausbreiten viele und beträchtliche Kantenrisse. Zwischen Walzen gestreckt nahm der Gussstab schon nach den ersten Durchgängen Kantenrisse an, welche sich fort und fort vermehrten und ausbreiteten. Das gewalzte Metall ist leicht zu zerbrechen und zeigt eine matte Bruchfläche von höchst feinem Korn, etwa wie gehärteter Gussstahl (nur von hellerer Farbe als dieser); dabei zeigt es einen bedeutenden Grad von Steifheit, jedoch ohne auffallende Federkraft. Blech, zu Papierdicke gestreckt, verträgt ziemlich das wiederholte Hin- und Herbiegen, bevor es bricht. Beim Auswalzen war das Metall über der Spirituslampe angewärmt, etwa bis zu der Temperatur, welche bei Zink angewendet wird und dort ein so vortreffliches Mittel zur Erhöhung der Geschmeidigkeit ist, doch konnte hier kein Nutzen dieser Operation bemerkt werden.

Das Aluminium zu Draht zu ziehen, wollte nicht gelingen. Bei dem Versuche, von einem gewalzten Stücke, dessen Dicke $^{1}/_{16}$ Zoll betrug, mit der Scheere Streifchen zu schneiden, zerbrachen diese während des Schneidens schon in Trümmer. Als hierauf Streifchen von viel dünnerem Bleche geschnitten und in die Löcher des Zieheisens gebracht wurden, war es unmöglich, dieselben zu ziehen, denn stets riss die vielmals erneuerte Spitze ab, sobald nur die geringste Zugkraft auf die Zange wirkte.

Die bei den letzteren Operationen beobachtete geringe Geschmeidigkeit legt Dir. Karmarsch dem Eisengehalte des Aluminiums zur Last und ist daher geneigt zu glauben, dass zur Anfertigung der in Paris ausgelegten Becher, Löffel etc. ein reineres Metall genommen worden sei.

2. Chemische Eigenschaften.

Das Aluminium hält sich an der Luft sehr gut und erträgt selbst Glühhitze, ohne sich beträchtlich zu oxydiren; nur bildet sich dabei auf der Oberfläche ein Häutchen von Oxyd (Thonerde), wodurch die Theile des Metalls dergestalt eingehüllt werden, dass ein Zusammenfliessen zu einem

glänzenden Metallkügelchen nicht erfolgt. Man ist daher beim Schmelzen und Giessen genöthigt, ein Flussmittel anzuwenden, wozu sich nach Rose's Empfehlung sehr gut Chlorkalium eignet. Noch besser, obwohl mühsam zu bereiten, ist das von Deville angewandte Chloraluminiumnatrium. Borax oder Salpeter können hierzu nicht in Anwendung kommen, weil sie das Metall stark angreifen.

Der Schmelzpunkt liegt bei geringer Glühhitze weit unter dem des Messings. Wenn der Schmelzpunkt des Zinks bei 432° *C* und jener des Messings zu 900° *C* angenommen wird, so schätzt Prof. Heeren den des Pariser Aluminiums zu etwa 700° *C*; eine genauere Bestimmung des Schmelzpunktes schien wegen der mangelnden chemischen Reinheit nicht wichtig.

Besonders merkwürdig ist das Verhalten gegen die verschiedenen Auflösungsmittel.

a) Salzsäure wirkt ausserordentlich heftig ein und löst das Metall unter stürmischer Entwickelung von Wasserstoffgas zu einer farblosen, bei längerem Kochen an der Luft in Folge des Eisengehaltes sich gelb färbenden Flüssigkeit auf.

b) Verdünnte Schwefelsäure verhält sich der Salzsäure ähnlich, wirkt aber bedeutend langsamer.

c) Concentrirte Schwefelsäure scheint in der Kälte gar nicht zu wirken, löst aber erhitzt das Metall langsam unter Entwickelung schwefeliger Säure auf.

d) Concentrirte Salpetersäure, sowohl kalt wie warm, wirkt nicht im Geringsten.

e) Verdünnte Salpetersäure übt in der Kälte und selbst beim Erwärmen so geringe Wirkung, dass es zweifelhaft wird, ob die ab und zu sich entwickelnden Gasbläschen wirklich einer stattfindenden Auflösung oder Oxydation des Metalls zuzuschreiben sind.

f) Essigsäure wirkt in der Kälte sehr wenig aber doch bemerklich, in der Wärme schneller, wobei sich Wasserstoffgas entwickelt.

g) Aetzende Kalilauge bewirkt schon in der Kälte die Auflösung des Aluminiums mit derselben Heftigkeit stürmischer Wasserstoffgasentwickelung wie Salzsäure, wobei sich das Eisen in Gestalt eines grauschwarzen, am Sonnenlichte glänzende Flitterchen zeigenden Pulvers abscheidet.

Nach diesem Verhalten gegen die verschiedenen Auflösungsmittel gehört das Aluminium, wie das Zink, zu den elektropositiven Metallen; es steht in der Reihe derselben dem Zink mindestens gleich, wenn es ihm nicht noch vorgehen sollte, wie seine Leichtlöslichkeit in Aetzlauge beweist, welche selbst in der Wärme auf Zink kaum merklich einwirkt, während sich Zinkoxyd ebenso wie Thonerde mit grosser Leichtigkeit in Kali löst. Nur die auffallende Indifferenz gegen Salpetersäure könnte auf den ersten Blick befremden, da Zink von dieser mächtigen Säure mit fast explosionsartiger Heftigkeit oxydirt und gelöst wird. Seitdem man aber auch beim Eisen, einem unstreitig elektropositiven Metalle, die Beobachtung gemacht hat, dass es in Berührung mit concentrirter Salpetersäure in einen elektronegativen oder passiven Zustand geräth, ist diese Erscheinung beim Aluminium nicht mehr auffallend, wenn man sich vorstellt, dass letzteres bei Berührung mit Salpetersäure dem passiven Zustande mehr als das Eisen und zwar in solchem Grade anheimfällt, dass es diesen schon durch verdünnte Säure annimmt.

Es wäre nun interessant gewesen, diesen Verhältnissen weiter nachzugehen, da sich gerade das Aluminium zu einer solchen Untersuchung eignet, aber hier liess die Unreinheit des Metalls keine entscheidenden Resultate hoffen. Aus demselben Grunde wurde die Absicht, alles disponibele Metall zu Legirungen zu benutzen, aufgegeben. Zu erwähnen ist nur, dass sich das Aluminium mit Quecksilber, selbst wenn es auf kochendem Quecksilber schwimmt, nicht vereinigt, dass es dagegen mit Zinn zu einer ziemlich harten aber doch streckbaren Legirung zusammenschmilzt. Nach Deville kann es mit Blei nicht vereinigt werden, verhält sich also in dieser Beziehung wie Eisen.

Nach seinen bis jetzt bekannten Eigenschaften gewährt das Aluminium keine grosse Nutzbarkeit, da es schon wegen seiner unansehnlichen Farbe und noch mehr wegen seiner Leichtlöslichkeit in den meisten Säuren und Alkalien auf die Anwartschaft als Stellvertreter des Silbers verzichten muss. Wollte z. B. der Zufall, dass ein Seifensieder seine Aluminium-Uhr auf eine mit Lauge verunreinigte Stelle legte, so würde er sie durchlöchert wieder aufnehmen.

Sollte es gelingen, dieses Metall auf leichte, wenig kostspielige Art im Grossen zu produciren, so könnte es in vielen Fällen ein Ersatzmittel für Eisen und Zink abgeben. Die einzigen zur Zeit bekannten Anwendungen des Aluminiums sind: 1) bei sehr feinen Waagen zu den kleineren Gewichtstücken, welche in Folge der Leichtigkeit des Metalls viel grösser ausfallen, daher weniger leicht verloren gehen und auch leichter zu justiren sind als die aus Messing, Argentan oder Platin gefertigten; 2) zu galvanischen Apparaten, in welchen es statt des kostbaren Platins und der in vieler Hinsicht unbequemen Kohle grosse Vortheile verspricht. Für diese letztere Anwendung wäre auch in dem Falle eines nicht sehr niedrigen Preises auf eine allgemeinere Verbreitung des Aluminiums zu rechnen.

(Mittheil. des Hannöv. Gewerbevereins. 1855. Nr. 6.)

XX. Eine leichte Methode, arsenhaltige Schwefelsäure vom Arsenik zu befreien, von Buchner. Die im Handel vorkommende Schwefelsäure ist zuweilen in einem unverhältnissmässigen Grade mit fremdartigen Stoffen verunreinigt, von denen manche die Säure selbst zur gewöhnlichsten Verwendung ganz unbrauchbar machen. Sehr störend ist der oft bedeutende Gehalt derselben an arseniger Säure. Auf die Thatsache, dass sich letztere durch Einwirkung der Salzsäure leicht in das viel flüchtigere Arsenchlorid verwandeln und dieses bei einer weit unter dem Siedepunkt (325°) der Schwefelsäure liegenden Temperatur (unter 132°) überdestilliren lässt, gründet sich die von Buchner angegebene (übrigens schon früher von Otto — s. dessen Lehrbuch d. Chem. 1. Aufl. B. II. S. 450 — angedeutete) Methode. Nach derselben versetzt man die arsenhaltige Schwefelsäure mit ein wenig Salzsäure und erwärmt dieselbe, oder noch besser, man leitet durch die erhitzte Schwefelsäure einen mässigen Strom von salzsaurem Gas. Dadurch wird alles Arsenik schnell als Chlorarsen aus der Schwefelsäure entfernt. Um jede Spur von Arsen zu vertreiben, braucht man nur nach dem Hindurchleiten des salzsauren Gases das Erhitzen noch ein wenig fortzusetzen. Fast zum Ueberfluss sei noch bemerkt, dass Chlorarsen sehr giftig wirkt. Durch dieses Verfahren wird zugleich die in der rohen Schwefelsäure ge-

wöhnlich noch vorkommende salpetrige Säure als Chlor-Stickoxyd mit verflüchtigt. (Annal. d. Chem. u. Pharm. v. Wöhler. Bd. 94. S. 241.)

XXI. Die Gasverdichtungsversuche, welche Natterer schon früher angestellt und (Sitzungsber. d. kaiserl. Akademie der Wissensch., mathem.-naturw. Classe. Bd. V. S. 351, 1850 und Bd. VI. S. 557, 1851; vergl. Poggend. Annal. Bd. 62. S. 132) bekannt gemacht hat, scheinen den Beweis zu liefern, dass es unmöglich ist, die sogenannten permanenten Gase durch blose Anwendung des mechanischen Druckes in den tropfbarflüssigen und festen Aggregatzustand zu versetzen. Dieselben Versuche haben unzweifelhaft dargethan, dass das Mariotte'sche Gesetz für hohe Drucke nicht mehr giltig ist, sondern dass die Gase sich bei gesteigertem Drucke in einem immer geringeren Verhältnisse verdichten lassen, und dass auch bei gleichem Drucke die Dichte verschiedener Gase verschieden ist. Bezüglich der letzteren Punkte hat der genannte Experimentator unter Darlegung sowohl hohen persönlichen Muthes als besonderer praktischer mechanischer Einsicht wiederholte Untersuchungen angestellt (Sitzungsber. d. kaiserl. Akad. Bd. XII. S. 199, 1854; vergl. Poggend. Annal. Bd. 94. S. 436) mit einem für die Natur der Sache hinlänglichen Grade wissenschaftlicher Schärfe und Genauigkeit. Der Druck des comprimirten Gases im Recipienten wurde in ähnlicher Weise ermittelt, wie der Druck des Dampfes in einem Kessel durch ein gewöhnliches Sicherheitsventil gemessen werden kann. Zu dem Ende war am Recipienten eine genau cylindrische Bohrung von 1,445 Wiener Linien Durchmesser angebracht, in welcher sich ein gut eingeschliffener Stahlcylinder hin- und herbewegen konnte und durch welchen die Oeffnung verschlossen wurde. Zum bessern Verschluss war an dem untern Ende des Cylinders eine mit Fett getränkte Lederkappe befestigt. Das obere stumpf zugespitzte Ende des Cylinders ragte etwas aus der Bohrung heraus und wirkte auf das System zweier in einander greifender einarmiger Hebel dergestalt, dass, wenn der Cylinder durch den Druck des Gases gehoben wurde, derselbe gegen den kürzern einen Zoll langen Arm des ersten Hebels drückte und dadurch den längern 11 Zoll langen Arm gegen den kurzen, ebenfalls 1 Zoll langen Arm des zweiten Hebels trieb, dessen längerer Arm 16 Zoll lang mit einer Waagschale zur Aufnahme von Gewichten versehen war. Somit hielt ein in die Waagschale gelegtes Gewicht einem 176 Mal so grossen Drucke, der auf das untere Ende des Cylinders wirkte, das Gleichgewicht. Die Hebel nebst der Waagschale waren durch Gegengewichte gehörig balancirt, so dass deren Gewicht ausser Acht gelassen werden konnte. Da der Durchmesser des Cylinders 1,445 Wien. Linien, die Grundfläche desselben, auf welche das Gas drückte, 1,6412 Quadratlinien enthielt, so übte eine Atmosphäre einen Druck von 81,377 Grammen auf den Cylinder und es entsprach demnach einem Atmosphärendrucke das Gewicht von $\frac{81,377}{176} = 0,462$ Grammen in der Waagschale. Mit Berücksichtigung der Reibung des Stahlcylinders bei seiner Bewegung, zu welcher eine direkte Belastung von gegen 800 Grammen oder ein Druck von 10 Atmosphären erforderlich war, konnte durch diese Vorrichtung der Druck des Gases im Recipienten für jeden Moment hinlänglich genau bestimmt werden. Das im Recipienten befindliche Gas wurde seinem Volumen nach dadurch gemessen, dass es durch eine mittelst eines Schrau-

benhahns verschliessbare Ausströmungsöffnung und sodann durch einen Kautschukschlauch in eine Glasglocke geleitet wurde, welche in einer pneumatischen Wanne durch Rollen und Gegengewichte dergestalt aufgehangen war, dass sie sich in dem Maasse hob, als Gas in sie einströmte, also stets das Gas in einer dem Drucke der Atmosphäre entsprechenden Dichte enthielt. Die Glasglocke war in 80 gleiche Raumtheile getheilt, deren jeder dem Rauminhalte des Recipienten — 60 Kubikcentimeter — gleich war. Indem das im Recipienten comprimirte Gas langsam und successiv (wofür der Schraubenhahn entsprechende Einrichtung hatte) in die Glasglocke geleitet wurde, konnte das Volumen desselben bestimmt werden.

Sauerstoff liess sich nur bis zu einem Drucke von 1350 Atmosphären verdichten, weil, wie schon frühere Versuche gezeigt hatten, das Oel, womit das Ventil-Leder getränkt war, sich bei höherem Drucke entzündete, wodurch ein Entzünden des Stahls und eine Zerstörung des Recipienten leicht möglich geworden wäre. Die übrigen Gase wurden im Recipienten soweit verdichtet, bis ein Gewicht von 1290 Grammen in der Waagschale grade noch gehoben wurde, was einem Drucke im Recipienten von gegen 2790 Atmosphären entsprach. Durch wiederholtes Herauslassen einer gewissen Quantität Gas in die Glasglocke wurde nun dieser Druck nach und nach vermindert und es zeigte sich dabei eine bedeutende, für verschiedene Gase übrigens verschiedene Abweichung vom Mariotte'schen Gesetze. Wäre nämlich dasselbe bei so hohem Drucke noch giltig, so hätte, wenn 10 Raumtheile Gas aus dem Recipienten gelassen wurden, auch der Druck in demselben um 10 Atmosphären abnehmen müssen. Allein der Druck nahm bei gleicher Verminderung der Dichte in einem für die einzelnen Gase verschiedenen und um so stärkern Verhältnisse ab, je grösser derselbe oder die Dichte des Gases gewesen war. So sank der Druck von 2970 Atmosphären, wenn 10 Raumtheile Gas entwichen, nicht um 10 Atmosphären, sondern bei Wasserstoffgas um 101, bei Stickstoffgas um 136, bei atmosphärischer Luft um 131 und bei Kohlenoxydgas um 163 Atmosphären. Erst unter einem Drucke von 78 Atmosphären zeigte sich für Wasserstoffgas, unter 177 Atmosphären für Sauerstoffgas, unter 85 Atmosphären für Stickstoffgas, unter 96 für atmosphärische Luft, unter 127 Atmosphären für Kohlenoxydgas das Mariotte'sche Gesetz giltig. Desgleichen entsprach einem und demselben Drucke von 2790 Atmosphären nicht dieselbe Menge von Raumtheilen oder dieselbe Dichte der verschiedenen Gase. Bei 2790 Atmosphären Druck waren vom Wasserstoffgase 1008, vom Stickstoffgase 705, von atmosphärischer Luft 726, vom Kohlenoxydgase 727 Raumtheile im Recipienten comprimirt. Es stellte sich somit Wasserstoffgas als am meisten, Stickstoffgas als am wenigsten zusammendrückbar heraus. Die jedesmalige Menge des comprimirten Gases wurde durch successives Entleeren des Recipienten um je 10 Raumtheile, bis derselbe vollständig entleert war, bestimmt. Gleichzeitig wurde der Druck der noch im Recipienten befindlichen Gasmenge auf die oben angegebene Weise ermittelt. Die nachfolgende kleine Tabelle, welche einer vollständigeren, aus mehrern Versuchsreihen von Natterer zusammengestellten entnommen ist, zeigt für einzelne Druckhöhen das Verhältniss des Drucks zum Volumen oder der Dichte des Gases und die Abnahme des erstern, wenn das Volumen um je 10 Raumtheile vermindert wird.

Wasserstoffgas.			Stickstoffgas.			Sauerstoffgas.			Atmosph. Luft.			Kohlenoxydgas.		
Volumina oder Dichte.	Druck in Atmosphären.	Druck-Abnahme auf je 10 Volum.	Volumina oder Dichte.	Druck in Atmosphären.	Druck-Abnahme auf je 10 Volum.	Volumina oder Dichte.	Druck in Atmosphären.	Druck-Abnahme auf je 10 Volum.	Volumina oder Dichte.	Druck in Atmosphären.	Druck-Abnahme auf je 10 Volum.	Volumina oder Dichte.	Druck in Atmosphären.	Druck-Abnahme auf je 10 Volum.
1008	2790	.	705	2790	.	657	1354	.	726	2790	.	727	2790	.
998	2689	101	695	2654	136	647	1284	70	716	2659	131	717	2627	163
988	2594	95	685	2522	132	637	1218	66	706	2531	128	707	2477	150
978	2505	89	675	2394	128	627	1160	58	696	2405	126	697	2339	138
968	2423	82	665	2272	122	617	1106	54	686	2283	122	687	2209	130
958	2347	76	655	2156	116	607	1056	50	676	2165	118	677	2088	121
508	706	(22)	455	729	(35)	507	670	(30)	576	1273	(67)	577	1196	(68)
498	685	21	445	695	34	497	641	29	566	1212	61	567	1133	63
488	665	20	435	662	33	487	614	27	556	1156	56	557	1073	60
478	646	19	425	630	32	477	588	26	546	1101	55	547	1016	57
468	627	19	415	600	30	467	563	25	536	1047	54	537	962	54
458	608	19	405	570	30	457	539	24	526	993	54	527	911	51
328	393	(15)	265	292	(14)	307	322	(12)	376	459	(22)	377	424	(19)
318	379	14	255	278	14	297	310	12	366	439	20	367	408	16
308	365	14	245	265	13	287	298	12	356	420	19	357	394	14
298	352	13	235	252	13	277	287	11	346	401	19	347	381	13
288	339	13	225	240	12	267	276	11	336	383	18	337	368	13
278	326	13	215	228	12	257	265	11	326	367	16	327	355	13
128	134	(12)	115	118	(11)	207	210	(11)	126	129	(11)	177	182	(11)
118	122	12	105	107	11	197	199	11	116	118	11	167	171	11
108	111	11	95	96	11	187	188	11	106	107	11	157	160	11
98	100	11	85	85	11	177	177	11	96	96	11	147	149	11
88	89	11	75	75	10	167	167	10	86	86	10	137	138	11
78	78	11	65	65	10	157	157	10	76	76	10	127	127	11
68	68	10	55	55	10	147	147	10	66	66	10	117	117	10
58	58	10	45	45	10	137	137	10	56	56	10	107	107	10
48	48	10	35	35	10	127	127	10	46	46	10	97	97	10
38	38	10	25	25	10	117	117	10	36	36	10	87	87	10
28	28	10	15	15	10	107	107	10	26	26	10	77	77	10

XXII. Das mannigfaltig in Anwendung kommende sogenannte **Camphin** ist nichts anderes als vollkommen gereinigtes Terpenthinöl. Um dasselbe zu bereiten wird Terpenthinöl mit einem Zusatz von Wasser und $\frac{1}{200}$ frisch gelöschtem Kalk destillirt, wodurch es weit vollkommener von allen harzigen Theilen befreit wird, als bei einer einfachen Destillation ohne Kalk. Das von dem mit überdestillirtem Wasser abgenommene Camphin, welches gewöhnlich durch eingemengtes Wasser trübe ist, wird mit Löschpapier (2—3 Bogen auf 10 Pfund Terpenthinöl) geschüttelt, bis es ganz wasserhell ist, und dann noch durch Löschpapier filtrirt.

(Dingler's polyt. Journal. Bd. 137. S. 209.)

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

VIII.

Ueber die Potenzenreihen und deren Reste.

Von O. Schlömilch.

Wenn man den Rest einer nach Potenzen von x fortschreitenden Reihe genau ausdrücken will, so hat man im Allgemeinen kein anderes Mittel, als den Mac Laurin'schen Satz in der Fassung:

$$1)\qquad f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+\ldots\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1}+R_n,$$

$$2)\qquad R_n=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^x(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt;$$

diese Darstellung des Restes leidet aber an der grossen Unbequemlichkeit, dass sie die independente Angabe von $f^{(n)}(x)$ oder $f^{(n)}(t)$ voraussetzt, welche letztere in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle auf sehr complicirte Ausdrücke führt. Daraus entspringt nachher einige Schwierigkeit für die Bestimmung der Grenzen, zwischen denen R_n liegt, und es ist sogar nicht selten, dass man kein Mittel mehr sieht, um bei unendlich werdenden n den Betrag von $Lim\,R_n$ aufzufinden. So z. B. erhält man für

$$3)\qquad f(x)=\frac{Arcsin\,x}{\sqrt{1-x^2}}$$

zunächst

$$(1-x^2)f'(x)=1+xf(x),$$

ferner durch m-malige Differentiation dieser Gleichung,

$$4)\qquad f^{(m+1)}(x)=\frac{(2m+1)xf^{(m)}(x)+m^2f^{(m-1)}(x)}{1-x^2}$$

und hieraus der Reihe nach

$$f(0)\;=f''(0)=f^{IV}(0)\ldots.=0$$
$$f'(0)=1,$$
$$f'''(0)=2^2f'(0)=2^2$$
$$f^V(0)=4^2f'''(0)=2^2.4^2\quad\text{u. s. w.},$$

mithin

$$\frac{Arcsin\,x}{\sqrt{1-x^2}}=x+\tfrac{2}{3}x^3+\frac{2.4}{3.5}x^5+\ldots\ldots$$
$$\ldots+\frac{2.4.6\ldots(2k)}{3.5.7\ldots(2k+1)}x^{2k+1}+R_{2k+2},$$

der Rest aber wird sehr complicirt, wenn man aus der Recursionsformel 4) eine independente Formel für $f^{(n)}(x)$ abzuleiten versucht oder auch $f^{(n)}(x)$ direct durch n-malige Differentiation des Productes $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} Arcsin\, x$ bestimmt. Gleichwohl ist im vorliegenden Falle eine sehr einfache Form des Restes zu bekommen und zwar auf folgendem Wege. Einer bekannten Reductionsformel zufolge ist

$$\int_0^x \frac{x^k dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{k+1}\sqrt{1-x^2}}{k+1} + \frac{k+2}{k+1}\int_0^x \frac{x^{k+2} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{x^k dx}{\sqrt{1-x^2}} = P_k$$

gesetzt wird,

$$P_k = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{k+2}{k+1} P_{k+2};$$

hieraus ergiebt sich der Reihe nach

$$P_0 = \frac{x}{1} + \frac{2}{1} P_2,$$

$$P_2 = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3} P_4,$$

$$P_4 = \frac{x^5}{5} + \frac{6}{5} P_6,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$P_{2k} = \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{2k+2}{2k+1} P_{2k+2}.$$

Substituirt man jede Gleichung in die nächste, so wird

$$P_0 = x + \tfrac{2}{3} x^3 + \frac{2.4}{3.5} x^5 + \ldots + \frac{2.4\ldots(2k)}{3.5\ldots(2k+1)} x^{2k+1} + \frac{2.4.6\ldots.(2k)(2k+2)}{3.5\ldots.(2k+1)} P_{2k+2}$$

d. i. vermöge der Werthe von P_0 und P_{2k+2}

$$\frac{Arcsin\, x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \tfrac{2}{3} x^3 + \frac{2.4}{3.5} x^5 + \ldots + \frac{2.4\ldots(2k)}{3.5\ldots(2k+1)} x^{2k+1}$$

$$+ \frac{2.4.6\ldots(2k)(2k+2)}{3.5\ldots\ldots(2k+1)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{x^{2k+2} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bei dieser einfachen Form des Restes können leicht Grenzen für letzteren angegeben werden; schreibt man nämlich das Integral in der Gestalt:

$$\int_0^x \frac{t^{2k+2} dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

so hat man für das Integrationsintervall $t=0$ bis $t=x$

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

mithin

$$\int_0^x t^{2k+2}\,dt < \int_0^x \frac{t^{2k+2}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x t^{2k+2}\,dt$$

d. i.

$$\frac{x^{2k+3}}{2k+3} < \int_0^x \frac{t^{2k+2}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x^{2k+3}}{2k+3};$$

der Rest der vorigen Reihe liegt also zwischen

$$\frac{2.4.6\ldots(2k+2)}{3.5.7\ldots(2k+3)} \frac{x^{2k+3}}{\sqrt{1-x^2}}$$

und

$$\frac{2.4.6\ldots(2k+2)}{3.5.7\ldots(2k+3)} \frac{x^{2k+3}}{1-x^2};$$

daraus folgt sehr leicht, dass R bei unendlich wachsenden k gegen die Null convergirt, sobald die Bedingung $1 > x > -1$ erfüllt ist.

Nach demselben Verfahren lassen sich alle in der algebraischen Analysis vorkommenden Reihen und deren Reste mit ebenso grosser Kürze als Strenge entwickeln, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Die binomische Reihe. Aus der bekannten Reductionsformel

$$\int_0^x \frac{x^k\,dx}{(1+x)^{\mu+1}} = \frac{x^{k+1}}{k+1} \frac{1}{(1+x)^\mu} + \frac{\mu-k-1}{k+1} \int_0^x \frac{x^{k+1}\,dx}{(1+x)^{\mu+1}}$$

ergiebt sich, wenn

$$(1+x)^\mu \int_0^x \frac{x^k\,dx}{(1+x)^{\mu+1}} = P_k$$

gesetzt wird,

$$P_k = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{\mu-k-1}{k+1} P_{k+1};$$

nimmt man k der Reihe nach $= 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ und substituirt jede Gleichung in die nächste, so hat man

$$P_0 = x + \frac{\mu-1}{2} x^2 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2.3} x^3 + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-1})}{2.3\ldots n} x^n + \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n)}{2.3\ldots.n} P_n,$$

und wegen

$$P_0 = \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu}$$

ergiebt sich sofort

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\overline{n-1})}{1.2\ldots.n} x^n + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{1.2\ldots n} P_n.$$

Um den Rest in zwei Grenzen einzuschliessen, geben wir P_n die Form

$$P_n = (1+x)^\mu \int_0^x \frac{t^n\, dt}{(1+t)^{\mu+1}}$$

und bemerken, dass $(1+t)^{-\mu-1}$ jederzeit zwischen 1 und $(1+x)^{-\mu-1}$ enthalten ist; es folgt daraus

$$\int_0^x t^n\, dt \gtrless \int_0^x \frac{t^n\, dt}{(1+t)^{\mu+1}} \gtrless \frac{1}{(1+x)^{\mu+1}} \int_0^x t^n\, dt$$

d. i.

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \gtrless \frac{P_n}{(1+x)^\mu} \gtrless \frac{1}{(1+x)^{\mu+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Man kann demnach sagen, dass P_n eine Mittelgrösse zwischen

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}(1+x)^\mu \text{ und } \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{1+x}$$

ist, und daher den binomischen Satz in folgender Form darstellen

$$5)\qquad (1+x)^\mu = 1 + (\mu)_1 x + (\mu)_2 x^2 + (\mu)_3 x^3 + \dots \dots + (\mu)_n x^n + (\mu)_{n+1} x^{n+1} \varrho,$$

$$6)\qquad \varrho = M\left[(1+x)^\mu, \frac{1}{1+x}\right].$$

Die Bedingungen, unter denen der Rest bei unendlich wachsenden n verschwindet, ergeben sich hieraus ohne alle Rechnung; wenn nämlich die Reihe $1 + (\mu)_1 x + (\mu)_2 x^2 + \dots$ bei ihrer Fortsetzung in's Unendliche convergirt, was für $1 > x > -1$ der Fall ist, so hat man *eo ipso*

$$Lim\, [(\mu)_{n+1} x^{n+1}] = 0$$

folglich auch

$$Lim\, [(\mu)_{n+1} x^{n+1} \varrho] = 0,$$

weil ϱ zufolge jener Determination zwischen endlichen Grössen liegt, also selber eine endliche Zahl sein muss.

Die Reihen für e^z und $l(x+1)$ ergeben sich auf bekannte Weise aus der Gleichung 5); setzt man nämlich $x = \frac{z}{\mu}$ und lässt nachher μ unendlich werden, so folgt

$$7)\qquad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \dots + \frac{z^n}{1.2\dots n} + \frac{z^{n+1}}{1.2\dots(n+1)} M(e^z, 1);$$

zieht man ferner von beiden Seiten der Gleichung 5) die Einheit ab, dividirt mit μ und geht zur Grenze für verschwindende μ über, so bleibt

$$8)\qquad l(1+x) = \tfrac{1}{1} x - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n + (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} M\left(1, \frac{1}{1+x}\right).$$

Für die Gleichungen 7) und 8) gilt wieder die Bemerkung, dass die Reste verschwinden, sobald die Reihen convergiren.

Die trigonometrischen und cyclometrischen Reihen. Sowie die Binomialreihe als die Quelle aller Reihen für algebraische, expo-

nentielle und logarithmische Functionen betrachtet werden kann, so lassen sich auch alle Reihen für trigonometrische und cyclometrische Functionen aus den Entwickelungen von $\cos \mu z$ und $\sin \mu z$ nach Potenzen von $\sin z$ herleiten. Hierzu gelangt man ohne Hilfe imaginärer Zahlen auf folgende Weise.

Wendet man die bekannte Formel der theilweisen Integration

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int du \int v\,dx$$

zweimal nach einander auf das Integral

$$P_{k+2} = \int_0^z \sin^{k+2} z \cos \mu z \, dz$$

an, indem man das erste Mal $u = \sin^{k+2} z$ und nachher $u = \sin^{k+1} z \cos z$ setzt, so findet man sehr leicht

$$\begin{aligned}(k+1)(k+2)P_k = \mu \sin^{k+2} z \sin \mu z + (k+2)\sin^{k+1} z \cos z \cos \mu z \\ + [(k+2)^2 - \mu^2]\, P_{k+2};\end{aligned}$$

durch eine ähnliche Rechnung, auf das Integral

$$Q_{k+2} = \int_0^z \sin^{k+2} z \sin \mu z \, dz,$$

angewendet, ergiebt sich die entsprechende Relation

$$\begin{aligned}(k+1)(k+2)Q_k = -\mu \sin^{k+2} z \cos \mu z + (k+2)\sin^{k+1} z \cos z \sin \mu z \\ + [(k+2)^2 - \mu^2]\, Q_{k+2}.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung multipliciren wir mit $\sin \mu z$, die zweite mit $\cos \mu z$, subtrahiren und setzen

$$U_k = P_k \sin \mu z - Q_k \cos \mu z;$$

wir erhalten dann nach Division mit $(k+1)(k+2)$

$$9) \qquad U_k = \frac{\mu \sin^{k+2} z}{(k+1)(k+2)} + \frac{(k+2)^2 - \mu^2}{(k+1)(k+2)} U_{k+2};$$

in ähnlicher Weise ergiebt sich für den Ausdruck

$$V_k = P_k \cos \mu z + Q_k \sin \mu z$$

die Relation

$$10) \qquad V_k = \frac{\sin^{k+1} z \cos z}{k+1} + \frac{(k+2)^2 - \mu^2}{(k+1)(k+2)} V_{k+2}.$$

Die Gleichung 9) nehmen wir zunächst in Anspruch für $k = 0, 2, 4, 6 \ldots (2n-2)$ und substituiren die gefundenen Gleichungen in einander; dies giebt

$$\begin{aligned}U_0 = \frac{\mu}{1.2}\sin^2 z + \frac{\mu(2^2-\mu^2)}{1.2.3.4}\sin^4 z + \frac{\mu(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 z + \ldots \\ \ldots + \frac{\mu(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)\ldots(\overline{2n-2}^2-\mu^2)}{1.2.3\ldots(2n)}\sin^{2n} z \\ + \frac{(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)\ldots(\overline{2n}^2-\mu^2)}{1.2.3\ldots(2n)} U_{2n}.\end{aligned}$$

Vermöge der Bedeutung von U_k ist

$$U_0 = \sin \mu z \int_0^z \cos \mu z \, dz - \cos \mu z \int_0^z \sin \mu z \, dz$$

$$= \sin \mu z \frac{\sin \mu z}{\mu} - \cos \mu z \frac{1 - \cos \mu z}{\mu} = \frac{1 - \cos \mu z}{\mu}$$

also durch Substitution in die obige Gleichung

$$11) \qquad \cos \mu z = 1 - \frac{\mu^2}{1.2} \sin^2 z - \frac{\mu^2 (2^2 - \mu^2)}{1.2.3.4} \sin^4 z - \ldots\ldots$$

$$\ldots - \frac{\mu^2 (2^2 - \mu^2) \ldots. (\overline{2n-2}^2 - \mu^2)}{1.2.3 \ldots. (2n)} \sin^{2n} z$$

$$- \frac{\mu (2^2 - \mu^2) \ldots.. (\overline{2n}^2 - \mu^2)}{1.2.3 \ldots. (2n)} U_{2n}.$$

Zu einem ähnlichen Resultate führt die Gleichung 9), wenn man sie für $k = 1, 3, 5, \ldots (2n-1)$ benutzt und gleichzeitig den Werth

$$U_1 = \frac{\sin \mu z - \mu \sin z}{1 - \mu^2}$$

beachtet; man findet nämlich

$$12) \qquad \sin \mu z = \frac{\mu}{1} \sin z + \frac{\mu (1^2 - \mu^2)}{1.2.3} \sin^3 z + \frac{\mu (1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 z + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\mu (1^2 - \mu^2) \ldots. (\overline{2n-1}^2 - \mu^2)}{1.2.3 \ldots. (2n+1)} \sin^{2n+1} z$$

$$+ \frac{(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2) \ldots (\overline{2n+1}^2 - \mu^2)}{1.2.3 \ldots. (2n+1)} U_{2n+1}.$$

Die unter Nr. 10) verzeichnete Relation gestattet zwei entsprechende Anwendungen und giebt für $k = 0, 2, 4 \ldots (2n-2)$

$$13) \qquad \frac{\sin \mu z}{\cos z} = \frac{\mu}{1} \sin z + \frac{\mu (2^2 - \mu^2)}{1.2.3} \sin^3 z + \frac{\mu (2^2 - \mu^2)(4^2 - \mu^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 z + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\mu (2^2 - \mu^2)(4^2 - \mu^2) \ldots (\overline{2n-2}^2 - \mu^2)}{1.2.3 \ldots. (2n-1)} \sin^{2n-1} z$$

$$+ \frac{\mu (2^2 - \mu^2)(4^2 - \mu^2) \ldots (\overline{2n}^2 - \mu^2)}{1.2.3 \ldots.. (2n)} \frac{V_{2n}}{\cos z}$$

und für $k = 1, 3, 5, \ldots (2n-1)$

$$14) \qquad \frac{\cos \mu z}{\cos z} = 1 + \frac{1^2 - \mu^2}{1.1} \sin^2 z + \frac{(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)}{1.2.3.4} \sin^4 z + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2) \ldots (\overline{2n-1}^2 - \mu^2)}{1.2.3 \ldots (2n)} \sin^{2n} z$$

$$+ \frac{(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2) \ldots. (\overline{2n+1}^2 - \mu^2)}{1.2.3 \ldots.. (2n+1)} \frac{V_{2n+1}}{\cos z}.$$

Die nämlichen Resultate ergeben sich auch durch Differenziation der Gleichungen 11) und 12).

Was nun die Reste der obigen vier Reihen betrifft, so kommt es nur darauf an, die Grössen U_k und V_k in möglichst einfacher Gestalt darzustellen. Schreibt man zu diesem Zwecke

$$P_k = \int_0^z sin^k w \cos \mu w \, dw, \quad Q_k = \int_0^z sin^k w \sin \mu w \, dw,$$

so erhalten U_k und V_k die Formen:

15) $$U_k = \int_0^z sin^k w \sin \mu (z - w) \, dw,$$

16) $$V_k = \int_0^z sin^k w \cos \mu (z - w) \, dw.$$

Ein Paar Grenzen für U_k und V_k finden sich auf folgende Weise. Wir schreiben statt Nr. 15)

$$U_k = \int_0^z sin^k w \cos w \frac{\sin \mu (z - w)}{\cos w} dw$$

und bezeichnen mit α und β das Maximum und das Minimum, welches die gebrochene Function

$$\frac{\sin \mu (z - w)}{\cos w}$$

annimmt, wenn w das Integrationsintervall 0 bis z durchläuft; damit weder α noch β unendlich werde, müssen wir voraussetzen, dass $\cos w$ nicht zum Verschwinden komme, dass also der grösste Werth von w, nämlich z, weniger als $\frac{1}{2}\pi$ betrage. Unter dieser Bedingung liegt U_k zwischen den Grössen

$$\alpha \int_0^z sin^k w \cos w \, dw = \alpha \frac{sin^{k+1} z}{k+1}$$

und

$$\beta \int_0^z sin^k w \cos w \, dw = \beta \frac{sin^{k+1} z}{k+1};$$

demnach ist

$$U_k = \frac{sin^{k+1} z}{k+1} M(\alpha, \beta),$$

wo $M(\alpha, \beta)$ eine zwischen α und β liegende von k unabhängige Grösse bezeichnet. Nennen wir entsprechend γ und δ den grössten und den kleinsten Werth, welchen die gebrochene Function

$$\frac{\cos \mu (z - w)}{\cos w}$$

annimmt, wenn w das Intervall 0 bis z durchläuft, so erhalten wir durch eine ähnliche Schlussweise

$$V_k = \frac{sin^{k+1} z}{k+1} M(\gamma, \delta).$$

Unter der gemeinschaftlichen Bedingung $\frac{1}{2}\pi > z > -\frac{1}{2}\pi$ haben wir nun die vier Formeln

$$17) \quad \cos\mu z = 1 - \frac{\mu^2}{1.2}\sin^2 z + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 z - \ldots\ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)\ldots\ldots(\mu^2-\overline{2n-2}^2)}{1.2.3.4\ldots\ldots(2n)}\sin^{2n} z$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{\mu(\mu^2-2^2)\ldots\ldots(\mu^2-\overline{2n}^2)}{1.2.3\ldots\ldots(2n+1)}\sin^{2n+1} z \,.\, M(\alpha,\beta),$$

$$18) \quad \sin\mu z = \frac{\mu}{1}\sin z - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}\sin^3 z + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 z - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{\mu(\mu^2-1^2)\ldots\ldots(\mu^2-\overline{2n-1}^2)}{1.2.3\ldots\ldots(2n+1)}\sin^{2n+1} z$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n+1}^2)}{1.2.3\ldots\ldots(2n+2)}\sin^{2n+2} z \,.\, M(\alpha,\beta),$$

$$19) \quad \frac{\sin\mu z}{\cos z} = \frac{\mu}{1}\sin z - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3}\sin^3 z + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 z - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{\mu(\mu^2-2^2)\ldots\ldots(\mu^2-\overline{2n-2}^2)}{1.2.3\ldots\ldots(2n-1)}\sin^{2n-1} z$$

$$+ (-1)^n \frac{\mu(\mu^2-2^2)\ldots\ldots(\mu^2-\overline{2n}^2)}{1.2.3\ldots\ldots(2n+1)}\sin^{2n+1} z\, \frac{M(\gamma,\delta)}{\cos z},$$

$$20) \quad \frac{\cos\mu z}{\cos z} = 1 - \frac{\mu^2-1^2}{1.2}\sin^2 z + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4}\sin^4 z - \ldots\ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n-1}^2)}{1.2.3\ldots\ldots(2n)}\sin^{2n} z$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{(\mu^2-1^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n+1}^2)}{1.2\ldots\ldots(2n+2)}\sin^{2n+2} z\, \frac{M(\gamma,\delta)}{\cos z}.$$

Bei ganzen positiven μ sind gerade und ungerade μ zu unterscheiden; die Reihen in 11) und 13) werden für $\mu = 2n$ endlich und ihre Reste verschwinden, ebenso brechen die Reihen 12) und 14) für $\mu = 2n + 1$ ab mit verschwindenden Resten. In jedem anderen Falle dagegen werden die Reihen unendlich und dann ist aus den Formeln 17) bis 20) das Verhalten der Reste zu erkennen, wenn die Bedingung $\frac{1}{2}\pi > z > -\frac{1}{2}\pi$ festgehalten wird. Jede der vier in den erwähnten Formeln vorkommenden Reihen convergirt nämlich unter der gemachten Voraussetzung und daraus folgt, dass für unendlich wachsende n jedes der allgemeinen Glieder die Null zur Grenze hat. Der Faktor von $M(\alpha, \beta)$ in Nr. 17) ist nun identisch mit dem allgemeinen Gliede der Reihe 19), und der Faktor von $M(\alpha, \beta)$ in Nr. 18) einerlei mit dem allgemeinen Gliede der Reihe 20); die Reste der ersten beiden Reihen verschwinden also für $n = \infty$. Weil ferner die Coefficienten von $\frac{M(\gamma, \delta)}{\cos z}$ in 19) und 20) mit den allgemeinen Gliedern der nämlichen Reihen übereinstimmen, so verschwinden auch hier die Reste.

Die Reihe für $\cos x$ ergiebt sich aus Nr. 11), wenn man $z = \frac{x}{\mu}$ setzt und nachher μ unendlich werden lässt; vermöge der Bedeutung von U_k in Nr. 15) ist zunächst:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{1.2}\left(\mu \sin\frac{x}{\mu}\right)^2 + \frac{1-\left(\frac{2}{\mu}\right)^2}{1.2.3.4}\left(\mu \sin\frac{x}{\mu}\right)^4 - \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{\left[1-\left(\frac{2}{\mu}\right)^2\right]\dots\left[1-\left(\frac{2n-2}{\mu}\right)^2\right]}{1.2.3\dots(2n)}\left(\mu \sin\frac{x}{\mu}\right)^{2n}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{\left[1-\left(\frac{2}{\mu}\right)^2\right]\dots\left[1-\left(\frac{2n}{\mu}\right)^2\right]}{1.2.3\dots(2n)} \mu^{2n+1} \int_0^{\frac{x}{\mu}} \sin^{2n} w \sin \mu\left(\frac{x}{\mu} - w\right) dw$$

durch Einführung einer neuen Variabelen $v = \mu w$ oder $w = \frac{v}{\mu}$ wird das letzte Glied

$$(-1)^{n+1} \frac{\left[1-\left(\frac{2}{\mu}\right)^2\right]\dots\left[1-\left(\frac{2n}{\mu}\right)^2\right]}{1.2.3\dots(2n)} \int_0^x \left(\mu \sin\frac{v}{\mu}\right)^{2n} \sin(x-v)\, dv$$

und für $\mu = \infty$ ergiebt sich nun

$$21)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2\dots(2n)} + (-1)^{n+1} \frac{1}{1.2\dots(2n)} \int_0^x v^{2n} \sin(x-v)\, dv.$$

Aus Nr. 12) erhält man durch dasselbe Verfahren

$$22)\quad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2.3\dots(2n+1)} + (-1)^{n+1} \frac{1}{1.2\dots(2n+1)} \int_0^x v^{2n+1} \sin(x-v)\, dv.$$

Will man diese Reihen direct entwickeln, so braucht man nur von der durch partielle Integration leicht erweisbaren Gleichung

$$\int_0^x v^{k+2} \sin(x-v)\, dv = x^{k+2} - (k+1)(k+2) \int_0^x v^k \sin(x-v)\, dv$$

oder

$$\int_0^x v^k \sin(x-v)\, dv = \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \int_0^x v^{k+2} \sin(x-v)\, dv$$

auszugehen und sie erst für $k = 0, 1, 2, \dots (2n-2)$ und dann für $k = 1, 3, 5 \dots (2n-1)$ in Anwendung zu bringen. Da $\sin(x-v)$ von $v = 0$ bis $v = x$ ein ächter Bruch ist, so beträgt der Rest

$$\frac{1}{1.2\dots k} \int_0^x v^k \sin(x-v)\, dv$$

einen Bruchtheil von

$$\frac{1}{1.2\ldots.k}\int_0^x v^k\,dv = \frac{x^{k+1}}{1.2.3\ldots(k+1)}$$

und verschwindet für unendlich werdende k.

Zieht man beide Seiten der Gleichung 11) von der Einheit ab und dividirt mit μ^2, so hat man

$$2\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\mu z}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{1.2}\sin^2 z + \frac{2^2-\mu^2}{1.2.3.4}\sin^4 z + \ldots.$$
$$\ldots + \frac{(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)\ldots(\overline{2n-2}^2-\mu^2)}{1.2.3\ldots.(2n)}\sin^{2n} z$$
$$+ \frac{(2^2-\mu^2)\ldots(\overline{2n}^2-\mu^2)}{1.2\ldots.(2n)}\int_0^z \sin^{2n} w\,\frac{\sin\mu(z-w)}{\mu}\,dw$$

und für $\mu = 0$

$$23)\qquad \tfrac{1}{2}z^2 = \frac{\sin^2 z}{2} + \frac{2}{3}\,\frac{\sin^4 z}{4} + \frac{2.4}{3.5}\,\frac{\sin^6 z}{6} + \ldots.$$
$$+ \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}\,\frac{\sin^{2n} z}{2n}$$
$$+ \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}\,2n\int_0^z (z-w)\sin^{2n} w\,dw.$$

Liegt z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, so kann das vorkommende Integral

$$\int_0^z \frac{z-w}{\cos w}\sin^{2n} w\cos w\,dw$$

leicht in zwei endliche Grenzen eingeschlossen werden; es ist nämlich, wenn α und β das Maximum und Minimum von $\frac{z-w}{\cos w}$ bezeichnen

$$\int_0^z \frac{z-w}{\cos w}\sin^{2n} w\cos w\,dw = \frac{\sin^{2n+1} z}{2n+1}\,M(\alpha,\beta).$$

Hieraus folgt sehr leicht, dass der Rest in 23) verschwindet, wenn die vorhergehende Reihe convergirt und $\frac{1}{2}\pi > z > -\frac{1}{2}\pi$ ist. Das Ergebniss besteht in der von **Stainville** zuerst entwickelten Formel für $(Arcsin\,x)^2$.

Dividirt man beide Seiten der Gleichung 12) durch μ und lässt nachher μ in Null übergehen, so bleibt

$$24)\qquad z = \frac{\sin z}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^3 z}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^5 z}{5} + \ldots.$$
$$\ldots + \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}\,\frac{\sin^{2n+1} z}{2n+1}$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}(2n+1)\int_0^z (z-w)\sin^{2n+1} w\,dw;$$

unter der Bedingung $\frac{1}{2}\pi > z > -\frac{1}{2}\pi$ ist wie vorhin der Rest

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \frac{2n+1}{2n+2} \sin^{2n+1} z \,.\, M(\alpha, \beta)$$

und verschwindet für $n = \infty$. Im letzteren Falle erhält man die bekannte Reihe für $Arcsin\, x$.

Aus der Gleichung 13) ergiebt sich durch Division mit μ und nachher für $\mu = 0$

$$25)\qquad \frac{z}{\cos z} = \sin z + \tfrac{2}{3} \sin^3 z + \frac{2.4}{3.5} \sin^5 z + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{2.4.6\ldots.(2n-2)}{3.5.7\ldots.(2n-1)} \sin^{2n+1} z$$
$$+ \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.6\ldots(2n-1)} \frac{2n}{\cos z} \int_0^z \sin^{2n} z\, dz$$

was für $\frac{1}{2}\pi > z > -\frac{1}{2}\pi$ mit dem in der Einleitung entwickelten Resultate übereinstimmt.

Nicht ohne Interesse sind noch die Ergebnisse, welche man aus den Gleichungen 17) und 18) durch Multiplication mit dz und Integration zwischen den Grenzen $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}\pi$ ableiten kann. Unter Benutzung der bekannten Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2k} z\, dz = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots.(2k)} \frac{\pi}{2}$$

erhält man nämlich aus Nr. 17)

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\mu\pi}{\mu} = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{\mu^2}{2^2} - \frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{2^2.4^2} - \ldots\ldots\ldots \right.$$
$$\left. - \frac{\mu^2(2^2-\mu^2)\,.\,.(\overline{2n-2}^2-\mu^2)}{2^2.4^2\ldots.(2n)^2}\right]$$
$$- \frac{\mu(2^2-\mu^2)\ldots(\overline{2n}^2-\mu^2)}{1.2.3\ldots.(2n)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} U_{2n}\, dz$$

und durch Zusammenziehung der eingeklammerten Reihe

$$26)\qquad \frac{\sin \frac{1}{2}\mu\pi}{\mu} = \frac{\pi}{2} \frac{(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)\ldots.(\overline{2n}^2-\mu^2)}{2^2.4^2\ldots\ldots(2n)^2}$$
$$- \frac{\mu(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)\ldots(\overline{2n}^2-\mu^2)}{1.2.3\ldots.(2n)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} U_{2n}\, dz.$$

Vermöge der Bedeutung von U_{2n} ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} U_{2n}\, dz$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \mu z\, dz \int_0^z \sin^{2n} w \cos \mu w\, dw - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \mu z\, dz \int_0^z \sin^{2n} w \sin \mu w\, dw$$

und hier lässt sich auf jedes Doppelintegral rechter Hand die bekannte Formel*)

$$\int_0^h \varphi'(z)\,dz \int_0^z f(w)\,dw$$

$$= \varphi(h) \int_0^h f(w)\,dw - \int_0^h \varphi(w)\,f(w)\,dw$$

anwenden, indem man $h = \frac{1}{2}\pi$, das erste Mal

$$\varphi'(z) = -\frac{\cos.\mu z}{\mu}, \qquad f(w) = \sin^{2n} w \sin \mu w\,dw$$

und das zweite Mal

$$\varphi'(z) = +\frac{\sin \mu z}{\mu}, \qquad f(w) = \sin^{2n} w \cos \mu w\,dw$$

substituirt. Man erhält auf diese Weise

$$\int^{\frac{1}{2}\pi} U_{2n}\,dz$$

$$= -\frac{1}{\mu} \cos \tfrac{1}{2}\mu\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} w \cos \mu w\,dw + \frac{1}{\mu} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \mu w \sin^{2n} w \cos \mu w\,dw$$

$$- \frac{1}{\mu} \sin \tfrac{1}{2}\mu\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} w \sin \mu w\,dw + \frac{1}{\mu} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \mu w \sin^{2n} w \sin \mu w\,dw$$

d. i. bei Vereinigung aller Integrale

---

*) Bezeichnet man nämlich $\int f(w)\,dw$ für den Augenblick mit $F(w)$, so ist das in Rede stehende Doppelintegral

$$J = \int_0^h \varphi'(z)\,dz\,[F(z) - F(0)]$$

$$= \int_0^h F(z)\,\varphi'(z)\,dz - F(0)\,[\varphi(h) - \varphi(0)].$$

Bei unbestimmter theilweiser Integration hat man weiter

$$\int F(z)\,\varphi'(z)\,dz = F(z)\,\varphi(z) - \int F'(z)\,dz\,\varphi(z)$$

$$= F(z)\,\varphi(z) - \int f(z)\,\varphi(z)\,dz,$$

mithin nach Einführung der Grenzen $z = h$, $z = 0$ und durch Substitution in das Vorige

$$J = F(h)\,\varphi(h) - F(0)\,\varphi(0) - \int_0^h \varphi(z)\,f(z)\,dz - F(0)\,[\varphi(h) - \varphi(0)]$$

$$= \varphi(h)\,[F(h) - F(0)] - \int_0^h \varphi(z)\,f(z)\,dz$$

$$= \varphi(h) \int_0^h f(w)\,dw - \int_0^h \varphi(w)\,f(w)\,dw$$

wie oben behauptet wurde.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} U_{2n}\,dz = \frac{1}{\mu}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} w\,[1 - \cos\mu\,(\tfrac{1}{2}\pi - w)]\,dw$$

oder endlich mittelst der Substitution $w = \frac{1}{2}\pi - v$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} U_{2n}\,dz = \frac{2}{\mu}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2n} v\,.\,\sin^2 \tfrac{1}{2}\mu v\,dv.$$

Um den Werth dieses Integrales zwischen zwei bequeme Grenzen zu bringen, setzen wir $2 > \mu > -2$ voraus; es ist dann

$$0 < \sin^2 \tfrac{1}{2}\mu v < [\sin^2 v = 1 - \cos^2 v],$$

und folglich liegt der Werth des Integrales zwischen 0 und

$$\frac{2}{\mu}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos^{2n} v - \cos^{2n+2} v)\,dv$$

$$= \frac{2}{\mu}\cdot\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}\,\frac{1}{2n+2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Wir sind demgemäss berechtigt

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} U_{2n}\,dz = \frac{1}{\mu}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{2\vartheta}{2n+2}\,\frac{\pi}{2}$$

zu setzen, wo ϑ einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Nach Substitution dieses Werthes und für $\mu = 2\lambda$ ergiebt sich aus Nr. 26) unter der Bedingung $1 > \lambda > -1$

$$27)\quad \left(1 - \frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right) = \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}\,\frac{1}{1 - \dfrac{2\vartheta}{2n+2}}$$

oder mit anderen Worten, der Werth des linker Hand stehenden Produktes liegt zwischen

$$\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi} \text{ und } \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}\left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

für $n = \infty$ erhält man das bekannte unendliche Produkt für den Sinus.

Multiplicirt man die Gleichung 12) mit dz und integrirt von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}\pi$ unter Anwendung der bekannten Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2k+1} z\,dz = \frac{2.4.6\ldots.(2k)}{3.5.7\ldots(2k+1)},$$

so findet man zunächst

$$\cos\tfrac{1}{2}\mu\pi = \frac{(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)(5^2 - \mu^2)\ldots(\overline{2n+1}^2 - \mu^2)}{1^2.3^2.5^2\ldots.(2n+1)^2}$$

$$- \mu\,\frac{(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)\ldots(\overline{2n+1}^2 - \mu^2)}{1.2.3\ldots.(2n+1)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} U_{2n+1}\,dz;$$

das noch übrige Integral kann ebenso wie das vorige behandelt werden, wobei sich ergiebt, dass für $2 > \mu > -2$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} U_{2n+1}\,dz = \frac{1}{\mu}\,\frac{2.4.6\ldots.(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)}\,\frac{2\vartheta}{2n+3}$$

zu setzen ist, wenn ϑ wiederum einen positiven ächten Bruch bezeichnet; die vorige Gleichung geht dann in die folgende über

$$28)\qquad \left(1-\frac{\mu^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{3^2}\right)\ldots.\left(1-\frac{\mu^2}{(2n+1)^2}\right) = \cos\tfrac{1}{2}\mu\pi\,\frac{1}{1-\frac{2\vartheta}{2n+3}}$$

aus welcher das unendliche Produkt für den Cosinus folgt.

Nach den hier mitgetheilten Entwickelungen dürfte man sich wohl zu der Behauptung berechtigt halten, dass eine ausführlichere und genauere Theorie der Potenzenreihen weniger in die Differentialrechnung, als vielmehr in die Integralrechnung gehört, wo sie vor den Lehren von den halbconvergenten und von den periodischen Reihen eine passende Stelle finden würde.

IX.

Ueber die Genauigkeit der Längenmessungen mit der Messkette auf verschiedenen Bodenarten.

Von J. J. Vorlaender,

Königl. Preuss. Steuerrath in Preussisch Minden.

In den meisten Ländern ist der Genauigkeitsgrad der Längenmessungen, welcher bei der Ausübung der Feldmesskunst erreicht werden muss, gesetzlich oder reglementarisch festgestellt, gewöhnlich in der Form, dass der Fehler in der Angabe des Feldmessers einen gewissen aliquoten Theil der betreffenden Länge nicht überschreiten soll.

Ohne Zweifel beruhen solche Bestimmungen auf practischen Erfahrungen, wie genau man mit den in jenen Vorschriften vorausgesetzten Hülfsmitteln messen kann, aber weder die Vorschriften selbst noch die Lehrbücher über practische Feldmesskunst geben darüber genügenden Aufschluss. Ist nun durch solche positive Vorschriften die Fehlergrenze bestimmt, so haben Erfahrungen der gedachten Art seitdem keineswegs nur ein theoretisches Interesse; sie sind auch jetzt noch wichtig, um die Wahl der Werkzeuge und die Anforderungen an die letzteren zu leiten, um das Verfahren bei der Messung zu regeln und das Urtheil des Feldmessers über seine Arbeiten sicher zu stellen. Zum Bedürfniss endlich wird die Kenntniss von dem bei Längenmessungen erreichbarem Genauigkeitsgrade, wenn es sich darum handelt, Messungen verschiedener Gattung, z. B. Längenmessungen und Winkelbeobachtungen, mit einander zu verbinden, um daraus diejenigen Resultate für die zu bestimmenden Grössen zu entwickeln, welche allen auf sie gerichteten Messungen am besten entsprechen. Der Feldmesser,

welcher mit dem Theodolithen und der Messkette operirt, wird, wenn er seine Kunst mit wissenschaftlichem Interesse betreibt, nicht unterlassen, vor dem Gebrauch dieser Werkzeuge sich von dem wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Winkelnahme und einer Anspannung der Messkette zu unterrichten.

Die Ermittlung des wahrscheinlichen Fehlers einer einzelnen Winkelnahme hat im Allgemeinen wenig Schwierigkeit. Der Feldmesser braucht nur sein Instrument gehörig aufzustellen, den Winkel zwischen zwei scharf bezeichneten Zielpunkten wiederholt zu messen und darauf Bedacht zu nehmen, dass die Nonien bei dieser Operation den ganzen Umkreis des Werkzeugs durchlaufen; er hat es ohne grosse Umstände und Kosten in seiner Gewalt, diese Arbeit so oft zu wiederholen, als er es für nöthig hält, damit die zufälligen Fehler der einzelnen Ablesungen keinen merklichen Einfluss auf das Endresultat ausüben können, der gemessene Winkel also so genau bekannt wird, als er es wünschen mag. Die Vergleichung dieses Resultats mit den einzelnen Beobachtungsresultaten liefert dann unmittelbar eine Reihe von Fehlern, woraus er den mittlern oder wenn er will den wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Winkelnahme leicht berechnen kann. Eine Untersuchung dieser Art hat auch noch die Bequemlichkeit, dass es dabei auf die Grösse des gemessenen Winkels nicht ankommt, weil nach allgemeiner Annahme unter den Sachverständigen der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Winkelnahme von der Grösse des gemessenen Winkels nicht abhängig ist.

Schwieriger ist die Ermittlung des wahrscheinlichen Fehlers bei den Längenmessungen. Versuchsweise Winkelmessungen kann der Feldmesser allenfalls von seiner Wohnstube oder doch von jedem beliebig gewählten Standpunkte aus mit aller Bequemlichkeit anstellen; die Linienmessung erfordert nothwendig, dass er sich in der Richtung der zu messenden Linie fortbewege und das Resultat der Operation ist allen Einflüssen der Bodenverschiedenheit und anderer störenden Einwirkungen ausgesetzt. Wollte er die Umstände so günstig als möglich wählen, etwa seine Versuchsmessung auf dem Fusswege einer ebnen Chaussee anstellen, so würde er ein Resultat finden, welches von dem durchschnittlichen Genauigkeitsverhältniss der in der practischen Ausübung der Feldmesskunst vorkommenden Längenmessungen ohne Zweifel beträchtlich abwiche. Er müsste also das Local der Messung so oft wechseln, als nöthig wäre, um einigermaassen sicher zu stellen, dass die Einflüsse der Bodenverschiedenheit und anderer Umstände sich gegen einander ausgeglichen haben; auch müsste die Arbeit so oft wiederholt werden, dass von einer Gruppirung der als zufällige Fehler angesehenen Messungsdifferenzen ein Schluss auf das ihnen zum Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsverhältniss gemacht werden könnte. Aber zu jeder Messung einer geraden Linie vermittelst der Messkette bedarf der Feldmesser wenigstens zweier Gehülfen (Kettenzieher); das Geschäft in dem gedachten Umfange ausgeführt, würde also ein sehr kostspieliger Versuch sein.

Diesen Schwierigkeiten ist es wohl hauptsächlich zuzuschreiben, dass bis jetzt noch so wenig gründliche Untersuchungen über die Zuverlässigkeit der Längenmessungen öffentlich mitgetheilt worden sind. Das Wenige, was wir haben, beschränkt sich auf Versuchsmessungen mit Ketten oder Maassstäben von verschiedener Länge an ausgewählten Plätzen, die Anzahl der verglichenen Resultate ist gering.

Indem ich zu diesen immerhin sehr schätzbaren Versuchen einen Bei-

trag liefere, schlage ich einen von dem bisherigen Verfahren abweichenden Weg ein; ich befrage nämlich einfach die Erfahrung in einem concreten Falle. Dabei glaube ich den doppelten Vortheil zu erlangen, dass die benutzten Thatsachen von den unvermeidlichen Mängeln eines willkührlich angestellten Versuches völlig unabhängig sind und dass die genommenen Resultate der Praxis um so sicherer entsprechen werden, als sie der Praxis selbst ihren Ursprung verdanken.

Die Arbeit, welche jene Thatsachen geliefert hat, ist die in den Jahren 1852 und 1853 ausgeführte Vermessung des Amtes Reckenberg im preussischen Regierungsbezirk Minden. Dieses Amt umfasst eine Fläche von 2$^1/_{10}$ Quadratmeilen und wird durch den Emsfluss in zwei nahe gleichgrosse Theile zerlegt, wovon der nördliche Theil aus lockerm Sandboden, der südliche aus Kleiboden besteht. Die Vermessungsmethode war die in den Jahren 1820 bis 1832 bei der Aufnahme des Grundsteuerkatasters in den Provinzen Westfalen und Rheinland fast überall zur Ausübung gekommene sogenannte Polygonal-Constructionsmethode, wobei dem Feldmesser die Coordinaten der Dreieckspunkte III. Ordnung gegeben wurden, zwischen denen er Dreiecke IV. Ordnung zu construiren und in Verbindung damit jede Flur, d. h. jede in dem vorschriftsmässigen Maassstabe auf einem Kartenbogen darstellbare in natürliche Grenzen eingeschlossene Fläche mit einem Polygon zu umgeben hatte, in dessen Winkelpunkte und Seiten die zur Aufnahme des im Innern befindlichen Details erforderlichen Constructionslinien eingebunden wurden. Die Winkel dieser Polygone wurden mit Theodolithen, die Seiten im Rheinlande mit Messruthen, in Westfalen mit Messketten gemessen.

Im Amte Reckenberg wurden zu den Längenmessungen Messketten von 5 Ruthen Länge gebraucht, deren einzelne Glieder ein Zehntel Ruthe lang sind. Nach der Mittheilung des Herrn Kataster-Controleurs Sartor, welcher die Vermessung des Amtes leitete, waren die im nördlichen Theile desselben, also auf dem Sandboden gebrauchten Messketten nicht von gleicher Beschaffenheit, wie diejenigen, welche später im südlichen Theile angewendet wurden. Erstere wogen 9⅝ Pfund, ihre Glieder bestanden aus Eisendraht und waren durch messingene Ringe verbunden und die ganzen Ruthen durch messingene Abzeichen kenntlich gemacht. An den beiden Kettenstäbenringen und den Abzeichen der ganzen Ruthen waren Schrauben zum Justiren angebracht. Die später gebrauchten Ketten hatten ein Gewicht von 11 Pfund 24 Loth bis 12 Pfund 28 Loth und hatten statt der messingenen Ringe zwischen den einzelnen Gliedern eiserne Ringe. Die Ringe zwischen den halben Ruthen waren zwar hier auch von Messing, aber bedeutend stärker. Herr Sartor giebt den letztern Ketten den Vorzug, weil er bemerkt hat, dass die messingenen Verbindungsringe der einzelnen Glieder sich leichter abschleifen auch die Schraubengewinde der Justirungsvorrichtungen beim Gebrauche der Messketten nachgeben und verschleissen.

Zur Prüfung dieser Messketten war für den nördlichen Theil des Amtes auf einer Kegelbahn für den südlichen Theil in dem Wohnhause des Herrn Sartor auf ebenem, gedieltem Boden die Länge von 5 Ruthen vermittelst geaichter Maassstäbe von 5 Fuss Länge, deren Enden von Metall, mit möglichster Vorsicht an einander gelegt wurden, abgesetzt. Jede neue Messkette wurde vor dem Gebrauche mit einem dieser Normalmaasse verglichen und in Uebereinstimmung gebracht und nach zwei- bis dreitägigem Gebrauche fand wieder eine Vergleichung statt. Gewöhnlich zeigte sich in den ersten Tagen des Gebrauchs die grösste Veränderung der Kettenlänge,

welches Herr Sartor dem Umstande zuschreibt, dass bei der Anfertigung der Ketten, insbesondere bei dem Umbiegen des Eisendrahtes nach Innen hin ein Abblättern des Metalls entstanden sein mochte, welches bei dem erstmaligem Gebrauche abgerieben wurde, wodurch sich die Kette verlängern musste. Bei den Messungen im nördlichen Theile des Amtes geschah die Prüfung der neuen Ketten stets in Gegenwart des Herrn Sartor, bei den spätern Prüfungen ist er dagegen nicht immer anwesend gewesen; im südlichen Theile dagegen haben alle Prüfungen in seiner Gegenwart stattgefunden. Bei den Polygonseitenmessungen geschahen die Prüfungen in der Regel nach zweitägigem Gebrauche einer Messkette, bei der Parcellarvermessung nach siebentägigem Gebrauche. Jede Polygonseite wurde zweimal gemessen und zwar das eine Mal in der Richtung von A nach B, das andere Mal in der Richtung von B nach A. Ruthen und die zehntheiligen Fusse wurden auf der Kette selbst, die Zolle auf einem an das letzte Fussglied gelegtem Maassstabe abgelesen. Es ist nur nach vollen Zollen gelesen worden, also

von 0 bis zu 0,005 Ruthen ist gelesen 0,00
„ 0,005 „ „ 0,015 „ „ „ 0,01
„ 0,015 „ „ 0,025 „ „ „ 0,02
u. s. w.

Bei der Sorgfalt, womit nicht nur die ganze Länge jeder Messkette, sondern auch die Stellung des einzelnen Gliedes in derselben stets überwacht worden ist, darf angenommen werden, dass der Ablesungsfehler (abgesehen von groben Irrthümern im Ablesen der Glieder und Zollstriche) niemals einen vollen Zoll betragen hat, dass also die Differenz zwischen der ersten und zweiten Seitenmessung lediglich den Schwankungen im Einstecken der Kettenstäbe und im Anspannen der Messkette beizumessen ist. Der wahrscheinliche Fehler einer Kettenmessung ist nach dieser Voraussetzung nur noch von der Anzahl der in der gemessenen Länge enthaltenen vollen Kettenzüge abhängig. In der nachfolgenden Betrachtung sind daher alle Polygonseiten, deren Längen um weniger als 5 Ruthen verschieden sind, in eine Gruppe zusammengeworfen. Diese Vereinigung hat es möglich gemacht, die Resultate der Messung sämmtlicher 986 Polygonseiten, soweit sie für die gegenwärtige Betrachtung von Interesse sind, in den Raum der anliegenden Verzeichnisse I. und II. zusammen zu drängen. Das erste dieser Verzeichnisse enthält die Messungen auf dem Sandboden, das zweite die auf dem Kleiboden. Die erste Spalte derselben zeigt die Intervalle an, worin die gemessenen Polygonseiten liegen, nämlich die Anzahl der in jeder der letzteren enthaltenen vollen Kettenlängen von 5 Ruthen, die zweite die Anzahl der Polygonseiten, welche einem Intervalle angehören. Die mit 0,00 bis 0,45 überschriebenen Spalten zählen die Anzahl der Differenzen zwischen der ersten und zweiten Seitenmessung von der im Kopfe der Verzeichnisse angegebenen Grösse. Die Summe der Producte aus der Anzahl der Differenzen in die Grösse derselben ergibt das mit s überschriebene Aggregat der Differenzen. In der folgenden Spalte ist das Aggregat s mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Kettenlänge, in der letzten mit dieser Anzahl selbst getheilt. Die Einrichtung dieser Verzeichnisse springt zwar leicht in die Augen, doch möge man erlauben, sie durch ein Beispiel zu erläutern. Auf dem Sandboden sind 17 Polygonseiten vorgekommen, deren Länge 5 volle Kettenzüge, also 25 bis 30 Ruthen betrug. Bei der Vergleichung der ersten Seitenmessungen mit den zweiten fanden sich

4	Messungen, deren Differenzen		unter 0,005	also	0,00	überhaupt	0,00 waren
3	" " "	über 0,005	und " 0,015	"	0,01	"	0,03 "
3	" " "	" 0,015	" " 0,025	"	0,02	"	0,06 "
2	" " "	" 0,025	" " 0,035	"	0,03	"	0,06 "
1	" " "	" 0,035	" " 0,045	"	0,04	"	0,04 "
2	" " "	" 0,045	" " 0,055	"	0,05	"	0,10 "
2	" " "	" 0,055	" " 0,065	"	0,06	"	0,12 "
17							0,41 "

Die Theilung der Zahl 0,41 durch $\sqrt{5} = 2{,}236$ giebt dann 0,1833
" " " " " " 5 selbst " " 0,0820

In der Zahl 0,41 sind alle Differenzen zwischen der ersten und zweiten Seitenmessung zusammengezählt, ohne Unterschied, ob die erste oder die zweite Seitenmessung das grössere von den beiden verglichenen Resultaten war.

Handelt es sich um Beurtheilung der Fehler vorliegender Messungen, so muss zuvörderst bemerkt werden, dass wir nach theoretischen Untersuchungen und nach dem practischen Gefühl bei unmittelbaren, gleichförmigen und gleichvertrauenswürdigen Beobachtungen, womit wir es hier zu thun haben, den wahrscheinlichen Werth einer Grösse finden, wenn wir alle vorliegenden unmittelbaren Beobachtungsresultate zusammen addiren und die Summe mit ihrer Anzahl theilen, oder nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch das arithmetische Mittel ziehen.

Sind also $a'\ a''\ a''' \ldots\ldots a^{(n)}$ die einzelnen durch jene Beobachtung gefundenen Werthe, so gelangen wir zu dem wahrscheinlichsten Werthe A durch die Formel

$$A = \frac{a' + a'' + a''' + \ldots\ldots a^{(n)}}{n}$$

In dem gegenwärtigen Falle sind immer nur zwei Messungen vorhanden, die Formel zieht sich also zusammen auf:

$$A = \frac{a' + a''}{2}$$

Bei Beurtheilung der Fehler bedient man sich verschiedener charakteristischer Fehler, nämlich des

mittleren Fehlers . . . . . . m
wahrscheinlichen Fehlers . . r.

Der mittlere Fehler ist strenge genommen derjenige, welcher gefunden würde, wenn von den einzelnen durch unmittelbare Beobachtung gefundenen Werthen, der wahre Werth der beobachteten Grösse abgezogen, die Unterschiede einzeln zum Quadrat erhoben und diese Quadrate summirt würden, sodann die Summe durch die Anzahl der Unterschiede getheilt und aus dem Quotienten die Quadratwurzel ausgezogen würde. Da wir aber den wahren Werth eines Maasses niemals kennen können, wir uns immer mit dem wahrscheinlichsten Werthe begnügen müssen, so hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Schätzungsmittel an die Hand gegeben, welches darin besteht, dass statt des wahren Werthes der Grösse der wahrscheinlichste Werth derselben von den unmittelbar beobachteten Werthen abgezogen, die Unterschiede quadrirt, die Quadratsumme mit der um 1 verminderten Anzahl der Beobachtungen getheilt und aus dem Quotient die Quadratwurzel ausgezogen wird.

Nach der obigen Bezeichnung wäre also:

$$m = \sqrt{\frac{(a' - A)^2 + (a'' - A)^2 + (a''' - A)^2 + \ldots (a^{(n)} - A)^2}{n - 1}}$$

oder für den vorliegenden Fall, wo $n = 2$ ist

$$m = \sqrt{\left(a' - \frac{a' + a''}{2}\right)^2 + \left(a'' - \frac{a' + a''}{2}\right)^2} = (a' - a'')\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Der wahrscheinliche Fehler endlich ist derjenige, welcher von den Fehlern der einzelnen Beobachtungen ebenso leicht überschritten wird, als unerreicht bleibt. Bei einer grossen Anzahl von Fehlern werden also nach dem Charakter des Zufalls ebenso viele Fehler, abgesehen vom Zeichen, unterhalb als oberhalb des wahrscheinlichen Fehlers fallen. Bei einer solchen Anzahl von Beobachtungen kann man den wahrscheinlichen Fehler auf mechanischem Wege finden. Man ordnet die einzelnen Fehler der Grösse nach und sieht zu, auf welchen Fehler beim einfachen Herabzählen die Hälfte aller Fehler trifft; jener ist der wahrscheinliche Fehler, wenigstens annäherungsweise. Bei schärfern Untersuchungen leitet man indessen den wahrscheinlichen Fehler aus dem nach dem obigen Verfahren geschätzten mittlern Fehler ab. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ergiebt zu diesem Ende folgende Relation:

$$r = 0{,}67450 \,.\, m.$$

Setzt man in dieser Formel für m den obigen Werth $(a' - a'')\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so erhalten wir für die vorliegende Betrachtung:

$$r = 0{,}47694 \,.\, (a' - a'').$$

Bei einer zweiten Polygonseite, deren Länge, von der ersten nicht um volle 5 Ruthen verschieden, bei der ersten Seitenmessung zu b' bei der zweiten b'' gefunden wäre, erhielte man:

$$r' = 0{,}47694 \,.\, (b' - b'')$$

bei einer dritten

$$r'' = 0{,}47694 \,.\, (c' - c'').$$

Die Werthe $r\; r'\; r''$ u. s. w. sind völlig unabhängig von einander, sie sind auch gleichförmig entstanden und gleich vertrauenswürdig, auf sie kann daher der Satz vom arithmetischen Mittel angewendet werden. Dadurch erhält man bei n Doppelmessungen, welche sich auf Längen, die nicht mehr als 5 Ruthen von einander verschieden sind, beziehen, den wahrscheinlichsten Werth des wahrscheinlichen Fehlers, welcher mit ϱ bezeichnet werden mag, durch die Formel:

$$\varrho = \frac{r + r' + r'' + \ldots r^{(n-1)}}{n} = \frac{\left((a' - a'') + (b' - b'') + (c' - c') + \ldots\right).\, 0{,}47694}{n}$$

wobei die Addition der Werthe $(a' - a'')$, $(b' - b'')$, $(c' - c'')$ u. s. w., weil zwischen der ersten und zweiten Messung kein wesentlicher Unterschied besteht, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen geschehen muss. Die Resultate dieser Addition für die aufsteigende Anzahl der Kettenlängen sind die Zahlen, welche in den anliegenden Zusammenstellungen mit dem Buchstaben s überschrieben sind. Mit Anwendung dieses Buchstabens ist also:

$$\varrho = \frac{s}{n} \,.\, 0{,}47694.$$

Es kommt jetzt noch darauf an, den wahrscheinlichen Fehler aus Doppelmessungen zu entwickeln, welche sich auf, um mehr als 5 Ruthen verschiedene Polygonseiten beziehen. Um dieses zu können, muss das Gesetz bekannt sein, wonach der wahrscheinliche Fehler bei zunehmender Länge

der gemessenen Linie sich ändert. Nach den Behauptungen der Wahrscheinlichkeitsrechner*) soll der Fehler im Verhältniss der Quadratwurzel aus der Länge der Linie oder genauer aus der Anzahl der Maassstab- oder Kettenlängen steigen. Bei den dessfallsigen Untersuchungen ist einfach angenommen worden, dass eine einmalige Messung einer Linie von n-Kettenlängen für den Zweck der Untersuchung vergleichbar sei mit der n-maligen Messung einer Linie von einer Kettenlänge.

Es würde leicht sein, die wesentliche Verschiedenheit beider Operationen und die Unzulässigkeit jener Voraussetzung nachzuweisen, aber es ist dem Plane der gegenwärtigen Betrachtung angemessener, lediglich die Thatsachen reden zu lassen. Die vorliegenden Beobachtungen sind daher sowohl unter den Gesichtspunkt jenes theoretischen Schlusses, als auch unter den des practischen Gefühls, wonach der Fehler einfach von der Länge der Linie abhängig ist, gestellt worden. Benennt man die Anzahl der in einer gemessenen Linie enthaltenen Maassstab- oder Kettenlängen mit dem Buchstaben a, so ist der wahrscheinliche Fehler der ganzen Linie, wenn der wahrscheinliche Fehler einer Maassstab- oder Kettenlänge $= R$ ist:

I. nach dem theoretischen Satze $= R \,.\, \sqrt{a}$,

II. nach dem practischen Gefühl $= R \,.\, a$,

oder man hat, wenn wie oben der Fehler der ganzen Linie mit ϱ bezeichnet ist, bei der Voraussetzung oder der Hypothese

I. $$R = \frac{\varrho}{\sqrt{a}},$$

II. $$R' = \frac{\varrho}{a},$$

oder wenn der obige Werth von ϱ substituirt wird:

zu I. $$R = \frac{s}{n \,.\, \sqrt{a}} \,.\, 0{,}47694 = \frac{s}{n \,.\, \sqrt{a}} \,.\, K,$$

zu II. $$R' = \frac{s}{n \,.\, a} \,.\, 0{,}47694 = \frac{s}{n \,.\, a} \,.\, K,$$

wo K an die Stelle des constanten Factors 0,47694 gesetzt ist.

Es fragt sich nun, welche von beiden Hypothesen den wirklichen Beobachtungen am besten entspricht.

Da R und R' die wahrscheinlichen Fehler einer Kettenanspannung bedeuten, so müssten, wenn der Seitenmessungen in allen Intervallen hinreichend viele angestellt wären und wenn eine der Voraussetzungen I. oder II. die richtige wäre, von den kürzesten bis zu den längsten der gemessenen Polygonseiten die Ausdrücke $\frac{s}{n \,.\, \sqrt{a}}$ oder $\frac{s}{n \,.\, a}$ unter sich gleiche Werthe ergeben und wenn die Messungen, was offenbar geschehen muss, sämmtlich als zufällig fehlerhaft vorausgesetzt werden, so liegt wenigstens kein Grund vor, dass die Werthe von $\frac{s}{n \,.\, \sqrt{a}}$ oder $\frac{s}{n \,.\, a}$, je nachdem die eine oder die andere Voraussetzung richtig ist, mit der Grösse von a wachsen oder abnehmen. Findet daher bei der einen oder der andern Hypothese ein solches Wachsen oder Abnehmen statt, so kann sie nicht die richtige sein. Erscheint bei beiden Hypothesen ein Wachsen oder Abnehmen, so liegt diejenige der

*) Vergleiche G. Hagens Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, bei F. Dümmler, 1837, Seite 97.

Wahrheit näher, bei welcher jene Veränderlichkeit das kleinste Maass behauptet.

Um zu untersuchen, ob ein Wachsen oder Abnehmen des wahrscheinlichen Fehlers R einer Kettenanspannung mit der Länge der Linie wirklich stattfindet, genügt schon der einfache Weg, aus sämmtlichen von den kürzesten bis zu den längsten Polygonseiten R mit Berücksichtigung der verschiedenen Seitenzahl innerhalb der aufeinander folgenden Intervallen von 5 Ruthen das arithmetische Mittel zu nehmen und dieses von oben bis unten mit den einzelnen R zu vergleichen. Eine solche Vergleichung ist in der anliegenden III. Tabelle angestellt. In der ersten Spalte findet sich die Anzahl der vollen Kettenlängen, welche in den gemessenen Polygonseiten enthalten war (a), in der zweiten die Anzahl der letzteren innerhalb der verschiedenen Intervalle von 5 Ruthen Länge (n), in der dritten die Summe der in die Intervalle gefallenen Differenzen zwischen der ersten und zweiten Seitenmessung $\left((a'-a'')+(b'-b'')+(c'-c'')+\ldots\ldots=s\right)$, in der vierten und achten die Zahlenwerthe für die Ausdrücke $\frac{s}{\sqrt{a}}$ und $\frac{s}{a}$, in der fünften und neunten die Werthe für $\frac{s}{n\,.\sqrt{a}}$ und $\frac{s}{n\,.\,a}$, in der sechsten und zehnten die Unterschiede dieser Werthe gegen ihr mit Rücksicht auf die Anzahl der Seiten gezogenes arithmetisches Mittel. Sind z. B. bei der ersten Hypothese $\frac{s_1}{n_1\,.\sqrt{a_1}}\,.\,K$, $\frac{s_2}{n_2\sqrt{a_2}}\,.\,K$, $\frac{s_3}{n_3\sqrt{a_3}}\,.\,K\ldots\ldots\frac{s_m}{n_m\sqrt{a_m}}\,.\,K$ die aufeinanderfolgenden wahrscheinlichsten Werthe der wahrscheinlichen Fehler für die $n_1, n_2, n_3 \ldots n_m$ Polygonseiten, von der beziehungsweisen Kettenlängenanzahl $a_1, a_2, a_3 \ldots a_m$, so ist das arithmetische Mittel derselben, welches mit M bezeichnet werden mag,

$$M=0{,}47694\,.\left\{\frac{n_1\left(\frac{s_1}{n_1\sqrt{a_1}}\right)+n_2\left(\frac{s_2}{n_2\sqrt{a_2}}\right)+n_3\left(\frac{s_3}{n_3\sqrt{a_3}}\right)+\ldots n_m\left(\frac{s_m}{n_m\sqrt{a_m}}\right)}{n_1+n_2+n_3+\ldots n_m}\right\}$$

d. h.

$$M=0{,}47694\,.\left(\frac{\frac{s_1}{\sqrt{a_1}}+\frac{s_2}{\sqrt{a_2}}+\frac{s_3}{\sqrt{a_3}}+\ldots\ldots\frac{s_m}{\sqrt{a_m}}}{n_1+n_2+n_3+\ldots n_m}\right)$$

Um also dieses arithmetische Mittel zu ziehen, braucht nur die Summe der vierten Zahlenreihe mit der der zweiten Reihe getheilt zu werden. Der Quotient müsste nun mit dem constanten Factor K oder 0,47694 multiplicirt werden. Diese Multiplication ist aber überall unterlassen, weil es ausreichend und bequemer ist, sie nur an dem Endresultat der Zusammenstellung vorzunehmen. Der in der Klammer stehende Werth ist jetzt nur von den einzelnen Werthen $\frac{s_1}{n_1\sqrt{a_1}}$, $\frac{s_2}{n_2\sqrt{a_2}}$, $\frac{s_3}{n_3\sqrt{a_3}}$ u. s. w. algebraisch abzuziehen, um der Reihe nach die in die sechste Spalte einzurückenden Zahlen zu erhalten. Diese Zahlen sind in der Tabelle III. mit dem Buchstaben Δ überschrieben. Schon die Vorzeichen derselben geben ein Hilfsmittel an die Hand, über das Verhalten beider Differenzreihen eine Vermuthung zu entwickeln. Wäre der Wechsel der + und — Zeichen vor den Differenzen Δ und Δ' lediglich dem Zufalle hingegeben, so würde der Wahrscheinlich-

keit nach in der ersten Hälfte der 42 Längen-Intervallen des Sandbodens das Zeichen + oder — ebenso oft vorkommen, als in der zweiten. In der That kommt aber vor:

in der Spalte für Δ	in der Spalte für Δ'
in der ersten Hälfte	in der ersten Hälfte
das Zeichen + ... 8 mal	das Zeichen + ... 10 mal
„ „ — ...... 13 „	„ „ — ...... 11 „
in der zweiten Hälfte	in der zweiten Hälfte
das Zeichen + ... 15 mal	das Zeichen + ... 9 mal
„ „ — ...... 6 „	„ „ — ...... 12 „

Bei der zweiten Hypothese ist also ein Zunehmen der negativen und ein Abnehmen der positiven Differenzen kaum merklich, wogegen bei der ersten Hypothese ein Abnehmen der negativen und ein Zunehmen der positiven Differenzen unverkennbar ist. Die Differenzen Δ' zeigen also eine schwache Neigung zum Sinken, die Δ dagegen eine merklich stärkere Neigung zum Steigen, beides in positivem Sinne gedacht. Um aber das Wesen beider Differenzreihen genauer kennen zu lernen, muss auch die Grösse der einzelnen Differenzen ins Auge gefasst werden. Dieses geschieht am zuverlässigsten, wenn jede Differenz zum Quadrat erhoben, dieses mit der Anzahl der Polygonseiten in dem betreffenden Intervalle multiplicirt wird und alle Producte dieser Art in eine Summe vereinigt werden. Je grösser diese Summe ist, desto weniger stimmen r oder r' mit $\frac{s}{n\sqrt{a}}$ oder $\frac{s}{n\,a}$ überein, desto weniger bewähren sich die Hypothesen I. oder II.

In der siebenten Spalte ist diese Summe gebildet; sie ist

für die Hypothese I.	für die Hypothese II.
0,0171437827	0,0005162644

Diese Resultate zeigen auf den ersten Blick, dass die Hypothese II. der Wahrheit sehr viel näher liegt, als die I. Hypothese. Ganz ähnliche Erscheinungen zeigt die Tabelle III. auch in der Abtheilung für den Kleiboden.

Führte vorhin die Beobachtung des Zeichenwechsels auf die Vermuthung, dass die nach der ersten Hypothese entwickelten wahrscheinlichen Fehler einer Kettenanspannung R_1, R_2, R_3 u. s. w. für die steigende Kettenlängenanzahl (a) steigende, die nach der zweiten Hypothese gefundenen R_1', R_2', R_3' u. s. w. sinkende Werthe haben, so kann nun dieser Erscheinung etwas näher getreten werden, wenn man, um die Untersuchung möglichst einfach zu führen, die neue Hypothese aufstellt, dass jenes Steigen und dieses Sinken, abgesehen von zufälligen Schwankungen, in einer arithmetischen Reihe erfolgen, oder mit andern Worten, wenn der wahrscheinliche Fehler einer Kettenanspannung, welcher eben war:

für die Hypothese I.	für die Hypothese II.
$R = \frac{\varrho}{\sqrt{a}}$	$R' = \frac{\varrho}{a}$

durch eine den Hypothesen I. und II. entsprechende lineare Gleichung von der Form:

$$\frac{\varrho}{\sqrt{a}} = y + \sqrt{a}\,.\,t \qquad\qquad \frac{\varrho}{a} = y' + a\,.\,t'$$

oder — auch hier vorläufig von dem gemeinschaftlichen Factor 0,47694 abgesehen — durch:

$$\frac{s}{n.\sqrt{a}} = y + \sqrt{a}.t \qquad \frac{s}{n.a} = y' + a.t'$$

ausgedrückt wird.

Die Factoren y und t (erstes Glied und Reihendifferenz) sind unbekannt, sie können aber unter dem Princip entwickelt werden, dass die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den wirklichen $\frac{s}{n\sqrt{a}}$ und den $y + \sqrt{a}.t$, $\frac{s}{n.a}$ und den $y' + a.t'$ so klein als möglich sein muss oder wenn man diese Summe für alle a von den kleinsten bis zu den längsten Polygonseiten hinauf mit einer eckigen Klammer andeutet:

$$\left[\left(\frac{s}{n\sqrt{a}} - y - \sqrt{a}.t\right)^2\right] = \text{Minimum}, \quad \left[\left(\frac{s}{na} - y' - at'\right)^2\right] = \text{Minimum},$$

wobei aber doch noch berücksichtigt werden muss, dass die einzelnen Quadrate, welche zu dieser Summe beitragen, verschiedene Zuverlässigkeiten besitzen, je nachdem die Anzahl (n) der Polygonseiten innerhalb eines Intervalls grösser oder geringer ist. Wird auch dieser Umstand berücksichtigt, so gestaltet sich die Bedingung, welcher die Factoren y und t genügen sollen, wie folgt:

$$\left[n.\left(\frac{s}{n.\sqrt{a}} - y - \sqrt{a}\,t\right)^2\right] = \text{Min.} = \Omega; \quad \left[n.\left(\frac{s}{na} - y' - at'\right)^2\right] = \text{Min.} = \Omega'.$$

Differenziirt man diesen Ausdruck zuerst nach y und dann nach t und setzt:

$$\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d\Omega'}{dy'}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d\Omega'}{dt'}\right) = 0,$$

so findet man:

$$\left[\frac{s}{\sqrt{a}}\right] = [n]\,y + [n\sqrt{a}]\,t, \qquad \left[\frac{s}{a}\right] = [n]\,y' + [n\,a]\,t',$$

$$[s] = [n\sqrt{a}]\,y + [n.a]\,t, \qquad [s] = [n.a]\,y' + [n\,a\,a]\,t',$$

wobei die eckigen Klammern die ihnen oben beigelegte Bedeutung behalten. $[n]$ ist also die Anzahl aller gemessenen Polygonseiten, $[n\sqrt{a}]$ die Summe der Producte, welche man erhält, wenn man für jede Gruppe von nicht um 5 Ruthen verschiedenen Polygonseiten die Anzahl der Seiten mit der Quadratwurzel aus der entsprechenden Kettenlängenanzahl multiplicirt, $[na]$ die Summe, wenn statt mit der Quadratwurzel mit der Anzahl der Seiten selbst multiplicirt wird, $[n\,aa]$ die Summe, wenn die Multiplication mit dem Quadrate von a erfolgt; ferner ist s die Summe aller Messungsunterschiede, endlich sind $\left[\frac{s}{\sqrt{a}}\right]$ und $\left[\frac{s}{a}\right]$ die Summen, welche entstehen, wenn man die Fehlersumme jeder Gruppe mit der Quadratwurzel der betreffenden Kettenlangenanzahl, beziehungsweise mit letzterer selbst multiplicirt und die Producte addirt.

Werden diese Ziffern-Operationen vorgenommen, so erhält man:

A. auf dem Sandboden

für die Hypothese I.	für die Hypothese II.
$9{,}6772 = 535\,y + 1982{,}523\,t,$	$2{,}6517 = 535\,y' + 7815\,t',$
$37{,}75 = 1982{,}523\,y + 7815\,t,$	$37{,}75 = 7815\,y' + 146853\,t'.$

Daraus durch Elimination:

$y = + 0{,}0031404,$	$y' = + 0{,}0053964,$
$t = + 0{,}0040336,$	$t' = - 0{,}0000301.$

B. auf dem Kleiboden

$5{,}2706 = 451\,y + 1638{,}025\,t,$	$1{,}4724 = 451\,y' + 6297\,t',$
$19{,}93 = 1638{,}025\,y + 6297\,t,$	$19{,}93 = 6297\,y' + 108377\,t'.$

Daraus durch Elimination:

$y = + 0{,}0034593,$	$y' = + 0{,}0036935,$
$t = + 0{,}0022651,$	$t' = - 0{,}0000307.$

Entspräche eine von den Hypothesen I. oder II. über die Abhängigkeit des wahrscheinlichen Fehlers in der Messung einer Linie von ihrer Länge der Wahrheit genau, so müsste bei den vorstehenden Eliminationen $t = 0$ oder $t' = 0$ zum Vorschein kommen, vorausgesetzt, dass der Messungen so viele sind, um eine Ausgleichung der zufälligen Fehler erwarten zu können. Diejenige Hypothese also liegt der Wahrheit näher, bei welcher t oder t' den kleinsten Werth hat.

Nun ist auf dem Sandboden:

$$t = + 0{,}0040336$$
$$t' = - 0{,}0000301$$

auf dem Kleiboden:

$$t = + 0{,}0022651$$
$$t' = - 0{,}0000307$$

Die zweite Hypothese liegt also der Wahrheit bedeutend näher, als die zweite. Der Factor t' in der obigen Formel:

$$\frac{\varrho}{a} = y' + at'$$

$$\text{oder } \varrho = a\,.\,y' + aat'$$

ist so gering, dass er für gewöhnliche Rechnungen $= 0$ gesetzt werden kann. Für solche Rechnungen bestätigt sich daher der, den bestehenden landesherrlichen Verordnungen zu Grunde liegende Satz:

„Der bei der Messung einer geraden Linie zu befürchtende Fehler „ist ihrer Länge proportional.“

Für schärfere Rechnungen würden wir zu setzen haben:

$$\varrho = ay' + aat'$$

und nach Substitution der für y' und t' gefundenen Werthe hätte man:

auf dem Sandboden: $\varrho = 0{,}0053964\,a - 0{,}0000301\,a^2$

auf dem Kleiboden: $\varrho = 0{,}0036935\,a - 0{,}0000307\,a^2$

oder endlich, wenn die bisher unterbliebene Multiplication mit $0{,}47694$ jetzt nachgeholt wird, so finden wir den wahrscheinlichen Fehler in der einmaligen Messung einer Linie von a Kettenlängen:

auf dem Sandboden $= 0{,}0025737\,a - 0{,}0000144\,a^2$

auf dem Kleiboden $= 0{,}0017616\,a - 0{,}0000146\,a^2$

oder von einer Kettenlänge:

auf dem Sandboden $= 0{,}0025737 - 0{,}0000144\,a$

auf dem Kleiboden $= 0{,}0017616 - 0{,}0000146\,a.$

Wenn, um noch einmal auf die weniger strengen Rechnungen zurückzukommen, $t' = 0$ gesetzt wird, so muss zur bessern Ausgleichung für y', welches der Länge einer Linie von einer Kettenlänge gegenübersteht, das

mittlere y oder der in der dritten Tabelle gefundene Werth $\frac{\left[\frac{s}{a}\right]}{[n]}$ an die Stelle gesetzt werden, wie er sich aus den ersten der obigen Normalgleichungen:

$$\frac{\left[\frac{s}{a}\right]}{[n]} = [n]\, y' + [n a]\, t'$$

unmittelbar ergiebt, wenn darin $t' = 0$. Man hat daher

auf dem Sandboden = 0,0049576
auf dem Kleiboden = 0,0032647;

beide mit 0,47694 multiplicirt:

auf dem Sandboden = 0,0023645
auf dem Kleiboden = 0,0015571.

Diese wahrscheinlichen Fehler einer Kettenlänge sind in Ruthen ausgedrückt.

Sollen sie sich nicht auf die fünfruthige Kette, sondern auf eine Ruthe beziehen, so müssen vorstehende Zahlen mit 5 getheilt werden. Es ist dann der wahrscheinliche Fehler einer Ruthen-Ausspannung:

auf dem Sandboden = 0,0004729 = $\frac{1}{2114}$
auf dem Kleiboden = 0,0003114 = $\frac{1}{3211}$
im ganzen Amte Reckenberg = 0,0003990 = $\frac{1}{2506}$.

Nach der Kataster-Instruction ist die äusserste Fehlergrenze = $\frac{1}{300}$ = 0,00333 . . .; sie ist also

auf dem Sandboden das 7fache des wahrscheinlichen Fehlers,
auf dem Kleiboden das 10fache des wahrscheinlichen Fehlers.

Nun ist aber nach der Wahrscheinlichkeits Rechnung unter 100000 Fällen nur 1 Fall zu fürchten, wo der wirkliche Fehler den wahrscheinlichen Fehler um das $6\frac{1}{2}$ fache übersteigt; mithin ist ein solcher Fall bei der Vorsicht, welche im Amte Reckenberg aufgewendet wurde, unter den 986 Doppelmessungen oder 1972 Einzelmessungen nicht zu fürchten. Zwar kommt auf dem Kleiboden bei einer Polygonseite von 105 Ruthen ein Unterschied von 0,45 Ruthen zwischen der ersten und zweiten Seitenmessung vor, aber einer dieser Messungen kann doch nach dem Obigen nur ein wahrscheinlicher Fehler von $\frac{(a' - a'') \cdot 0{,}47694}{a} = \frac{0{,}45}{105} \cdot 0{,}47694 = 0{,}002044$ der noch merklich unterhalb 0,00333 . . . liegt, zugeschrieben werden.

Da die vorliegende Erfahrung dem auf theoretischem Wege entwickelten Satze, dass der wahrscheinliche Fehler in der Messung einer Linie dem Producte aus dem wahrscheinlichen Fehler einer Kettenanlegung und der Quadratwurzel aus der Anzahl dieser Anlegungen gleich sei, widerspricht, vielmehr die Annahme des practischen Gefühls, dass der wahrscheinliche Fehler der ganzen Linie dem Producte aus dem wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Kettenanlegung und der Anzahl der letzteren selbst gleich sei, bis auf eine für gewöhnliche Arbeiten unerhebliche Abweichung bestätigt, so rechtfertigt sich dadurch zugleich das überall übliche praktische Verfahren, wonach der Fehler, welcher am Endpuncte einer Messungslinie bemerkt wird, auf die etwa in ihr vorkommenden Abschnitte einfach im Verhältniss der Abstände vom Anfangspuncte zur ganzen Länge vertheilt wird.

I. Zusammenstellung der Differenzen zwischen je zwe
bestehenden Thei

Anzahl der Kettenlängen a	Anzahl der Polygonseiten n	Aggregat der Differenzen s Ruthen.	Anzahl der Differenzen nach V																					
			0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,2
3	2	0,03	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	2	0,05	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	17	0,41	4	3	3	2	1	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	19	0,86	.	1	4	3	3	4	1	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	28	1,09	1	5	5	2	4	3	3	3	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	38	1,89	1	2	7	9	.	6	3	2	1	4	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
9	43	2,00	3	6	6	6	4	5	2	3	2	1	.	1	1	2	.	.	1	.	.	.	.	.
10	33	1,51	2	6	4	5	2	4	2	1	.	2	3	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.
11	33	1,58	4	1	4	2	6	6	1	4	1	1	2	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
12	39	2,13	5	3	4	2	5	4	3	5	.	2	1	.	1	1	1	.	.	.	2	.	.	.
13	41	2,59	1	6	.	7	4	6	2	1	2	4	.	2	2	.	1	.	.	1	.	2	.	.
14	34	2,14	2	2	.	10	1	2	5	3	1	1	2	1	1	.	.	.	.	1	.	1	.	1
15	30	2,28	2	2	1	1	5	3	1	3	2	1	1	.	2	.	.	1	2	2	.	1	.	.
16	19	1,16	3	1	2	.	2	1	2	2	.	1	2	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.
17	18	1,40	2	1	2	.	3	.	.	1	1	.	.	.	3	1	1	3	.	.	.	.	.	.
18	16	1,17	3	1	.	.	1	4	.	1	1	.	.	.	.	2	.	1	.	1	.	1	.	.
19	15	1,24	.	1	2	1	2	1	.	1	1	.	.	1	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.
20	13	1,58	.	.	.	1	.	1	2	.	1	1	1	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
21	15	1,72	1	2	1	.	.	2	.	.	.	.	.	2	1	2	.	.	.	.	.	1	.	1
22	11	1,19	.	.	.	.	1	1	2	.	.	1	2	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.
23	8	1,14	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
24	6	0,56	.	1	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	3	0,22	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
26	8	0,58	2	.	.	1	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
27	4	0,37	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
28	6	0,99	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.
29	6	0,75	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.
30	4	0,35	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
31	3	0,63	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
32	3	0,44	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
33	1	0,02	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
34	4	0,40	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
35	2	0,51	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36	1	0,19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
37	1	0,35	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
39	1	0,40	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
42	3	0,51	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
43	1	0,19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
46	1	0,33	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
47	1	0,38	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
50	1	0,30	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
62	1	0,34	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1029	535	37,75	39	48	49	56	49	60	32	32	15	23	18	16	14	13	8	9	5	7	3	11	1	[illegible]

ssungen der Polygonseiten in dem aus Sandboden s Amtes Reckenberg.

iedenheit ihrer Grösse geordnet.																							$\frac{s}{\sqrt{a}}$	$\frac{s}{a}$
0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	Ruthen.	Ruthen.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0173	0,0100
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0250	0,0125
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,1833	0,0820
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,3511	0,1433
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,4120	0,1557
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,6682	0,2363
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,6667	0,2222
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,4775	0,1510
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,4764	0,1436
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,6149	0,1775
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,7183	0,1992
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,5710	0,1527
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,5887	0,1520
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,2899	0,0725
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,3396	0,0824
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,2758	0,0650
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,2845	0,0652
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	0,3533	0,0790
.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,3754	0,0819
.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,2537	0,0541
.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,2377	0,0496
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	0,1143	0,0233
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0440	0,0088
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,1137	0,0223
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0712	0,0137
.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,1871	0,0354
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,1393	0,0258
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0639	0,0117
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	0,1131	0,0203
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0778	0,0137
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0035	0,0006
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0686	0,0118
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0456	0,0077
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0350	0,0058
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0575	0,0095
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	0,0640	0,0103
1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0787	0,0121
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0290	0,0044
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0487	0,0072
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	0,0554	0,0081
.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0424	0,0060
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0432	0,0055
3	1	.	.	2	3	.	2	.	1	2	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	1	9,6772	2,6517

II. Zusammenstellung der Differenzen zwischen je zwe
bestehenden Theil

Anzahl der Kettenlängen a	Anzahl der Polygonseiten n	Aggregat der Differenzen s Ruthen.	Anzahl der Differenzen nach Ve																				
			0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	[illegible]
1	1	0,00	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	1	0,01	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	11	0,21	3	1	3	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	10	0,16	2	4	2	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	15	0,29	4	2	5	1	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	30	0,67	6	6	8	3	4	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	37	1,15	6	8	5	3	3	6	1	3	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	29	0,69	11	3	5	3	1	3	.	.	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	31	1,11	7	3	3	3	4	3	3	1	1	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	21	0,70	5	3	4	1	1	2	1	.	2	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	28	1,09	6	1	2	4	4	6	1	.	.	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	28	1,34	6	2	1	3	1	5	3	.	1	.	5	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
14	26	1,28	1	3	.	3	3	10	1	2	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
15	26	1,31	4	1	1	1	3	7	4	1	.	.	2	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.
16	28	1,23	7	2	2	1	3	4	2	1	1	.	4	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
17	25	1,21	5	2	3	.	2	3	2	1	2	2	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
18	11	0,05	.	1	.	2	.	2	.	.	1	.	1	.	2	.	.	.	1	.	.	.	1	.
19	8	0,32	1	.	2	1	.	1	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	11	0,72	4	.	.	.	.	3	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.
21	13	1,03	2	.	2	3	.	2	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
22	9	0,51	2	1	1	1	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	12	0,87	.	.	2	1	1	1	2	1	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.
24	5	0,48	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.
25	2	0,11	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
26	6	0,57	1	.	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
27	5	0,30	.	2	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
28	3	0,16	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	6	0,32	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
30	2	0,15	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
32	4	0,40	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
34	2	0,15	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
35	4	0,43	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
43	1	0,01	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
606	451	19,93	86	51	53	37	34	67	25	14	12	8	34	2	6	3	2	6	2	1	2	.	3	

Messungen der Polygonseiten in dem aus Kleiboden des Amtes Reckenberg.

Verschiedenheit ihrer Grösse geordnet.																								$\frac{s}{\sqrt{a}}$ Ruthen.	$\frac{s}{a}$ Ruthen.
0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0000	0,0000
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0071	0,0050
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,1050	0,0525
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0701	0,0320
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,1184	0,0483
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,2532	0,0957
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,4066	0,1438
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,2300	0,0767
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,3510	0,1100
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,2111	0,0636
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,3146	0,0908
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,3716	0,1031
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,3421	0,0914
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,3382	0,0873
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,3075	0,0769
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,2934	0,0712
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,2239	0,0528
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0734	0,0168
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,1610	0,0360
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	0,2248	0,0490
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,1087	0,0232
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,1814	0,0378
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0980	0,0200
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0220	0,0044
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,1118	0,0219
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0577	0,0111
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0302	0,0057
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0597	0,0110
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0274	0,0050
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0707	0,0125
.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0257	0,0044
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0727	0,0123
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0015	0,0002
1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	5,2705	1,4724

III. Vergleichung des mittleren Werthes des wahrsch den einzelnen In

Sandboden.

a	n	s	$\frac{s}{\sqrt{a}}$	$\frac{s}{n.\sqrt{a}}$	$\frac{s}{n.\sqrt{a}} - M = \triangle$	$n \triangle \triangle$	$\frac{s}{a}$	$\frac{s}{n.a}$	$\frac{s}{n.a} - M' = \triangle'$	$n \triangle'$
3	2	0,03	0,0173	0,00866	−0,00943	0,0001778498	0,0100	0,00500	+0,00004	0,00000
4	2	0,05	0,0250	0,01250	−0,00559	624962	0,0125	0,00625	+0,00129	.....
5	17	0,41	0,1833	0,01078	−0,00731	9084137	0,0820	0,00482	−0,00014	.....
6	19	0,86	0,3511	0,01848	+0,00039	28899	0,1433	0,00752	+0,00256	12
7	28	1,09	0,4120	0,01471	−0,00338	3198832	0,1557	0,00556	+0,00060	1
8	38	1,89	0,6682	0,01759	−0,00050	95000	0,2363	0,00621	+0,00125	5
9	43	2,00	0,6667	0,01550	−0,00259	2884483	0,2222	0,00517	+0,00021	.....
10	33	1,51	0,4775	0,01447	−0,00362	4324452	0,1510	0,00458	−0,00038	.....
11	33	1,58	0,4764	0,01444	−0,00365	4396425	0,1436	0,00435	−0,00061	1
12	39	2,13	0,6149	0,01577	−0,00232	2099136	0,1775	0,00455	−0,00041	.....
13	41	2,59	0,7183	0,01752	−0,00057	133209	0,1992	0,00486	−0,00010	.....
14	34	2,14	0,5719	0,01640	−0,00169	971074	0,1527	0,00449	−0,00047	.....
15	30	2,28	0,5887	0,01962	+0,00153	702270	0,1520	0,00507	+0,00011	.....
16	19	1,16	0,2899	0,01526	−0,00283	1521691	0,0725	0,00381	−0,00115	2
17	18	1,40	0,3396	0,01886	+0,00077	106722	0,0824	0,00458	−0,00038	.....
18	16	1,17	0,2758	0,01756	−0,00053	44944	0,0650	0,00406	−0,00090	1
19	15	1,24	0,2845	0,01896	+0,00087	113535	0,0652	0,00435	−0,00061	.....
20	13	1,58	0,3533	0,02718	+0,00909	...10741653	0,0790	0,00607	+0,00111	1
21	15	1,72	0,3754	0,02502	+0,00693	7203735	0,0819	0,00546	+0,00050	.....
22	11	1,19	0,2537	0,02306	+0,00497	2717099	0,0541	0,00192	−0,00004	.....
23	8	1,14	0,2377	0,02971	+0,01162	...10801952	0,0496	0,00620	+0,00124	1
24	6	0,56	0,1143	0,01905	+0,00096	55296	0,0233	0,00389	−0,00107	.....
25	3	0,22	0,0440	0,01457	−0,00352	371712	0,0088	0,00293	−0,00203	1
26	8	0,58	0,1137	0,01422	−0,00387	1198152	0,0223	0,00279	−0,00217	3
27	4	0,37	0,0712	0,01780	−0,00029	3364	0,0137	0,00343	−0,00153	.....
28	6	0,99	0,1871	0,03118	+0,01309	...10280886	0,0354	0,00589	+0,00093	.....
29	6	0,75	0,1393	0,02321	+0,00512	1572864	0,0258	0,00431	−0,00065	.....
30	4	0.35	0,0639	0,01598	−0,00211	178084	0,0117	0,00292	−0,00204	1
31	3	0,63	0,1131	0,03772	+0,01963	...11560107	0,0203	0,00677	+0,00151	.....
32	3	0,44	0,0778	0,02590	+0,00781	1829883	0,0137	0,00457	−0,00039	.....
33	1	0,02	0,0035	0,00356	−0,01453	2111209	0,0006	0,00061	−0,00435	1
34	4	0,40	0,0686	0,01715	−0,00094	35344	0,0118	0,00294	−0,00202	1
35	2	0,27	0,0456	0,02282	+0,00473	447458	0,0077	0,00386	−0,00110	.....
36	1	0,21	0,0350	0,03500	+0,01691	2859481	0,0058	0,00583	+0,00087	.....
37	1	0,35	0,0575	0,05754	+0,03945	...15563025	0,0095	0,00946	+0,00450	2
39	1	0,40	0,0640	0,06405	+0,04596	...21123216	0,0103	0,01026	+0,00530	2
42	3	0,51	0,0787	0,02623	+0,00814	1987788	0,0121	0,00405	−0,00091	.....
43	1	0,19	0,0290	0,02898	+0,01089	1185921	0,0044	0,00442	−0,00054	.....
46	1	0,33	0,0487	0,04865	+0,03056	9339136	0,0072	0,00717	+0,00221	.....
47	1	0,38	0,0554	0,05543	+0,03734	...13942756	0,0081	0,00809	+0,00313	.....
50	1	0,30	0,0424	0,04243	+0,02434	5924356	0,0060	0,00600	+0,00104	1
62	1	0,34	0,0432	0,04318	+0,02509	6295081	0,0055	0,00548	+0,00052	.....
1029	535	37,75	9,6772	: 535=0,01800		0,0171437827	2,6517	: 535=0,00496		0,000516

ıen Fehlers mit den wahrscheinlichen Fehlern aus
len von 5 Ruthen.

Kleiboden.									
n	s	$\frac{s}{\sqrt{a}}$	$\frac{s}{n.\sqrt{a}}$	$\frac{s}{n.\sqrt{a}} - M = \triangle$	$n \triangle \triangle$	$\frac{s}{a}$	$\frac{s}{n.a}$	$\frac{s}{n.a} - M' = \triangle'$	$n \triangle' \triangle'$
1	0,00	0,0000	0,00000	−0,01168	0,0001364224	0,0000	0,00000	−0,00326	0,0000106276
1	0,01	0,0071	0,00710	−0,00458	209764	0,0050	0,00500	+0,00174	12876
11	0,21	0,1050	0,00955	−0,00213	499059	0,0525	0,00477	+0,00151	250811
10	0,16	0,0701	0,00701	−0,00467	2180890	0,0320	0,00320	−0,00006	360
15	0,29	0,1184	0,00789	−0,00379	2154615	0,0483	0,00322	−0,00004	240
30	0,67	0,2532	0,00844	−0,00324	3149280	0,0957	0,00319	−0,00007	1470
37	1,15	0,4066	0,01099	−0,00069	176157	0,1438	0,00389	+0,00063	146853
29	0,69	0,2300	0,00793	−0,00375	4078125	0,0767	0,00265	−0,00061	107909
31	1,11	0,3510	0,01132	−0,00036	40176	0,1100	0,00355	+6,00029	26071
21	0,70	0,2111	0,01005	−0,00163	557949	0,0636	0,00303	−0,00023	11109
28	1,09	0,3146	0,01124	−0,00044	54208	0,0908	0,00324	−0,00002	112
28	1,34	0,3716	0,01327	+0,00159	707918	1,1031	0,00368	+0,00042	49394
26	1,28	0,3421	0,01316	+0,00148	579504	0,0914	0,00352	+0,00026	17576
26	1,31	0,3382	0,01301	+0,00133	459914	0,0873	0,00336	+0,00010	2600
28	1,23	0,3075	0,01098	−0,00070	137200	0,0769	0,00275	−0,00051	72828
25	1,21	0,2934	0,01174	+0,00006	900	0,0712	0,00285	−0,00041	42025
11	0,95	0,2239	0,02035	+0,00867	8268579	0,0528	0,00480	+0,00154	260876
8	0,32	0,0734	0,00918	−0,00250	500000	0,0168	0,00210	−0,00116	107648
11	0,72	0,1610	0,01464	+0,00296	963776	0,0360	0,00327	+0,00001	11
13	1,03	0,2248	0,01729	+0,00561	4091373	0,0490	0,00377	+0,00051	33813
9	0,51	0,1087	0,01201	+0,00033	9801	0,0232	0,00258	−0,00068	41616
12	0,87	0,1814	0,01512	+0,00344	1420032	0,0378	0,00315	−0,00011	1452
5	0,48	0,0980	0,01960	+0,00792	3136320	0,0200	0,00400	+0,00074	27380
2	0,11	0,0220	0,01100	−0,00068	9248	0,0044	0,00220	−0,00106	22472
6	0,57	0,1118	0,01863	+0,00695	2898150	0,0219	0,00365	+0,00039	9126
5	0,30	0,0577	0,01154	−0,00014	980	0,0111	0,00222	−0,00104	54080
3	0,16	0,0302	0,01007	−0,00161	77763	0,0057	0,00190	−0,00136	55488
6	0,22	0,0597	0,00995	−0,00173	179574	0,0110	0,00183	−0,00143	122694
2	0,15	0,0274	0,01370	+0,00202	81608	0,0050	0,00250	−0,00076	11552
4	0,40	0,0707	0,01768	+0,00600	1440000	0,0125	0,00312	−0,00014	784
2	0,15	0,0257	0,01285	+0,00117	27378	0,0044	0,00220	−0,00106	22472
4	0,43	0,0727	0,01818	+0,00650	1490000	0,0123	0,00308	−0,00018	1296
1	0,01	0,0015	0,00150	−0,01018	1036324	0,0002	0,00020	−0,00306	93636
451	19,93	5,2705 : 451	=0,01168		0,0041980789	1,4724 : 451	=0,00326		0,0001714904

X.

Die Erscheinungen der Fluorescenz oder der inneren Dispersion.

Von WITZSCHEL.

I. Von der Fluorescenz im Allgemeinen.

Die von John Herschel an einer Lösung schwefelsauren Chinins, sowie von David Brewster an der alkoholischen Lösung des grünen Farbstoffs der Blätter und am Flussspath zuerst entdeckten eigenthümlichen Farbenerscheinungen sind der Ausgangspunkt einer Reihe beachtenswerther Untersuchungen über eine besondere Classe optischer Phänomene geworden, welche im Ganzen genommen auf eine Veränderung der Brechbarkeit des Lichts unter gewissen Umständen hinauslaufen und zuerst mit dem Namen innere (epipolische) Dispersion, sodann mit Fluorescenz belegt worden sind. Eine Zusammenstellung der wichtigsten dahin gehörigen Erscheinungen und der Resultate der darüber angestellten Untersuchungen dürfte daher für die Leser unserer Zeitschrift, welche von den darauf bezüglichen Mittheilungen nähere Kenntniss zu nehmen nicht Zeit und Gelegenheit gehabt haben, nicht unwillkommen sein.

Stellt man eine Auflösung von schwefelsaurem Chinin (etwa auf 100 Gramm Wasser eine Messerspitze schwefels. Chinin, wozu noch 3—4 Tropfen Schwefelsäure hinzugesetzt werden) in einem cylinderförmigen (Probir-) Glase gegen die einfallenden Lichtstrahlen, und betrachtet die farblose durchsichtige Flüssigkeit von oben herab, so sieht man an der Seite des einfallenden Lichts, da wo die Flüssigkeit das Glas berührt, eine dünne Schicht von himmelblauer Farbe. Wird dabei directes Sonnenlicht angewendet, so rückt ein blauer Schein noch etwas weiter in die Flüssigkeit hinein. Eine eigenthümliche Färbung eines Theiles der Flüssigkeit tritt hervor, wenn man nach Brewsters Vorgange mittelst einer Sammellinse von kurzer Brennweite ein verdichtetes Bündel Licht in der Flüssigkeit concentrirt, indem man die Linse so stellt, dass ihr Brennpunkt etwas tiefer in die Flüssigkeit zu liegen kommt. Man erblickt dann einen Lichtkegel von himmelblauer Farbe in der farblosen durchsichtigen Flüssigkeit. Wird derselbe Versuch mit der alkoholischen Lösung des grünen Farbestoffs der Blätter angestellt, so ist der in die Flüssigkeit fallende Lichtkegel durch eine blutrothe Farbe ausgezeichnet, welcher gegen das Grün der übrigen Lösung auffallend absticht. Wie diese zeigen noch eine grosse Zahl von Auflösungen grösstentheils pflanzlicher Stoffe, deren in der Folge zum Theil Erwähnung gethan

werden soll, in besondern Richtungen betrachtet eine ungewöhnliche Färbung. Man hat diese Eigenschaft in der Folge nach dem Vorgange von Stokes mit dem Namen „Fluorescenz“ belegt, weil an einer gewissen Sorte von (grünem) Flussspath dieselbe mit beobachtet worden ist, und hat diesen (Trivial-) Namen demjenigen „innere Dispersion“ vorgezogen, weil er mehr als letzterer frei ist von irgend einer Andeutung theoretischer Erklärung der angezogenen Erscheinung.

Es lag der Gedanke nahe, dass der blaue oder rothe Lichtkegel in den erwähnten Lösungen von besonderen Theilchen, welche daselbst in der Schwebe gehalten würden, herrühre. Bei näherer Untersuchung fand sich indess, dass das dispergirte Licht grossentheils unpolarisirt war, während doch zu erwarten stand, dass ein von suspendirten Theilchen reflectirtes Licht als durch Reflexion polarisirt erscheinen würde. Es zeigten sich allerdings nicht selten Spuren von Polarisation, eine schärfere Betrachtung ergab aber, dass dieses polarisirte Licht wirklich von schwebenden Theilchen reflectirt war, dass dagegen das eigentliche dispergirte Licht ohne Polarition ist.

Zur Bestimmung des eigentlichen Wesens der Fluorescenz ist die gleichfalls von J. Herschel gemachte Beobachtung nicht unwichtig, dass das Licht, nachdem es die blaue Färbung oder überhaupt die Fluorescenz hervorgebracht hat, unfähig geworden ist, in einem zweiten Medium dieselbe Erscheinung hervorzurufen, also insofern eine qualitative Veränderung erlitten haben muss. J. Herschel nannte deshalb ein Licht, welches diese Veränderung seiner Beschaffenheit zeigte, epipolisirt.

Die ausgedehntesten und sorgfältigsten Untersuchungen über diese und einige damit verwandte Erscheinungen hat George Stokes, Professor der Mathematik zu Cambridge, angestellt.*) Derselbe prüfte zunächst das letzterwähnte Resultat von J. Herschel durch mehrere Versuche, welche ihn zugleich auf die eigentliche Natur der Fluorescenz führten. Da ihm die Polarisation des Lichts in keiner Weise Anhaltepunkte zur Erklärung dieses optischen Phänomens gab, vielmehr jede darauf gegründete Hypothese zu Widersprüchen führte, nahm er an, dass der Vorgang in einer Veränderung der Brechbarkeit des Lichts bestehe, eine Hypothese, welche allerdings auch den bisherigen Ansichten über die Brechbarkeit des Lichts entgegen war, aber gegen andere Erklärungsweisen gehalten immer noch die einfachste blieb. Er nahm an, dass die unsichtbaren, jenseits des äussersten Violett liegenden Strahlen des zusammengesetzten weissen Lichts in den erwähnten Flüssigkeiten Anlass geben zu anderen Strahlen von niederer Brechbarkeit, so dass diese dann zwischen den Brechbarkeitsgrenzen liegen, innerhalb welcher die Netzhaut des Auges erregt werden kann; oder mit anderen Worten, dass die fluorescirenden Flüssigkeiten die Eigenschaft haben, die Brechbarkeit der Lichtstrahlen zu erniedrigen, dass also beispielsweise durch eine Lösung von schwefelsaurem Chinin die nicht sichtbaren, ultravioletten Strahlen in weniger brechbare blaue Strahlen verwandelt und somit dem Auge sichtbar werden. Warum in der genannten Flüssigkeit nur eine dünne Schicht von himmelblauer Farbe an der Seite der einfallenden Lichtstrahlen sichtbar ist, erklärt er durch eine gewisse Opacität der Flüssigkeit für die unsichtbaren Strahlen, obgleich dieselbe trans-

---

*) Phil. Transact. f. 1852 p. 463, 1853 p. 385. Poggend. Ann. Ergänz. Bd. IV S. 177. Bd. 96 S. 522. Erstere Abhandl. auszugsweise in Bd. 87 S. 480.

parent ist für die sichtbaren. Der Uebergang von der vollkommneren Transparenz zur völligen Opacität würde die Strahlen von zwischenliegender Brechbarkeit betreffen, welche dann den weiter in die Flüssigkeit reichenden blauen Schein oder den durch eine Linse hervorgebrachten (von Brewster beobachteten) blauen Lichtkegel erzeugen könnten. Folgende von Stokes angestellten Versuche bestätigten seine Ansichten vollkommen.

In ein dunkles Zimmer wurde durch ein Loch im Fensterladen Licht in horizontaler Richtung reflectirt. In dem Loche war eine Linse von kürzerer Brennweite angebracht, vor welche ein Probirglas mit der Chininlösung vertikal in einem solchen Abstande von derselben aufgestellt wurde, dass der Brennpunkt etwas innerhalb der Flüssigkeit fiel. Auf diese Weise kam sowohl die zuerst genannte schmale blaue Schicht oder Zone, als auch der zuletzt erwähnte blaue Lichtkegel zum Vorschein. Als er hierauf von mehreren verschiedenfarbigen Gläsern das eine bald zwischen das einfallende Licht und die Flüssigkeit stellte, bald zwischen die Flüssigkeit und das Auge hielt, bemerkte er sehr bald die qualitative Verschiedenheit des einfallenden und des in der Flüssigkeit erzeugten Lichts, sowie dass unter der Wirkung eines und desselben farbigen Glases der längere blaue Lichtkegel und die schmale blaue Schicht sich nicht gleich verhielten. Unter den Farbengläsern befand sich ein blassrauchfarbenes, welches, wenn es zwischen das einfallende Licht und die Flüssigkeit gestellt wurde, den blauen Kegel verschwinden liess; wurde es dagegen zwischen die Flüssigkeit und das Auge gehalten, so konnte durch dasselbe der Kegel sehr gut gesehen werden, nur war die Farbe desselben etwas verändert, mehr weisslich geworden. Ein anderes Glas von Flohfarbe zeigte das entgegengesetzte Verhalten; zwischen die Linse und die Flüssigkeit gestellt liess es den Kegel in der Flüssigkeit wie früher entstehen, absorbirte ihn aber, wenn es vor das Auge gehalten wurde. Diese Versuche ergaben deutlich, dass das einfallende und das fluorescirende Licht von ein und demselben Farbenglase verschiedenartig afficirt wird. Da nun die absorbirende Wirkung eines farbigen Glases darin besteht, dass ein gewisser Theil der verschieden brechbaren Strahlen aufgefangen und nur gewisse Strahlen, deren Brechbarkeit innerhalb engerer Grenzen liegt, hindurchgelassen werden, so weist das verschiedene Verhalten des einfallenden und fluorescirenden Lichts hinter demselben oder hinter verschiedenen farbigen Gläsern auf eine Veränderung in der Brechbarkeit hin. Der folgende ebenfalls von Stokes angestellte (Fundamental-) Versuch ist noch entscheidender.

Durch eine senkrechte Spalte im Fensterladen eines dunklen Zimmers reflectirte er das Sonnenlicht horizontal, leitete es durch drei dicht hinter einander aufgestellte Flintglasprismen (jedes ziemlich in der Lage der Minimum-Ablenkung) und erzeugte so in einem Abstande von einigen Fussen von der Spalte ein reines Farbenspectrum in horizontaler Richtung. Ein Reagenzglas mit einer Auflösung von schwefelsaurem Chinin stellte er nun zunächst jenseits des äussersten Roth des Spectrums auf und führte es sodann in senkrechter Haltung durch die einzelnen Farben desselben hindurch. Bei dieser Wanderung fast entlang des ganzen sichtbaren Spectrums zeigte sich nichts Auffallendes, indem die farbigen Strahlen des Spectrums durch die Lösung wie durch bloses Wasser hindurchgingen. Als er jedoch mit dem Glase ziemlich bis an das äusserste Violett gekommen war, erschien auf einmal ein Schein von blauem Licht in demselben. Wurde dasselbe noch weiter in derselben Richtung fortgeführt, so nahm das blaue

Licht zuerst an Intensität zu, hierauf wieder ab und verschwand nach und nach ganz, indem es sich auf eine immer dünnere Schicht der Flüssigkeit an der Seite des einfallenden Lichts zurückzog, während bei seinem ersten Auftreten kurz vor dem äussersten Violett es sich durch die ganze Flüssigkeit auf einmal verbreitet hatte. Das Verschwinden fand erst an einer Stelle statt, welche weit über das violette Ende des sichtbaren Spectrums hinauslag. Stokes äussert sich unter dem Eindrucke dieser höchst interessanter Erscheinung folgendermassen: „Gewiss war es ein sonderbarer Anblick, die Röhre beim Eintauchen in die unsichtbaren (ultravioletten) Stralen augenblicklich erleuchtet zu sehen; es war buchstäblich sichtbare Dunkelheit; die Erscheinung hatte etwas Ueberirdisches (*something of an unearthly appearance*)."

Dass die Flüssigkeit hierbei auf die Strahlen von äusserster Brechbarkeit eine der farbigen Gläser analoge Wirkung ausübt, wurde durch folgende Abänderung des Versuchs noch dargethan. Die Spalte wurde mit einem tief blauen Glase bedeckt und hinter dasselbe zuerst ein Glas mit Wasser gesetzt. Betrachtete er so die Spalte durch ein Prisma, so konnte er in Folge der gewöhnlichen Brechung des Lichts noch etwas über die brechbarere Linie der im Violetten befindlichen Doppelgruppe *H* sehen. Wurde aber das Wasser im Glase durch eine Lösung schwefelsauren Chinins ersetzt, so erschien zunächst der blaue fluorescirende Lichtstreifen in derselben und bei Betrachtung der Spalte durch das Prisma fand er das Spectrum schon zwischen den Linien *G* und *H* abgeschnitten und zwar ziemlich scharf, was eine rasche Zunahme der Absorptionskraft der Flüssigkeit für die brechbareren Strahlen an dieser Stelle des Spectrums beweist. Lichtstrahlen demnach, welche durch eine Chininlösung (und ebenso durch eine andere fluorescirende Flüssigkeit) gegangen sind und welche von J. Herschel zuerst epipolisirtes Licht genannt wurden, sind von den stärker brechbaren Strahlen des Spectrums gereinigt, und weil letztere wieder nur vorzugsweise die Fähigkeit haben, die Fluorescenz zu erzeugen, in Folge dessen unfähig geworden, dieselbe Erscheinung in einer zweiten dafür empfindlichen Flüssigkeit hervorzubringen.

Man kann den Vorgang hierbei auch so ansehen, dass die in die fluorescirende Flüssigkeit eindringenden (brechbaren) Lichtstrahlen dieselbe bis zu einer gewissen Tiefe leuchtend (zum Theil zu einem in einer besonderen Farbe selbstleuchtenden Körper) machen, die je nach der Natur der fluorescirenden Flüssigkeit verschieden sein kann. Im Allgemeinen wird bei einer Flüssigkeit von grösserer fluorescirender Kraft der leuchtende Theil tiefer eindringen. Haben aber die einfallenden Lichtstrahlen eine Flüssigkeitsschicht zu durchdringen, die dicker ist, als die Tiefe, bis zu welcher sie leuchtend erscheint, so können die übrigen durchgehenden Lichtstrahlen keine Fluorescenz in einer zweiten dazu empfindlichen Flüssigkeit hervorbringen.

Folgender Versuch wird die obigen Beobachtungen bestätigen und die Natur des eigenthümlichen Vorganges von einer etwas anderen Seite erklären. Wird in einem dunklen Zimmer das Farbenspectrum auf der längeren Seitenwand eines parallelepipedischen Glasgefässes, das mit einer fluorescirenden Flüssigkeit, z. B. mit schwefelsaurer Chininlösung gefüllt ist, aufgefangen, so sieht man die weniger brechbaren Strahlen ungehindert wie durch Wasser durch die Flüssigkeit hindurchgehen; erst im Blau beginnt die Dispersion, man erblickt dann einen Farbenstreifen von zer-

streutem Licht auf der Vorderseite des Gefässes, der zwischen den Linien *G* und *H* des Spectrum anfängt und sich noch weit über das Violett hinaus fortsetzt. Dabei dringt, wie schon erwähnt, der blaue Schein zuerst am tiefsten in die Flüssigkeit hinein und reducirt sich zuletzt in dem übervioletten Theile des Spectrums auf eine immer schmalere Schicht an der Oberfläche der Flüssigkeit zur Seite der einfallenden Strahlen. Die festen Linien, welche dem Violett und den ultravioletten Strahlen angehören, geben sich durch dunkle Ebenen zu erkennen, die den blauen Raum unterbrechen. Bei gehöriger Stellung des Auges projiciren sich dieselben als dunkle Linien. Stokes hat von den dem ultravioletten Theile des Spectrums zugehörigen Linien eine Zeichnung entworfen und die hervorstechenden Gruppen desselben in ähnlicher Weise wie Frauenhofer die des sichtbaren Spectrums besonders bezeichnet. Er hat hierzu die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets *l*, *m*, *n*, *o*, *p* gewählt und bezeichnet mit einem derselben sowohl eine ganze Gruppe dunkler Linien, als auch die in der sogenannten Gruppe hervorstechendste dunkle Linie. Von der im äussersten Violett liegenden Doppellinie nennt er die brechbarste *k**). Auch in dem Spectrum, welches, wie sofort beschrieben werden soll, auf einem mit fluorescirender Flüssigkeit getränkten Papierstreifen entworfen ist, sind die dunklen Linien der übervioletten Region wahrzunehmen.

Aus dem Vorstehenden geht hervor, dass man es mit zweierlei Lichtmengen verschiedenen Verhaltens zu thun hat; die eine besteht aus gewöhnlichem Licht, welches unter dem Prisma in das bekannte farbige Spectrum zerlegt wird und das durch die betreffende Flüssigkeit ungehindert hindurchgeht. Die andere wird aber durch die Flüssigkeit eigenthümlich modificirt und bringt die Erscheinung der Fluorescenz hervor, indem sie ein zweites Farbenspectrum erzeugt, das innerhalb des ersten beginnend über das äusserste Violett hinausgeht.

Statt der fluorescirenden Flüssigkeiten können hierbei in einfacherer Weise auch Papierstreifen, welche mit diesen getränkt sind, angewendet werden. Sehr empfindlich zeigt sich in dieser Hinsicht mit Curcumatinktur getränktes Papier. Schon J. Herschel hatte an demselben die Eigenthümlichkeit beobachtet, dass es, wenn man ein reines Spectrum auf dasselbe fallen lasse, am violetten Ende viel weiter erleuchtet erscheine, als weisses Papier. Die Farben vom rothen Ende des Spectrums an bis gegen die dunkle Linie *F* zeigen keine wesentliche Farbenänderung, etwas weiter zwischen *F* und *G* wird eine röthliche Farbe sichtbar, die sich mit dem daselbst befindlichen Grün und Blau des Spectrums vermischt. Ueber *G* hinaus wird die Farbe gelblich und die eigentliche Verlängerung des Spectrums ist gelblich-grün.

Dass die Abänderung des gewöhnlichen Spectrums auf Fluorescenz des getränkten Papiers beruht, ist auf verschiedene Weise zu erkennen. Bricht man nämlich das auf das empfindliche Papier geworfene Spectrum nochmals durch ein vor das Auge gehaltenes Prisma und zunächst so, dass die Refraction in einer den festen Linien des Spectrums parallelen Ebene vor sich geht, so lassen sich alle diese durch das ganze Spectrum hin deutlich verfolgen. Wird aber sodann das Prisma mit seiner brechenden Kante senkrecht gegen die Längenrichtung der festen Linien gehalten, so sind dieselben zwar in dem weniger brechbaren Theil des Spectrums etwa bis zur Linie *F* eben noch deutlich wahrzunehmen, in dem übrigen Theile des

*) M. s. Tab. I Fig. 1 zu Pogg. Ann. Ergänz. Bd. IV.

Spectrums jedoch weniger oder mehr verwaschen oder ganz vernichtet, je nach dem Grade ihrer ursprünglichen Stärke, sowie nach der Beschaffenheit und dem Abstande des hierbei gebrauchten Prisma's.

Noch entschiedener zeigt sich eine Verschiebung der festen Linien im brechbareren Theile des Spectrums, wenn man letzteres auf einem weissen Schirme auffängt, auf welchem ein Streifen mit Curcumatinktur getränkten Papiers so aufgespannt ist, dass seine längere Seite das Spectrum der Länge nach durchschneidet, also ein und dieselbe feste Linie zur Hälfte auf das getränkte, zur andern Hälfte auf das weisse Papier des Schirmes fällt, und wenn man dann dieses Spectrum durch ein Prisma so betrachtet, dass es in einer gegen die festen Linien senkrechten Richtung gebrochen wird. Während dabei die Linie *F* noch ununterbrochen zu sehen ist, erscheint die Linie *G* verschoben, indem das auf dem getränkten Papiere gebildete Stück derselben weniger gebrochen ist, als das auf dem weissen Papiere liegende. Letzteres zeigt sich schwach in das zum gefärbten Theile des Schirmes gehörende Spectrum hinein verlängert, so dass hier *G* doppelt erscheint. Die Erscheinung erklärt sich dadurch, dass das vom getränkten Papier in der Nähe von *G* herkommende Licht aus zwei Theilen besteht; einmal aus dem indigblauen Licht, welches durch Brechung in gewöhnlicher Weise entstanden ist, und sodann zum grössern Theile aus solchem, welches eine geringere Brechbarkeit als *G* besitzt und durch Dispersion aus Licht von höherer Brechbarkeit entstanden ist. Die Linie *G* entsteht nun durch die Abwesenheit einmal des erstgenannten Lichts, sodann des zuletzt erwähnten, wodurch zwei dunkle Linien hervortreten müssen, die der verschiedenen Brechbarkeit beider Lichtportionen entsprechende Lage haben.

Bei der Betrachtung eines auf Curcumapapier aufgefangenen Spectrums durch ein Prisma, dessen brechende Kante senkrecht zu den festen dunklen Linien gehalten wird, tritt noch eine andere eigenthümliche Erscheinung hervor, welche gleichfalls auf die Anwesenheit zweier verschiedener Lichtportionen hinweist. Liegt in dem ursprünglichen auf das getränkte Papier geworfenen Spectrum das Roth zur Linken und wird das Prisma vor dem Auge so gehalten, dass die zu brechenden Strahlen aufwärts gehen, also das Bild nach dem Beobachter hin herabwärts gebrochen wird, so gewahrt man durch das Prisma zwei von einander wohl zu unterscheidende Spectra. Das eine, welches das durch die Brechung der gewöhnlichen Lichtstrahlen hervorgebrachte ist, läuft dem Brechungsvermögen der einzelnen Farbestrahlen gemäss von der Linken zur Rechten schräg herab und enthält auch die natürlichen Farben des Spectrums vom Roth bis zum Violett. Das zweite Spectrum ist weniger gebrochen, als das erstere, liegt gegen dasselbe immer an ein und derselben Seite und gehört den dispergirten Lichtstrahlen an. In beiden Spectren ist das blaue Ende unten, das rothe oben und die den festen Linien des ursprünglichen Spectrums entsprechenden Unterbrechungen erscheinen nun verlängert und quer durch die Farben laufend.

Die Intensität und Farbenzusammensetzung des zweiten Spectrums im Ganzen und in seinen einzelnen Theilen und seine Ausdehnung nach den verschiedenen Richtungen hängen übrigens von der Natur des fluorescirenden Körpers ab, auf welchem das ursprüngliche Spectrum aufgefangen wird. Im Allgemeinen geht es von dem helleren Theile des ersteren Spectrums aus, erstreckt sich bis über das äusserste Violett hinaus und bleibt in seiner Farbe mit der des auffangenden Körpers ziemlich übereinstimmend.

Die Verlängerung des auf Curcumapapier entworfenen Spectrums wurde zuerst als ein Beweis für die Sichtbarkeit der überviolettten Strahlen angesehen, obgleich es nach den Vorstehenden zunächst nur die Existenz gewisser unter gewöhnlichen Umständen nicht sichtbaren Strahlen von höherer Brechbarkeit und deren Modification anzeigt. Eine andere Frage ist, ob die ultravioletten Strahlen eine directe Lichtempfindung im Auge hervorzubringen im Stande sind, ob also die häufige Identificirung der Ausdrücke „überviolette“ und „unsichtbare“ Strahlen des Spectrums noch fortbestehen kann oder nicht. Stokes ist mehrfach bemüht gewesen, diese Frage zur Entscheidung zu bringen; die geringe Intensität schon der violetten, noch mehr aber der darüber hinausliegenden Strahlen, sowie der Umstand, dass die Glasprismen einen grossen Theil der brechbareren Strahlen absorbiren, machen die Untersuchung sehr schwierig, so dass es nicht Wunder nehmen darf, wenn dem genannten Experimentator anfänglich dahin zielende und die Sache entscheidende Versuche missglückten. Erst später ist, wie er bemerkt (Zus. B. der oben gen. Abhandl.), ihm eine besondere Vorrichtung gelungen, soweit in die überviolettten Strahlen hineinzusehen, dass er die von ihm mit *m*, *n* und *p* bezeichneten Gruppen fester Linien mittelst direct ins Auge gelangenden Lichtes erkennen und selbst jenseits derselben noch Licht wahrnehmen konnte. Die Farbe dieser Strahlen vergleicht er mit der von der Corolle des Lavendels (weshalb er sie auch „lavendelblaue“ Strahlen nennt) und setzt hinzu, dass ihnen das Leuchtende des Blaus und die Röthe des Violetts fehle. Helmholtz hat dieselben Untersuchungen mehrfach wieder aufgenommen. In einer Abhandlung über die Zusammensetzung von Spectralfarben*) erwähnt er eine auch schon früher von ihm beschriebene Methode**), die brechbareren lichtschwachen Strahlen dem Auge sichtbar zu machen, soweit sie durch das Glas hindurchzugehen im Stande sind. Er hat auf diesem Wege eine bedeutende Verlängerung des violetten Endes des Spectrums beobachtet und dessen feste Liniengruppen sowohl mit denen eines auf Chininlösung entworfenen Spectrums, als mit der von Stokes gegebenen Zeichnung vergleichen können. Die von Stokes mit *l*, *m* und *n* bezeichneten Gruppen sind sehr leicht und deutlich und am äussersten Ende noch die ersten Linien der Gruppe *p* zu beobachten gewesen. Helmholtz gebraucht daher für diese Strahlen die Bezeichnung „überviolette“, anstatt der allerdings nicht mehr passenden unsichtbaren Strahlen, wenn auch durch dieselben das Auge verhältnissmässig wenig afficirt wird. Dass sie bei objectiver Darstellung in einem Spectrum auf weissem Papier so schwer zu sehen sind, davon liegt der Grund in dem diffusen gewöhnlichen Lichte, welches dieselben überstrahlt; dasselbe Hinderniss findet auch in den meisten übrigen Fällen statt.

Bezüglich der Farbe bemerkt er mit Stokes im Ganzen übereinstimmend, dass das zwischen *G* und *H* befindliche Violett bis zur Gruppe *l* sich ausdehne. Der Farbenton wechsele übrigens sehr mit der Lichtintensität; je lichtschwächer das Violett wird, desto mehr bekomme es einen Anflug von Rosa, bei gesteigerter Lichtintensität werde es dem Blau ähnlicher und gehe dann in ein weissliches Graublau über. Jenseits der Gruppe *l* seien die Strahlen wieder indigblau bei geringer oder weissblau bei grösserer

*) Poggend. Annal. Bd. 94 S. 11.
**) Dieselben Annal. Bd. 86 S. 513.

Lichtstärke. Es scheine somit die Reihe der Farbentöne des Spectrums bei diesen Strahlen sich umzukehren.

Dieselben Untersuchungen hat er mit Hilfe eines Apparats von Quarzprismen, welche für die brechbareren Strahlen weit durchsichtiger sind als Glas, wieder aufgenommen.*) Unter diesen Umständen schien ihm das Auge keine geringere Empfindlichkeit für die äussersten übervioletten Strahlen zu haben, als wie für die der Gruppe *l* und *m*. Soweit Chininpapier das Vorhandensein von übervioletten Strahlen ihm anzeigte, konnte er dieselben auch direct mit dem Auge wahrnehmen. Die Farbe derselben ist ihm von *l* bis zum Ende hin als dieselbe erschienen, nämlich blau bis weisslichblau, und nur an den lichtschwächeren Stellen ein dem Violett ähnlicheres Indigblau, wie es alle indigblauen Strahlen bei geringerer Lichtintensität zeigen.

Helmholtz suchte die hierbei sehr wichtige Frage auf dem Wege des Experiments zu beantworten, ob die Netzhaut die übervioletten Strahlen unmittelbar, wie etwa die andern Farben des Spectrums, sieht oder ob sie unter deren Einflusse fluorescirt, so dass die blaue Farbe Licht von geringerer Brechbarkeit ist, welches erst durch diesen Process auf der Netzhaut in ähnlicher Weise wie auf Chininpapier sich entwickelt. Seine Untersuchungen hatten das Ergebniss, dass die Netzhaut allerdings, wenn auch nur schwach, fluorescirt (schwächer als Papier, Leinwand, Elfenbein, doch stärker als Porzellan), und zwar mit gemischtem weissen dispergirten Licht, dem sich ein blaugrüner Schein zugesellte und welchem, wie die Zerlegung durch das Prisma ergab, das Roth fehlte. Das ziemlich gesättigte Blau des übervioletten Lichts, wie es vom Auge direct wahrgenommen wird, und die weisse Farbe des dispergirten Lichts der fluorescirenden Netzhaut scheinen ihm nun zu wenig die Ansicht zu unterstützen, dass die Netzhaut die übervioletten n u r nach ihrer Verwandlung in weniger brechbares Licht empfinde, doch könne, wie einige andere seiner Untersuchungen zeigen, wohl angenommen werden, dass die Fluorescenz der Netzhaut stark genug ist, um durch Beimischung des von ihr dispergirten Lichts die Farbe des direct empfundenen übervioletten merklich abzuändern. Die oben bemerkte Umkehr der Farbenreihe im übervioletten Lichte erklärt er demnach so, dass einer schwachen Empfindung violetter Farbe, welche diese Strahlen direct erregen, sich die Wahrnehmung des in der Netzhaut durch Fluorescenz erzeugten grünlich-weissen Lichts beimischt, wodurch die weisslich-indigblaue Färbung entsteht, welche die übervioletten Strahlen unmittelbar dem Auge darbieten. Als Resultate seiner Versuche stellt H. folgende auf:

1) Die menschliche Netzhaut ist im Stande, alle Strahlen des Sonnenlichts direct wahrzunehmen, deren Brechbarkeit die der äussersten rothen Strahlen übertrifft [und von deren Vorhandensein man anderweitig Kenntniss hat].
2) Die Substanz der Netzhaut dispergirt unter dem Einflusse der übervioletten Strahlen gemischtes Licht von niederer Brechbarkeit, dessen Gesammtfarbe nicht ganz reines (grünlich blaues) Weiss ist.
3) Die Fluorescenz der Netzhaut ist aber kein hinreichender Erklärungsgrund dafür, dass die übervioletten Strahlen überhaupt wahrgenommen werden.

*) Poggend. Annal. Bd. 94 S. 205.

II. Modificationen des dispergirten Lichts je nach der Beschaffenheit der fluorescirenden Substanz und des einfallenden Lichts.

Ausser am schwefelsauren Chinin ist die Fluorescenz noch an ungemein vielen Lösungen hauptsächlich organischer Substanzen, sowie auch an einigen unorganischen Stoffen beobachtet worden. Zur Herstellung der zweckmässigsten Concentration der Lösungen ist es vortheilhaft, zu einer Quantität Wasser in einem cylindrischen Glase, das gegen die einfallenden Strahlen des Sonnenlichts vor das Fenster gestellt wird, so viel von dem (meist alkoholischen) Auszuge hinzuzugiessen, bis die Fluorescenz deutlich hervortritt. Einige von den empfindlicheren Substanzen sind folgende.

1) Auszug der Rinde von Rosskastanien (Aesculinlösung). Eine blose Abkochung der Rinde dieses Baumes reicht statt einer *lege artis* bereiteten Aesculinlösung vollkommen hin. Die Flüssigkeit ist sehr empfindlich und fluorescirt wie Chinin mit blauem Lichte. Die Dispersion fängt im Spectrum etwas eher an, als bei der Chininlösung, bei letzterer nämlich zwischen G und H, bei dieser etwas vor G, wodurch, wie Stokes bemerkt, sich eine Beobachtung Herschel's erklärt, nach welcher ein durch Chininlösung hindurchgegangenes Lichtbündel durch Aesculin noch dispergirt wird.

2) Alkoholischer Extract von Stechapfelsaamen. Diese Flüssigkeit ist sehr empfindlich und zeigt auch schon bei zerstreutem Tageslicht die Fluorescenz. Im durchgelassenen Lichte erscheint sie gelb mit etwas grün; an der Seite des einfallenden Lichtes fluorescirt sie mit bläulich grünem Lichte.

3) Curcumatinktur. Im durchgehenden Lichte gelb, fluorescirt mit grünlichem bis gelbgrünem Lichte. Die Dispersion scheint im Spectrum zwischen E und F bei der Linie b anzufangen. Die festen Linien im übervioletten Theile des Spectrums zeigen sich in der oben beschriebenen Weise an dieser Flüssigkeit recht gut.

4) Alkoholische Lösung von Guajakharz; dispergirt in einer sehr schmalen Schicht an der Oberfläche zur Seite der einfallenden Strahlen ein violettes Licht. Im Spectrum geht die Dispersion bis zum Anfange des Grün in der Nähe von b herab. Das dispergirte violette Licht wird durch die übervioletten Strahlen zwischen m und n und darüber hinaus erzeugt, und für diese ist die Flüssigkeit stark absorbirend.

5) Alkoholische Lösung von Blattgrün. Die Blätter sind vorher in siedendem Wasser aufzuweichen, hierauf mit Alkohol auszuziehen, die Flüssigkeit dann von den Blättern abzugiessen, wenn sie hinreichend concentrirt ist, und im Dunklen aufzubewahren. Sie ist im durchgehenden Lichte dunkelgrün und dispergirt, wie schon bemerkt, ein rothes Licht. Der einzige Zusammenhang des absorbirenden und fluorescirenden Vermögens einer empfindlichen Flüssigkeit giebt sich an dieser in eigenthümlicher Weise zu erkennen. Wenn man nach Stokes die Lösung in ein reines Spectrum bringt und von oben auf dieselbe durch ein rothes Glas herabsieht, so beobachtet man gewisse Helligkeitsminima meistens in Gestalt von Zähnen, welche zwischen den Absorptionsstreifen liegen, die durch dunkle Zähne von entgegengesetzter Richtung angezeigt sind. Das abwechselnde Auftreten dieser Minima erklärt St. dadurch, dass je reichlicher das dispergirte Licht

entsteht, desto mehr das einfallende Licht dazu verbraucht wird. Minima der Fluorescenzthätigkeit entsprechen somit solchen Stellen des Spectrums, an welchen das einfallende Licht auf verhältnissmässig grössere Tiefen bis zur völligen Absorption in die Lösung eindringen kann.

6) Grüner Flussspath (von Alston-Moor); zeigt in gewissen Richtungen betrachtet eine dunkelblaue Dispersion des Lichts, die zwischen den Linien *G* und *H* beginnt und sich über *H* hinaus erstreckt. Die festen Liniengruppen *H*, *l*, *m* und *n* sind von Stokes deutlich erkannt worden. Der Abstand, bis zu welchem das dispergirte Licht von der Oberfläche an der Seite der einfallenden Strahlen ab verfolgt werden kann, schien mit Zunahme der Brechbarkeit des Lichts sich nicht schnell zu verringern, wie bei einer Lösung von schwefelsaurem Chinin (s. S. 163 u. 164).

8) Kanarienglas; ein gelbgrünliches Glas, dessen Farbe auch bisweilen mit annagrün bezeichnet wird, dispergirt ein gemischtes lebhaft grünes Licht. Es ist eine der empfindlichsten Substanzen mit sehr intensiver Fluorescenz und sehr bequem zu handhaben. Die Verwendung dieser Glassorte zu Flacons und dergl. beruht grossentheils auf dieser optischen Eigenschaft, in Folge deren die daraus verfertigten Gegenstände ein eigenthümliches und gefälliges Ansehen erhalten. Die prismatische Zerlegung des fluorescirenden Lichtes ergiebt nach Stokes dasselbe bestehend aus fünf helleren Streifen von gleicher Breite und ziemlich gleichem Abstand und getrennt durch schmale dunkle Streifen. Der erste helle Streifen ist roth, der zweite röthlich orange, der dritte gelblich grün, der vierte und fünfte grün. Im Spectrum beginnt die Fluorescenz plötzlich zwischen *E* und *F* bei der Linie *b* und bleibt bis über das sichtbare Spectrum hinaus gleich stark; nur etwas über *F* hinaus findet in dieser Beziehung ein Minimum statt; desgleichen scheint die Farbe des dispergirten Lichts überall gleichförmig zu sein. Die Fluorescenz beginnt im Spectrum an der Stelle, wo das durch dieselbe modificirte Licht endet; oder denkt man sich das weisse Licht in zwei Theile zerlegt, von denen der erste Strahlen aller niederen Brechbarkeiten bis zur Linie *b*, der andere die übrigen Strahlen enthält, so kann man annähernd genau sagen, dass das dispergirte Licht Strahlen enthält, welche dem erstern Theile angehören; doch würde keine Fluorescenz entstehen, wenn das Glas nur von Strahlen des ersten Theiles beleuchtet würde, indem nur diejenigen des zweiten Theiles dieselbe hervorbringen und Strahlen (Farben) von der niedern Brechbarkeit des ersteren Theiles erzeugen (vergl. ob. S. 162). Dieses Glas ist eins der besten Medien, um die festen Linien der ultravioletten Strahlen zu zeigen.

8. Uranoxydsalze. Das „gelbe, ins Grünliche schillernde“ Glas, wie man häufig auch das vorhin genannte Glas bezeichnet, wird durch Uranoxyd gelb gefärbt. Merkwürdiger Weise fluoresciren auch mehrere Uranoxydsalze ziemlich auf dieselbe Weise, wie das Kanarienglas. So zeigt sich krystallisirtes salpetersaures Uranoxyd sehr empfindlich, indem es ein grünes Licht dispergirt, dass dieselbe eigenthümliche Zusammensetzung, wie das von jenem Glase hat. Eine Lösung von salpetersaurem Uranoxyd fand Stokes zwar auch empfindlich, doch nicht in so hohem Grade. Das von derselben dispergirte Licht löste sich gleichfalls in helle Streifen auf und bei Untersuchung desselben im reinen Spectrum ergab sich, dass die Fluorescenz an derselben Stelle des Spectrums beginnt, wie beim Kanarienglase, und dass auch darauf ein merkwürdiges Empfindlichkeitsminimum an derselben Stelle des Spectrums wie dort folgt. Ebenfalls

sehr empfindlich ist essigsaures Uranoxyd und der gelbe Uranit; weniger, doch immer noch in wohl bemerkbarer Weise, das Uranoxydhydrat. Das Uranoxydul scheint unempfindlich zu sein. (Das nach Stokes Angabe aus dem salpetersauren Salz bereitete Uranoxyd von ziegelrother Farbe dürfte vielleicht einer zu scharfen Hitze ausgesetzt gewesen sein und Beimengungen von anderen Oxydationsstufen enthalten haben; das bei einer niedrigeren Temperatur im Oelbade zersetzte salpetersaure Salz lässt dagegen ein helleres, mehr gelbliches Oxyd zurück.)

9. Getränkte Papiere. Die oben genannten fluorescirenden Flüssigkeiten, sowie auch wohl die meisten übrigen geben empfindliche gefärbte Papiere, wenn man mit denselben gewöhnliches Papier bestrichen hat. Dieselben zeigen in der Regel mit den entsprechenden Flüssigkeiten übereinstimmende Brechbarkeitsveränderungen der Strahlen. Besonders bemerkenswerth sind ausser dem schon (S. 164) erwähnten Curcumapapier, die mit schwefelsaurem Chinin oder mit einem Extract von Stechapfelsaamen getränkten Papiere. Auf dem Chininpapiere sind in der oben (S. 163 u. 164) angegebenen Weise die zu den übervioletten Strahlen gehörigen festen Linien bis zur Gruppe p zu verfolgen.

Ausser den genannten organischen wie unorganischen Stoffen giebt es noch ungemein viele, welche eine grössere oder geringere Fluorescenz entwickeln. Um einen Körper auf diese Eigenthümlichkeit zu prüfen, sind zwar im Obigen mehrfache Mittel zugleich mit angegeben, doch erfordern die meisten einige, zum Theil ziemlich umständliche Vorkehrungen. Bei weiten einfachere Prüfungsmittel und Methoden hat Stokes in einem spätern Aufsatze angegeben *). Das von demselben eingehaltene Verfahren möge durch Anwendung auf einen besonderen Fall erläutert werden; die Uebertragung auf jeden andern Fall *mutatis mutandis* ist dann leicht zu machen.

Wie bemerkt, beginnt die Fluorescenz des Kanarienglases fast plötzlich zwischen E und F bei der dunklen Linie b des Spectrums und alle dispergirten Strahlen zeigen eine niedere Brechbarkeit, als der genannten Stelle des Spectrums zugehört, werden aber von denjenigen Strahlen des einfallenden weissen Lichts hervorgebracht, welchen eine höhere Brechbarkeit als b zukommt. Es möge wieder derjenige Theil des Spectrums und der zugehörigen Strahlen, welche unterhalb der Linie b liegen, als der erste Theil, und der über der Linie b liegende Theil des Spectrums und der zugehörigen Strahlen als der zweite Theil des gemischten weissen Lichts bezeichnet werden. Besitzt man nun zweierlei Absorptionsmittel, von denen das erste alle zum ersten Theil gehörigen Strahlen absorbirt, oder für dieselben undurchsichtig, dagegen für die zum zweiten Theile gehörigen Strahlen (auch für die übervioletten) durchsichtig ist, das zweite dagegen undurchsichtig für den zweiten Theil und durchsichtig für den ersten Theil der Strahlen ist, so werden beide Absorptionsmittel auf einander gelegt ein vollkommnes Absorptionsmittel für Strahlen von jeder beliebigen Brechbarkeit abgeben, d. h. man wird durch beide, wenn sie zugleich vor das Auge gehalten werden, gar nichts sehen. Dasselbe muss auch im Allgemeinen der Fall sein, wenn mit dem ersten Absorptionsmittel die Oeffnung im Fensterladen eines dunklen Zimmers versetzt wird, und das zweite Absorptionsmittel vor das Auge gehalten wird. Denn die durch das erste Mittel

*) Phil. Transact. für 1853 p. 385. Poggend. Annal. Bd. 96 S. 522.

noch ins Zimmer eindringenden grünen, blauen, violetten und übervioletten Strahlen, welche von den Gegenständen im Zimmer in gewöhnlicher Weise zurückgeworfen oder einfach zerstreut werden, können nicht durch das zweite vor das Auge gehaltene Absorbens dringen. Wenn aber bei derselben Anordnung der absorbirenden Medien zwischen denselben ein Gegenstand aufgestellt wird, der die Eigenschaft besitzt, Lichtstrahlen von höherer Brechbarkeit in solche von niederer Brechbarkeit zu verwandeln, so wird man denselben auch durch das zweite Absorptionsmittel mit um so grösserer Deutlichkeit erblicken müssen, je vollkommner ihm die erwähnte Eigenschaft zukommt. Wird also ein Stück Kanarienglas zwischen das erste und zweite Absorptionsmittel gestellt, so setzt dasselbe alle darauf fallenden durch das erste Mittel kommenden grünen, blauen, violetten und übervioletten Strahlen, deren Brechbarkeit sämmtlich über *b* liegt, in rothe, orangene und gelbe um, welche nun durch das zweite Mittel, weil es für solche transparent ist, ungehindert ins Auge gelangen. Das Kanarienglas muss also in dem ihm eigenen fluorescirenden gemischten Lichte sichtbar sein, und kann wohl, da bei demselben die Fluorescenz sehr intensiv ist, gleichwie ein selbstleuchtender Körper, noch andere Gegenstände sichtbar machen. Es ist hieraus im Allgemeinen ersichtlich, wie auf ähnlichem Wege fluorescirende Körper von anderen, welche diese Eigenschaft nicht besitzen, unterscheidbar gemacht werden können. Vorausgesetzt wird nun hierbei, dass man zwei sich in der beschriebenen Weise ergänzende Absorptionsmittel besitze, deren gemeinschaftliche Grenze für die Absorption auch in derjenigen Gegend des Spectrums liege, bis zu welcher die obere Grenze der Brechbarkeit des dispergirten Lichtes von dem zu prüfenden Körper geht. Diesen Ansprüchen kann natürlich nicht vollkommen genügt werden, weil einmal die oberen Grenzen der Brechbarkeit des fluorescirenden Lichts nicht bei allen Substanzen dieselben sind, und dann weil es auch schwer hält, für alle möglichen Grenzen Paare von Absorptionsmitteln ausfindig zu machen, welche ein so genaues Complementarverhältniss darbieten. Indessen werden einige Paare, bei welchen die gemeinschaftliche Grenze der Absorption je zweier auf verschiedene Stellen des Spectrums, z. B. für das eine Paar ins Violett, für ein anderes ins Dunkelblau oder ins Hellblau etc. fällt, zur beabsichtigten Prüfung auf Fluorescenz hinreichend sein, auch wenn die untere Grenze der Absorption des einen Mediums und die obere des anderen für jedes Paar nicht genau auf ein und derselben Stelle des Spectrums zusammentreffen. Für den Fall nämlich, dass die Absorptionsmittel nicht streng complementar sind, wird es zwar möglich sein, dass noch eine gewisse Lichtmenge durch beide Medien hindurchgeht und es könnte demgemäss zweifelhaft bleiben, ob die Helligkeit, womit man den zwischen beide gestellten Gegenstand sieht, blos von gewöhnlich zerstreutem, durch beide Medien hindurchgegangenem, oder von wirklich fluorescirendem Lichte herrührt; doch kann man sich darüber in den meisten Fällen dadurch hinreichend vergewissern, dass man das vor das Auge gehaltene zweite Mittel auch vor das Loch im Fensterladen stellt. War der Gegenstand vorher blos im gewöhnlich zerstreuten Lichte sichtbar, so wird er es auch jetzt in unveränderter Weise sein, wenn sonst das Zimmer gehörig dunkel ist. War jedoch die Helligkeit des Gegenstandes durch fluorescirendes Licht vermittelt, so wird derselbe jetzt verhältnissmässig dunkel erscheinen.

In Ermangelung eines dunklen Zimmers könnte man sich auch eines

parallelepipedischen, oder pyramidalen Kastens von Pappe, dessen Innenseiten geschwärzt sind, bedienen. Auf der einen Seite desselben befindet sich eine Oeffnung, vor oder hinter welcher das erstgenannte Absorptionsmittel gestellt wird, und durch welche das Licht einfällt; auf der gegenüberstehenden Seite ist eine andere Oeffnung angebracht, welche mit dem zweiten Absorptionsmittel verschlossen wird und durch welches man den in den Kasten durch eine Seitenöffnung eingebrachten, auf seine Fluorescenz zu prüfenden Gegenstand betrachtet.

Es ist gut neben den zu prüfenden Gegenstand einen anderen zu stellen, welcher gar nicht, oder doch ganz unbedeutend fluorescirt, damit man aus der Vergleichung des Ansehens beider die Beobachtung mehr differential mache. Als eine solche Substanz empfiehlt Stokes ein Porcellantäfelchen, auch kann dazu die untere matte Seite einer noch ungebrauchten Abdampfschaale benutzt werden. Es ist indessen gut, eine solche Porcellanfläche vorher auf ihre Fluorescenz zu prüfen; ganz frei von dieser Eigenschaft sind dieselben nicht, namentlich bringen die am stärksten brechbaren Strahlen, welche allerdings meist durch Glas absorbirt werden und nur durch Quarz hindurchgehen, immer einen Grad von Fluorescenz noch hervor; auch ist nicht jede Porcellanmasse für diese Zwecke gleich gut brauchbar. Desgleichen kann eine kleine Platte von Kreide als Vergleichsgegenstand gewählt werden.

Stokes giebt als Absorptionspaare folgende Substanzen an und bezeichnet dabei dasjenige Medium, welches vor das Loch im Fensterladen gestellt wird, als Hauptabsorbens und das zweite als Complementarabsorbens. Wenn beide zu wenig complementar sich erweisen und auch das obige, für diesen Fall bemerkte Verfahren unzureichend erscheint, so dient zur Prüfung noch ein drittes Medium, welches er Uebertragungsmittel nennt. Dasselbe kann sowohl von derselben Art wie das erste als auch wie das zweite, nur etwas blässer, sein, und wird bald vor das Auge bald zwischen den Gegenstand und das Hauptabsorbens gehalten.

1. Hauptabsorbens ein durch Mangan und etwas Kobalt tief violett gefärbtes Glas, oder ein durch Mangan allein tief gefärbtes Glas, combinirt mit einem blassblauen Kobaltglase. Bei Prüfung der Substanzen durch diese Medien ist in der Regel ein Complementarabsorbens nicht nöthig, doch kann man sich als solchen eines blassgelben Glases wie bei der folgenden Combination bedienen. Die Verbindung ohne das gelbe Glas ist aber gut, wenn das fluorescirende Licht blau oder dunkelblau ist, weil sonst zu viel Licht durch Absorption im gelben Glase verloren geht.

2. Hauptabsorbens eine Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyd-Ammoniak in solcher Tiefe, dass ein tiefes Blau entsteht. Zweckmässig bringt man die Lösung in eine Zelle mit parallelen Glaswänden oder in eine breite flache Flasche (wie man sich deren auf Reisen bedient). Das Complementarabsorbens ist ein durch Silber gelb gefärbtes und schwach überbranntes Glas. Wenn das Glas bei seiner Bereitung einer etwas höhern Hitze als nöthig ausgesetzt gewesen ist, so erlangt es einen zarten blauen Schein, welcher ziemlich das Ansehen einer Chininlösung hat, was jedoch mit Fluorescenz in keinem Zusammenhange steht. Bei dieser Beschaffenheit ist das Glas fast undurchsichtig für die übervioletten Strahlen, und für beide Stellungen sowohl vor dem Auge als auch vor dem Loche im Fensterladen brauchbar. Diese Verbindung ist in der Regel sehr wirksam, vorzüglich wenn das fluorescirende Licht gelb, orange oder roth ist. Schreibt man

z. B. mit Tinte auf die erwähnte Porcellanschaale, so ist nichts zu lesen, wenn man dieselbe zwischen beide Medien bringt. Stellt man aber dazu noch ein Stückchen Canarienglas oder eine ähnliche fluorescirende Substanz, so erscheint nicht blos das Glas leuchtend, sondern sendet auch so viel Licht aus, dass die Schrift auf dem Porcellan sichtbar wird.

3. Das Hauptabsorbens der vorigen Zusammenstellung kann auch durch ein dunkelblaues Kobaltglas ersetzt werden. Bei dieser, wie bei der vorhergehenden Verbindung liegt die ziemlich gemeinschaftliche Grenze der Absorptionsfähigkeit im Blau. Bei der folgenden liegt sie etwas tiefer im Spectrum, doch bietet dieselbe nicht eben wesentliche Vortheile vor den beiden eben genannten dar.

4. Hauptabsorbens eine Lösung von salpetersaurem Kupferoxyd und Complementarabsorbens ein lichtrothes oder tief orangenes Glas.

Durch die genannten Beobachtungsmittel und Methoden tritt die Fluorescenz nicht blos der schon genannten Substanzen, z. B. von Curcuma-, Chinin-, Stramonium- (mit Stechapfelsamentinktur gefärbtes) Papier, sondern auch von solchen deutlich hervor, deren Fluorescenz nicht leicht zu entdecken ist, z. B. von weissem Papier und von Baumwolle. Lässt man ein Stück Rosskastanienrinde auf einem Glase Wasser schwimmen und stellt dasselbe vor dem Hauptabsorbens auf, so kommen die herabfliessenden Striemen von Aesculinlösung vermöge ihrer Fluorescenz deutlich zum Vorschein.

Es ist ersichtlich, dass man nun auch umgekehrt das Phänomen der Fluorescenz benutzen kann, um gewisse Substanzen auf die Fähigkeit zu prüfen, Strahlen von hoher Brechbarkeit zu absorbiren oder auch zu reflectiren. Ist die zu prüfende Substanz ein Absorptionsmittel, so braucht man mit demselben nur das Loch oder die Spalte im Fensterladen des dunkeln Zimmers zu versetzen und zuzusehen, wie sich ein Gegenstand von bekannter Fluorescenz verhält. Soll das Reflexionsvermögen einer Fläche untersucht werden, so braucht man nur die von derselben zurückgeworfenen Strahlen, von allen übrigen isolirt, auf den fluorescirenden Gegenstand fallen zu lassen und dessen Verhalten zu beobachten.

Es ist unschwer vorauszusehen, dass auch die Beschaffenheit der ursprünglichen Lichtquelle und des von derselben ausgehenden Lichtes auf die Entwickelung der Fluorescenz an einem dafür empfindlichen Gegenstande von Einfluss sein wird. Die Natur der Fluorescenz deutet ferner im Voraus schon dahin, dass Licht von irgend einer Lichtquelle diese Erscheinung um so kräftiger unter übrigens gleichen Umständen entwickeln wird, je reicher es an Strahlen von höherer Brechbarkeit sein wird. In dieser Beziehung wird die Beobachtung der Fluorescenz ein Mittel, die Zusammensetzung eines Lichts namentlich hinsichtlich der brechbareren Strahlen zu untersuchen und festzustellen. Versuche von Stokes und Anderen haben nun gezeigt, dass die so schwach leuchtende Flamme des Alkohols in einer Chininlösung eine starke Fluorescenz erzeugt, also reich an sehr brechbaren Strahlen ist. Bei Anstellung der betreffenden Versuche ist zu berücksichtigen, dass das Glas, in welcher die Chininlösung enthalten ist, einen grossen Theil der brechbaren Strahlen absorbirt, und dass man daher eine Vorkehrung treffen muss, nach welcher die einfallenden Strahlen der Flamme entweder durch eine Quarzplatte gehen oder in das offene Gefäss auf die Oberfläche der Flüssigkeit fallen, indem man die Flamme dicht darüber hält. Da die Opacität einer Chininlösung mit der Brechbarkeit des Lichts

regelmässig und rasch zu wachsen scheint, so kann man die Brechbarkeit nach dem Grade, in welchem sich hierbei die Beleuchtung der Flüssigkeit auf die Oberfläche zusammenzieht, beurtheilen. Es ist zweckmässig, die Lösung in recht verdünntem Zustande anzuwenden; denn auch in einer solchen bringt die Alkoholflamme eine grosse Helligkeit hervor und die einzelnen Schichten, welche vom Lichte verschiedener Brechbarkeit herrühren, drängen sich nicht zu sehr zusammen. Die bedeutende Helligkeit sowie die starke Absorption durch das Glas machen es sehr wahrscheinlich, dass die Weingeistflamme Strahlen von sehr hoher Brechbarkeit, welche wohl noch über *p* hinausgehen, besitze. Beinahe dieselbe Wirkung übt eine Naphthaflamme aus, eine geringere aber die Aetherflamme, sei es wegen ihres grössern Reichthums an sichtbaren, oder wegen ihres Mangels an übervioletten Strahlen. Dagegen bringt die Wasserstoffgasflamme eine starke Wirkung hervor; dieselbe scheint übervioletten Strahlen von noch grösserer Brechbarkeit als die Alkoholflamme zu haben. Die Flamme des Schwefelkohlenstoffs bringt eine viel stärkere Wirkung als die Weingeistflamme hervor und entwickelt namentlich an einer alkoholischen Lösung von Guajakharz eine Fluorescenz von blauem Licht, das, wie die Untersuchung im Spectrum ergiebt, von den übervioletten Strahlen der Liniengruppen *m* und *n* herrührt und das von der Alkoholflamme nicht hervorgebracht wird. Es scheint somit die letztere Flamme ausser an sichtbaren auch noch arm an übervioletten Strahlen aus der Gegend der genannten Gruppen zu sein und das Meiste ihres übervioletten Lichtes eine weit höhere Brechbarkeit zu besitzen. Die Alkoholflamme wird dadurch ein Mittel, gewisse Substanzen auf ihre Durchsichtigkeit für Strahlen von hoher Brechbarkeit zu prüfen; man braucht nur dieselben einmal zwischen die Flamme und eine Chininlösung zu stellen, dann wieder zu entfernen und dabei den Unterschied in der Fluorescenz der Flüssigkeit zu beobachten. Auf diese Weise bestätigt sich z. B. die Opacität der meisten Glassorten für Licht von hoher Brechbarkeit, sowie die grosse Durchsichtigkeit des Quarzes für dieselben Strahlen.

Der elektrische Funke ist gleichfalls sehr reich an Strahlen von hoher Brechbarkeit. In einer soweit verdünnten schwefelsauern Chininlösung, dass eine Alkoholflamme nur einen höchst schwachen Lichtschimmer in derselben zu erzeugen vermochte, der nicht einmal entschieden auf Fluorescenz hindeutete, brachte nach S t o k e s ein elektrischer Funke eine sehr bemerkbare Fluorescenz hervor, und zwar ergab sich, dass, wenn der Funke als ein schwacher, verästelter vom Conductor überschlug, das schwache fluorescirende Licht eine grössere Verbreitung in der Lösung hatte, als wenn der Funke hell und scharf war, oder eine Leidner Flasche entladen wurde, in welchen letzteren Fällen das fluorescirende Licht nur auf eine schmale Schicht der Lösung beschränkt war. Die Strahlen des schwachen verästelten Funkens wurden vom Glas in reichlichem Maasse durchgelassen, die des scharfen und hellen Funkens aber vom Glase absorbirt, obwohl vom Quarze durchgelassen. Nach dem oben Bemerkten bezüglich der Zunahme der Opacität von Glas und von Chininlösung mit der Brechbarkeit der Strahlen geht daraus hervor, dass ein starker elektrischer Funke sehr reich ist an übervioletten Strahlen von hoher Brechbarkeit.

Die eben genannte Hervorrufung der Fluorescenz legt eine Vergleichung dieser Erscheinung mit der der P h o s p h o r e s c e n z, — die des Leuchtens gewisser Körper nach vorhergegangener Bestrahlung von irgend einer Licht-

quelle — sehr nahe. Die Erfahrung hat gelehrt, dass die phosphorogenischen Strahlen eines elektrischen Funkens, welche z. B. den Canton'schen Phosphor (Schwefelcalcium) leuchtend machen, ganz frei den Quarz durchdringen, aber von Glas schon bei mässiger Dicke aufgefangen werden, dass also dieselben ebenfalls Strahlen von hoher Brechbarkeit sind. Stokes stellte hierüber folgenden Versuch an. Er bedeckte zuerst den Canton'schen Phosphor mit einem Quarzgefäss und brachte denselben durch einen elektrischen Funken zum Leuchten; hierauf wiederholte er den Versuch mit einer frischen Portion Phosphor, wobei er aber über denselben das Gefäss mit Wasser gefüllt stellte. Es wurde eine ebenfalls starke Phosphorescenz hervorgerufen, die ihm nur etwas weniger schwächer erschien als zuvor. Zuletzt wurde das Wasser im Quarzgefäss durch eine schwache Lösung von schwefelsaurem Chinin ersetzt und es ergab sich, dass nun der elektrische Funke keine Phosphorescenz erregen konnte. Schon eine Lösung, die in 10000 Theilen nur einen Theil Chinin enthielt, war bei einer Tiefe von einem halben Zoll im Stande, die Phosphorescenz zu unterdrücken. Diese Versuche zeigen, dass die Fluorescenz und Phosphorescenz durch Strahlen derselben Art, nämlich von hoher Brechbarkeit erregt werden und deuten ausserdem in Verbindung mit anderen, früher erwähnten, eine grosse Aehnlichkeit in der Entstehungsweise dieser beiden Phänomene, sowie desjenigen der Absorption an.

Stokes bemerkt hierüber, dass die innern Verhältnisse der Fluorescenz sich wohl begreifen lassen, wenn man annimmt, dass das fluorescirende Medium während der Erregung durch die einfallenden Strahlen ein selbstleuchtendes ist. Der Unterschied zwischen Fluorescenz und Phosphorescenz besteht demgemäss hauptsächlich darin, dass bei letzterer die Wirkung des thätigen Lichtes noch eine Zeit lang im betreffenden Körper fortdauert, nachdem derselbe dem unmittelbaren Einflusse desselben entzogen ist, während bei der Fluorescenz die Wirkung mit Entfernung des thätigen Lichtes aufhört. Nimmt man nun an, dass die Vibrationen des einfallenden Lichts in dem fluorescirenden Körper gewisse Molecularvibrationen erzeugen und diese wieder in dem denselben umgebenden Aether neue Schwingungen hervorbringen, so ist im Allgemeinen die Entstehung des fluorescirenden Lichtes erklärlich. Da nun die zeitherigen Beobachtungen als allgemeines und einfaches Gesetz herausstellen, dass das fluorescirende Licht immer aus Strahlen von niederer Brechbarkeit, als die thätigen Strahlen des einfallenden Lichtes, besteht, so ist anzunehmen, dass durch die Uebertragung der Vibrationen des Aethers an die Molecule des fluorescirenden Körpers und von diesen wieder an den Aether eine Verlängerung der Schwingungsperiode herbeigeführt wird, eine Veränderung, die durch mannigfaltige Verhältnisse der uns unbekannten Molecularconstitutionen bedingt sein kann, und worüber vielerlei Hypothesen zulässig sein mögen, solange nur keine derselben eine Verminderung der Quantität der Bewegung bei diesem Vorgange involvirt. Die Phosphorescenz würde auf einem ähnlichen Vorgange beruhen, ohne dass es auch zugleich nöthig wäre, eine ähnliche Verlangsamung der Schwingungsdauer durchgehends anzunehmen, da die Versuche eine Erniedrigung der Brechbarkeit des phosphorescirenden Lichts mit Bestimmtheit nicht durchgehends ergeben haben. Der Unterschied beider Erscheinungen, nämlich die Fortdauer der Wirkung des thätigen Lichts bei der Phosphorescenz einerseits und das sofortige Anfangen und Aufhören der Erleuchtung bei der Fluorescenz mit dem Beginn und dem Ende der unmittelbaren

Einwirkung des thätigen Lichts andererseits lässt sich vielleicht in analoger Weise erklären, wie die Entwickelung stehender und fortschreitender Schwingungen.

Die Einwirkung der brechbareren Strahlen des thätigen Lichts auf eine Substanz, insofern in derselben eine gewisse Art Molecularvibrationen erzeugt wird, kann auch je nach der Beschaffenheit der getroffenen Substanz so intensiv sein, dass die Schwingungsamplituden der Molecule oder gewisser Atomgruppen grösser werden, als dass ein Fortbestand des frühern Gleichgewichts zwischen denselben mehr möglich bliebe, und dass entweder ein neuer Gleichgewichtszustand oder eine vollständige Trennung der Bestandtheile hervorgebracht wird. Auch hier dürfte der Umstand, dass die violetten und übervioletten Strahlen vorzugsweise die sogenannten chemischen sind, nicht bedeutungslos sein.

Da bei der Fluorescenz die Strahlen höherer Brechbarkeit in solche von niederer Brechbarkeit verändert werden, so ist es auch denkbar, dass gewisse Körper mit derselben Eigenschaft in der Weise versehen sind, dass die fluorescirenden Strahlen eine Brechbarkeit besitzen, welche unter die untere Grenze der Sichtbarkeit für das menschliche Auge fällt, so dass die Anwesenheit dieser Strahlen nur etwa durch Wärmeerscheinungen nachgewiesen werden könnte. Es wäre hierbei auch möglich, dass der fluorescirende Körper einen grössern oder geringern Theil der unterhalb dem Violett liegenden oder sichtbaren Strahlen in solche verwandelte, welche unter dem äussersten Roth liegen, alsdann würde er diesen Theil der Strahlen in sich aufgenommen haben, ohne dass diese eine weitere Lichtempfindung davon im Auge erregen könnten, d. h. er würde, wie man sagt, sie verschluckt oder absorbirt haben. Das Absorptionsvermögen der fluorescirenden Substanzen für die stärker brechbaren Strahlen ist schon oben näher bemerkt worden: man erkennt somit den Zusammenhang, welchen die Erscheinungen der Fluorescenz und der gewöhnlichen Absorption haben können, und wie beide durch einen Vorgang ein und derselben Art sich erklären lassen.

Die Hauptresultate der bezüglich der Fluorescenz vornehmlich von Stokes angestellten Untersuchungen sind nun:

1. Bei dem Phänomen der Fluorescenz wird die Brechbarkeit des Lichts geändert; einfallendes Licht von bestimmter Brechbarkeit giebt fluorescirendes von verschiedenen Brechbarkeiten.

2. Die Brechbarkeit des einfallenden Lichts ist die obere Grenze der Brechbarkeit der Bestandtheile des fluorescirenden Lichts.

3. Die Farbe des Lichts wird im Allgemeinen bei der Fluorescenz geändert und die neue Farbe entspricht der neuen Brechbarkeit. Es ist dabei gleichgültig, ob die einfallenden Strahlen zum sichtbaren oder für gewöhnlich unsichtbaren Theile des Spectrums gehören.

4. Das fluorescirende Licht scheint gleichmässig nach allen Richtungen auszustrahlen, wie wenn die empfindliche Substanz selbst leuchtend wäre.

5. Die Erscheinung der Brechbarkeitsveränderung scheint ausserordentlich gemein zu sein, besonders bei organischen Substanzen.

6. Das Stadium der übervioletten, für gewöhnlich unsichtbaren Strahlen des Spectrums, sowie der Absorption, welche Medien auf dieselben ausüben, wird durch dieses Phänomen sehr erleichtert.

7. Dasselbe erhebt neue Schwierigkeiten für die Voraussetzung einer verschiedenen Natur der leuchtenden, chemischen und phosphorogenischen

Strahlen, stimmt aber vollkommen mit der Annahme, dass die Erzeugung von Licht, von chemischer Veränderung und von Phosphorescenz nur verschiedene Wirkungen ein und derselben Ursache seien. Die phosphorogenischen Strahlen eines elektrischen Funkens, welche von Glas bekanntlich aufgefangen werden, scheinen nichts anderes zu sein, als überviolette Strahlen von ungemein hoher Brechbarkeit und es ist kein Grund vorhanden, sie ihrer Natur nach als verschieden von den Lichtstrahlen anzusehen.

Witzschel.

Kleinere Mittheilungen.

XXII. Ueber einen Satz Leibnizens von den Sectoren der Kegelschnitte, von Dr. R. Baltzer. Der Herausgeber des Archiv für Mathematik hat im 23. Bd. S. 385 ff. eine Stelle aus einem Briefe von Leibniz an Hugens in Erinnerung gebracht und zur Deutung derselben eine ausführliche Rechnung angestellt, aus der sich ergiebt, dass der daselbst von Leibniz ausgesprochene Satz der besondere Fall eines allgemeineren ist. Einen einfachen Beweis dieses Satzes, sowie einer von Hugens angedeuteten Modification desselben, beide in allgemeinerer Fassung, erlaube ich mir im Folgenden mitzutheilen. Die Stelle selbst (Leibnizens math. Schriften, herausgeg. von Gerhardt II. S. 55) lautet nach Wiederherstellung von $+\frac{1}{5}t^5$ statt $\pm\frac{1}{3}t^5$, welches ein Druckfehler der letzen Ausgabe dieses Briefs*) ist:

„*Sector comprehensus arcu sectionis conicae a vertice incipiente et rectis ex centro ad ejus extrema ductis, aequatur rectangulo sub semilatere transverso et recta* $t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ *etc. posito t esse portionem tangentis in vertice, inter verticem et tangentem* †) *alterius extremi interceptam, et rectangulum sub dimidiis lateribus recto et transverso (id est quadratum a semiaxe transverso) esse unitatem. Est autem* $\pm$ *in hyperbola* $+$ *in ellipse vel circulo* —.

†) Hugens hat bemerkt: *Secantem.*"

Um die Worte Leibnizens, an denen der Herausgeber des Archivs Anstoss genommen hat, und die mir ebenfalls der Verbesserung zu bedürfen schienen, zu verstehen, braucht man sich nur zu erinnern, wie mein verehrter Lehrer Herr Professor Drobisch bemerkt, dass in der Sprache der ältern Geometer *latus transversum* die grosse Axe, *latus rectum* der Parameter ist, *axis transversus* (hier statt *axis conjugatus* gesetzt**) die zweite Axe des Kegelschnitts bedeutet, und dass, wenn das Quadrat über der zweiten Axe als Flächeneinheit angenommen wird, die zweite Axe selbst die Längeneinheit ist, wonach der erwähnte Tangentenabschnitt gemessen wird.

*) Er ist schon früher abgedruckt in *Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae, ed. Uylenbroek. Hagae* 1833. *p.* 39.

**) Wie in der That in Leibnizens *historia et origo calc. differ.*, herausgeg. v. Gerhardt (Hannover 1846) p. 12 steht, wo der Satz fast mit denselben Worten, wie im Briefe an Hugens, angeführt wird.

Die Variante *secantem* für *tangentem*, welche Hugens hinzugefügt hat, und deren Sinn Herr Grunert in Zweifel zieht, ist in der That zulässig, wenn man zugleich im Satze *semirectangulo* für *rectangulo* substituirt.

Der Satz von Leibniz gilt, wie Herr Grunert gefunden hat, auch dann, wenn die Halbaxen des Kegelschnitts durch irgend ein Paar conjugirte Halbmesser desselben ersetzt werden. Derselben Erweiterung ist der Satz von Hugens fähig.

Um die angeführten Sätze zu beweisen, kann man sich der Formel $\frac{1}{2} \sin\alpha\,(xdy - ydx)$ für das Increment OMM' eines Flächensectors OAM bedienen, worin x und y die Coordinaten von M sind, deren Anfang O ist und deren Richtungen OA und OB den Winkel α einschliessen.

1. Sind $OA = a$ und $OB = b$ conjugirte Halbmesser einer Ellipse, so ist für jeden Punkt M derselben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0,$$

folglich

$$OMM' = -\tfrac{1}{2} \sin\alpha \left(y + \frac{b^2x^2}{a^2y}\right) dx$$

$$= -\tfrac{1}{2} ab \sin\alpha \, . \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

und durch Integration

$$OAM = tr\,.\,OAB\,.\,\operatorname{arc}\cos\frac{x}{a}.$$

Bekanntlich ist das Dreieck OAB für alle conjugirten Halbmesser von gleicher Fläche, und zwar der $2\pi^{te}$ Theil der ganzen Ellipsenfläche.

2. Ist $\cos\varphi = \frac{x}{a}$, so ist $\sin\varphi = \frac{y}{b}$, $\operatorname{tang}\varphi = \frac{ay}{bx}$, folglich

$$OAM = tr\,.\,OAB\,.\,\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{ay}{bx}.$$

Sind insbesondere a und b die halben Axen, mithin α recht, so ist $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\widehat{AOM} = \operatorname{tang}\vartheta$ und

$$OAM = tr\,.\,OAB\,.\,\operatorname{arc}\operatorname{tang}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tang}\vartheta\right).$$

Vergl. Archiv f. Math. 23. S. 441 und 478.

Wird die Berührende an A von dem Vector OM in S geschnitten, so ist ohne Beschränkung $AS : y = a : x$, $\frac{ay}{bx} = AS : OB = s$, also

$$OAM = tr\,.\,OAB\,.\,\operatorname{arc}\operatorname{tang} s,$$

wie Hugens für den Fall behauptet, dass A ein Scheitel der Ellipse ist.

3. Ist $\cos 2\psi = \frac{x}{a}$, so ist $2\sin^2\psi = \frac{a-x}{a}$, $2\cos^2\psi = \frac{a+x}{a}$, $\operatorname{tang}\psi = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, daher

$$OAM = 2\,tr\,.\,OAB\,.\,arc\,tang\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Für irgend einen Punkt $x'y'$ der Berührenden an M ist

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

Für den Durchschnitt T derselben mit der Berührenden an A ist folglich

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\cdot\frac{AT}{OB} = 1$$

$$t = AT : OB = \frac{b}{a}\,\frac{a-x}{y} = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}},$$

mithin

$$OAM = 2\,tr\,.\,OAB\,.\,arc\,tang\,t,$$

wie Leibniz für den Fall behauptet, dass A ein Scheitel der Ellipse ist, und wie Herr Grunert allgemein nachgewiesen hat.

1*. Für die Hyperbel erhält man das analoge Resultat durch Vertauschung von b^2 mit $-b^2$, also

$$OMM' = \tfrac{1}{2}\,ab\,sin\,\alpha\,\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

und durch Integration von a bis x

$$OAM = \tfrac{1}{2}\,ab\,sin\,\alpha\,.\,log\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

$$OAM = tr\,.\,OAB\,.\,log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

2*. Da $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, so ist $log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = -\,log\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$, also

$$2\,log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = log\,\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}} = log\,\frac{1+\frac{ay}{bx}}{1-\frac{ay}{bx}},$$

und wenn s die obige Bedeutung behält,

$$OAM = tr\,.\,OAB\,.\,\tfrac{1}{2}\,log\,\frac{1+s}{1-s}.$$

3*. Wenn man $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ mit $1-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ multiplicirt und dividirt, und dabei $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, so wie $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\,t=1$ benutzt, worin t die obige Bedeutung hat, so erhält man

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = \frac{1+t}{1-t},$$

folglich

$$OAM = tr\,.\,OAB\,.\,log\,\frac{1+t}{1-t}.$$

4. Beide Sätze nach Leibnizens Art zusammengefasst geben vermöge der bekannten Reihen

$$\left\{\begin{matrix}\text{hyp.}\\ \text{ell.}\end{matrix}\right\} \; OAM = tr\,.\,OAB\,.\,(s \pm \tfrac{1}{3}s^3 + \tfrac{1}{5}s^5 \pm \tfrac{1}{7}s^7 + \ldots)$$
$$= 2\,tr\,.\,OAB\,.\,(t \pm \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 \pm \tfrac{1}{7}t^7 + \ldots),$$

worin $s = AS : OB$, $t = AT : OB$.

Bemerkenswerth sind die Relationen

$$(\text{hyp.})\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}} = \frac{1+t}{1-t}$$

$$(\text{ell.})\ arc\cos\frac{x}{a} = arc\,tang\,s = 2\,arc\,tang\,t.$$

(Der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig mitgetheilt durch Prof. Dr. Drobisch. Sitzungsber. Jahrg. 1855, II.)

XXIV. Bemerkung über unendliche Reihen. In meiner algebraischen Analysis habe ich das Rechnen mit divergenten Reihen aus dem Grunde als unzulässig bezeichnet, weil alle Rechnungen durch Gleichungen vermittelt werden und eine divergente Reihe keiner bestimmten Grösse gleich gesetzt werden darf. Dies halte ich heute noch für vollkommen richtig, glaube aber der Sache weit besser auf den Grund zu gehen, wenn ich in Folgendem nachweise, dass die Forderung, mit einer — gleichviel ob convergenten oder divergenten — unendlichen Reihe irgend eine Rechnungsoperation auszuführen, streng genommen, einen Widerspruch involvirt. Ich bitte dabei den geneigten Leser, sich auf jenen elementaren Standpunkt zu versetzen, der überhaupt noch keine unendliche Reihe gesehen hat.

Nach Dem, was die Elementararithmetik über die Bedeutung des Pluszeichens und über den Gebrauch der Parenthesen feststellt, kann

$$b - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$$

in Worte übersetzt nichts Anderes heissen als: „man addire die n-Grössen $a_1, a_2 \ldots a_n$, und nachdem man mit dieser Operation fertig geworden ist, ziehe man ihr Ergebniss von b ab“; wer dies zugiebt — und wer sollte das nicht — muss consequenter Weise den Ausdruck

$$b - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \textit{ in inf.})$$

folgendermassen aussprechen: „man addire die unendliche, d. h. die nicht endenwollende Reihe von Grössen $a_1, a_2 \ldots$ *in inf.*, und nachdem man diese Operation beendigt hat, subtrahire man ihr Ergebniss von b“. — Der Widerspruch ist hier so auffallend, dass er sich bei genauer Fassung schon in den Worten ausprägt; eine Operation erst in's Unendliche fortgehen lassen und dann noch von Dem reden, was hinterher kommen soll, ist — streng genommen — völlig absurd und nicht besser, als wenn man Jemandem zumuthete, eine Unendlichkeit zu leben und nachher deren Geschichte zu schreiben. — Ganz ebenso verhält es sich mit jeder anderen Operation, welche an die Stelle der oben angedeuteten Subtraction gesetzt werden könnte, und wir gelangen damit zu der bemerkenswerthen Thatsache, dass im Anfange der Reihentheorie eine ganze ähnliche unmögliche Forderung auftritt, wie sie in der Buchstabenrechnung bei den Ausdrücken $2 - 7$, $\sqrt{10}$ etc. zum Vorschein kommt. Das Mittel, dessen sich in solchen Fällen die Arithmetik bedient, nämlich die Bildung neuer Zahlen, ist be-

greiflicherweise hier nicht anwendbar, die Unmöglichkeit der geforderten Operation muss daher auf andere Weise eliminirt werden.

Nun erhellt aber unmittelbar, dass der oben nachgewiesene Widerspruch zu existiren aufhört, sobald sich die Möglichkeit zeigt, jene in's Unendliche fortlaufende Addition wirklich ausführen zu können; sei es nun, dass man direkt diejenige Summe anzugeben weiss, die bei wirklicher Ausführung der Addition herauskommen würde, sei es auch nur, dass man die Existenz einer solchen Summe nachzuweisen versteht. Mit andern Worten, so lange die Convergenz einer Reihe nicht entschieden ist, so lange hat es überhaupt gar keinen vernünftigen Sinn mit der Reihe rechnen zu wollen; schon das blose Hinschreiben eines Ausdrucks wie

$$m(1 + 1 . x + 1 . 2 . x^2 + 1 . 2 . 3 . x^3 + \ldots)$$

enthält einen ebenso grossen Widerspruch, als wenn Jemand für ein Polyeder

$$e = 5, \quad f = 6, \quad k = 20$$

gesetzt hätte, während $e + f = k + 2$ sein muss, bevor nur überhaupt von einem Polyeder die Rede sein kann.

Dass man diesen Widerspruch nicht gleich anfangs bemerkt hat, scheint mir übrigens an einem Principe zu liegen, welchem Viele, theils bewusst, theils unbewusst, gefolgt sind. Man hat nämlich gemeint, was für jede endliche Anzahl von Summanden gilt, wie z. B. der Satz

$$m(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = m a_1 + m a_2 + \ldots + m a_k,$$

muss auch für eine unendliche Menge von Summanden richtig bleiben, und damit war man flugs mitten in der Rechnung mit unendlichen Reihen. Abgesehen von der unlogischen Form seiner Schlussweise (nämlich: was von jedem E gilt, gilt auch von Nicht-E!), widerlegt sich das genannte Princip leicht durch bekannte Thatsachen; z. B. die Summe jeder endlichen Anzahl rationaler Summanden ist rational, die Summe einer unendlichen Menge solcher Summanden kann aber recht gut irrational sein, wie $e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} +$ etc. — Im Gegentheil muss man sagen, weil eine unendliche Reihe keine endliche Reihe, also etwas ganz Anderes ist, dürfen die für endliche Reihen geltenden Sätze nicht ohne Weiteres für unendliche Reihen in Anspruch genommen werden.

Schliesslich noch die Bemerkung, dass der oben geführte Nachweis eines Widerspruchs nichts mit der speciellen Natur der Summanden a_1, a_2, $a_3 \ldots$ zu schaffen hat; man kann sich unter diesen eben sowohl Zahlen als Ohm'sche Träger von Operationen vorstellen, der Widerspruch eines *post infinitum* bleibt immer. Damit fällt auch die von Ohm unaufhörlich wiederholte Behauptung, dass das Rechnen mit unendlichen Reihen im Allgemeinen von deren Convergenz unabhängig sei und dass letztere erst da in Frage komme, wo es sich um numerische Reihen handle.

SCHLÖMILCH.

XXV. Ueber die Entwickelung von *Arcsin x*. Da die im ersten Hefte S. 48 und 49 mitgetheilte Restbetrachtung für *Arcsin x* von Herrn Prof. Grunert im Archiv der Mathem. Bd. 26 Nr. 2 nach vielem überflüssigen Gerede feierlichst für null und nichtig erklärt worden ist, so nehme ich hier die Sache noch einmal auf, um zu zeigen, dass es nur einer kleinen Modification meiner Betrachtungsweise bedarf, um sie ohne Aufgabe des zu Grunde liegenden Princips vor allen und selbst Grunert'schen Einwän-

den sicher zu stellen. Zugleich will ich die Entwickelung von $Arcsin\, x$ vollständig und nachher noch eine neue Restuntersuchung geben.

I. Da man nach dem binomischen Satze schon die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots.$$

hat, aus welcher hervorgeht, dass $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem Mac Laurin'schen Satze entwickelbar sein muss, so lassen sich die Werthe $D\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $D^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ etc. für den speciellen Fall $x=0$ im Voraus angeben; es ist nämlich

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left\{D^n\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{(x=0)} = \frac{1.3.5\ldots.(n-1)}{2.4.6\ldots.n} \quad \text{für gerade } n.$$
$$= 0 \quad \text{für ungerade } n.$$

Wegen $D^m\, Arcsin\, x = D^{m-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ erhält man weiter

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m}\left\{D^m\, Arcsin\, x\right\}_{(x=0)} = \frac{1.3.5\ldots(m-2)}{2.4.6\ldots(m-1)}\,\frac{1}{m} \quad \text{für ungerade } m.$$
$$= 0 \quad \text{für gerade } m,$$

und damit sind die Coefficienten des Arcussinusreihe bestimmt.

Um noch den Rest zu ermitteln, halten wir uns an die im ersten Hefte bewiesene Formel

$$D^{n+1} Arcsin\, x = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\,(1-x)^n\sqrt{1-x^2}}\left\{1 - C_1\frac{1-x}{1+x} + C_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \ldots + (-1)^n C_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right\}$$

worin C_1, C_2, $C_3 \ldots C_n$ gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Coefficienten bezeichnen; in diesem Satze (und das ist das Princip) liegt ein Mittel, um die eingeklammerte Reihe, folglich auch $D^{n+1} Arcsin\, x$, zwischen zwei Grenzen einzuschliessen. Setzt man nämlich

$$S_p = 1 + \frac{1-x}{1+x} + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^p,$$

wählt $p \geqq n$ und x als positiven ächten Bruch, so liegt der absolute Werth jener eingeklammerten Reihe immer zwischen 0 und S_p, und man kann auf diesem Wege b e l i e b i g v i e l e solcher Grenzen finden; a. a. O. nahm ich $p=\infty$, wer sich damit nicht befreunden mag, nehme $p=n$ und setze zum Ueberflusse noch jedes der obigen Reihenglieder, mit Ausnahme des ersten, < 1, es ist dann der absolute Werth von

$$1 - C_1\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + C_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \ldots + (-1)^n C_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

zwischen 0 und $n+1$ enthalten, mithin

$$D^{n+1} Arcsin\, x = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\,(1-x^n)\sqrt{1-x^2}}\,\varepsilon\,(n+1),$$

wo ε einen nicht weiter bestimmbaren positiven oder negativen ächten Bruch bezeichnet. Nach der Formel

$$R_{n+1} = \frac{(1-\vartheta)^n x^{n+1}}{1.2.3\ldots n}\, f^{(n+1)}(\vartheta x), \qquad 1 > \vartheta > 0$$

wird nun für $f(x) = Arcsin\, x$

$$R_{n+1}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}\cdot\frac{\varepsilon x}{\sqrt{1-\vartheta^2x^2}}\cdot(n+1)\left(\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right)^n;$$

von den Faktoren rechter Hand ist der erste ein ächter Bruch, der bei unendlich wachsenden n die Null zur Grenze hat; der zweite Faktor bleibt immer eine endliche zwischen

$$+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ und } -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

enthaltene Grösse; im dritten Faktor sei zur Abkürzung

$$\frac{x-\vartheta x}{1-\vartheta x}=\xi,$$

dann ist ξ ein positiver ächter Bruch $< x$, mithin

$$(n+1)\,\xi^n < 1+\xi+\xi^2+\xi^3+\ldots+\xi^n < \frac{1}{1-\xi}$$

folglich $(n+1)\,\xi^n$ eine positive endliche Grösse, welche höchstens $=\frac{1}{1-x}$ werden könnte. Hieraus zusammen folgt, dass $Lim\, R_{n+1}$ bei unendlich wachsenden n gegen die Grenze Null convergirt, sobald x der Bedingung $1 > x > 0$ unterworfen ist.*) Zu demselben Resultate kann man auch ohne Kenntniss des Satzes

$$Lim\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}=0$$

gelangen, nur muss man in diesem Falle nachweisen, dass $Lim\,[(n+1)\,\xi^n]=0$ ist, was übrigens keine Schwierigkeit hat.**)

II. Ein anderer Weg zur Entwickelung von $Arcsin\, x$ und zur Discussion des Restes ist folgender. Wie schon Euler gezeigt hat und wie man leicht mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ verificiren kann, gilt für den $(n+1)^{ten}$ Differentialquotienten von $Arcsin\, x$ die Formel

$$D^{n+1}\, Arcsin\, x = D^n\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1.2.3\ldots n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left[x^n+\tfrac{1}{2}(n)_2\,x^{n-2}+\frac{1.3}{2.4}(n)_4\,x^{n-4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}(n)_6\,x^{n-6}+\ldots\right];$$

*) Wenn Herr Professor Grunert beim Lesen meines Artikels seine Aufmerksamkeit auf die Hauptsache statt auf Nebendinge gerichtet hätte, so würde er nicht von der „Verfehltheit der ganzen Betrachtung" gesprochen, sondern vielmehr bemerkt haben, dass diese Betrachtung auf einem völlig richtigen Grundgedanken beruht. Gleichwohl behält Herr Grunert mit seinem *errare humanum* vollkommen Recht, namentlich im Hinblick auf den mancherlei analytischen Nonsens, den er selber seiner Zeit hat drucken lassen.

**) Da $\xi < x$ ist, so wird $Lim\,[(n+1)\,\xi^n] < Lim\,[(n+1)\,x^n]$ und es bedarf daher nur des Nachweises, dass der letztere Grenzwerth verschwindet. Für das ächt gebrochene positive x kann man den Ausdruck $\frac{1}{1+y}$ setzen, worin y jedenfalls eine positive die Null übersteigende Grösse sein muss; man hat dann

$$(n+1)\,x^n=\frac{n+1}{(1+y)^n}<\frac{n+1}{1+ny+\frac{1}{2}n(n-1)y^2}$$

oder

$$(n+1)\,x^n<\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+y+\frac{1}{2}(n-1)y^2}$$

woraus für unendlich wachsende n sofort $Lim\,[(n+1)\,x^n]=0$ folgt.

woraus man für $x=0$ unmittelbar die Coefficienten der Arcussinus-Reihe erhält. Ferner beträgt die eingeklammerte Summe, x als positiv vorausgesetzt, weniger als

$$x^n + (n)_2 x^{n-2} + (n)_4 x^{n-4} + (n)_6 x^{n-6} + \ldots\ldots = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{2},$$

und es ist folglich, wenn ε einen nicht weiter bestimmbaren positiven ächten Bruch bezeichnet,

$$D^{n+1} Arcsin\, x = \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{2} \varepsilon$$
$$= \tfrac{1}{2}\varepsilon \frac{1.2.3\ldots n}{\sqrt{1-x^2}} \left\{\frac{1}{(1-x)^n} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^n}\right\}.$$

Diese Form von $D^{n+1} Arcsin\, x$ führt sogleich zu folgender Form des Restes

$$R_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon x}{\sqrt{1-\vartheta^2 x^2}} \left\{\left(\frac{x-\vartheta x}{1-\vartheta x}\right)^n + (-1)^n \left(\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right)^n\right\};$$

unter der Voraussetzung $1 > x > 0$ sind $\frac{x-\vartheta x}{1-\vartheta x}$ und $\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}$ ächte Brüche, deren successive Potenzen die Null zur Grenze haben, und da ferner der erste Faktor des obigen Ausdruckes eine endliche Grösse bleibt, so ergiebt sich $Lim\, R_{n+1} = 0$ wie vorhin.

SCHLÖMILCH.

XXVI. Ueber ein bestimmtes vielfaches Integral. Im Februarhefte von 1856 seines Journal's für Mathematik giebt Liouville folgende elegante Entwickelung des $(n-1)$-fachen Integrales:

$$S = \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots e^{-\left(x+y+\ldots+\frac{r^n}{xy\ldots}\right)} x^{\frac{1}{n}-1} y^{\frac{2}{n}-1} \ldots dx\, dy \ldots$$

Man betrachte einen speciellen Fall etwa $n=4$ und differenzire die betreffende Gleichung

$$S = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x+y+z+\frac{r^4}{xyz}\right)} x^{\frac{1}{4}-1} y^{\frac{2}{4}-1} z^{\frac{3}{4}-1} dx\, dy\, dz$$

in Beziehung auf r; diess giebt

$$\frac{dS}{dr} = -4r^3 \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x+y+z+\frac{r^4}{xyz}\right)} x^{\frac{1}{4}-1} y^{\frac{2}{4}-1} z^{\frac{3}{4}-1} \frac{dx\, dy\, dz}{xyz}.$$

Mittelst der Substitution

$$x = \frac{r^4}{yz.\xi},$$

worin ξ die neue Variabele bezeichnet, erhält man

$$\frac{dx}{x} = -\frac{d\xi}{\xi}, \quad x^{\frac{1}{4}-1} = r^{-3} y^{-\frac{1}{4}+1} z^{-\frac{1}{4}+1} \xi^{-\frac{1}{4}+1},$$

den Grenzen $x=0$ und $x=\infty$ entsprechen die neuen Grenzen $\xi=\infty$, $\xi=0$, und nach Umtausch derselben wird

$$\frac{dS}{dr} = -4\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\frac{r^4}{yz\xi}+y+z+\xi\right)}\, y^{\frac{1}{4}-1}\, z^{\frac{2}{4}-1}\, \xi^{\frac{3}{4}-1}\, dy\, dz\, d\xi;$$

da in einem bestimmten Integrale nichts auf die Wahl der Buchstaben ankommt, womit die Variabelen der Integration bezeichnet werden, so kann man rechter Hand x, y, z für y, z, ξ schreiben und dann ist das dreifache Integral wieder $= S$ also

$$\frac{dS}{dr} = -4S \text{ mithin } S = Ce^{-4r}.$$

Die Constante C bestimmt sich durch die Specialisirung $r = 0$, bei welcher

$$S = \Gamma(\tfrac{1}{4})\,\Gamma(\tfrac{2}{4})\,\Gamma(\tfrac{3}{4})$$

wird; es ist folglich

$$S = \Gamma(\tfrac{1}{4})\,\Gamma(\tfrac{2}{4})\,\Gamma(\tfrac{3}{4})\, e^{-4r}.$$

Auf gleiche Weise lässt sich das allgemeine $(n-1)$fache Integral behandeln; man findet als Werth desselben

$$S = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) e^{-nr}$$

oder kürzer nach einem bekannten Satze von den Gammafunctionen

$$S = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nr}.$$

Man hat demnach die bemerkenswerthe Integralformel

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots e^{-\left(x+y+\ldots+\frac{r^n}{xy\ldots}\right)}\, x^{\frac{1}{n}-1}\, y^{\frac{2}{n}-1}\ldots dx\, dy\ldots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nr},$$

worin die Anzahl der Variabeln $x, y, z\ldots$ und mithin auch die der Integrationen $= n-1$ ist.

Aus der vorigen Formel leitet Liouville den Gauss'schen Satz von den Gammafunktionen folgendermaassen ab. Wenn man beide Seiten der Gleichung mit $r^{\mu-1}\,dr$ multiplicirt und zwischen den Grenzen $r = 0$ bis $r = \infty$ integrirt, so hat man bei Voranstellung der auf r bezüglichen Integration

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots e^{-(x+y+\ldots)}\, x^{\frac{1}{n}-1}\, y^{\frac{2}{n}-1}\ldots dx\, dy \int_0^\infty r^{\mu-1}\, e^{-\frac{r^n}{xy\ldots}}\, dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty r^{\mu-1}\, e^{-nr}\, dr$$

Linker Hand ist das nach r genommene Integral von der Form

$$\int_0^\infty r^{\mu-1}\, e^{-hr^n}\, dr$$

und geht für $r^n = \zeta$ über in

$$\frac{1}{n}\int_0^\infty \zeta^{\frac{\mu}{n}-1}\, e^{-h\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma(\frac{\mu}{n})}{h^{\frac{\mu}{n}}};$$

rechter Hand ist der Werth des Integrales

$$=\frac{\Gamma(\mu)}{n^{\mu}}.$$

Nach Substitution dieser Ausdrücke sowie des Werthes $\frac{1}{h}=xyz\ldots$ reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$\frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-(x+y+\ldots)}\,x^{\frac{\mu+1}{n}-1}\,y^{\frac{\mu+2}{n}-1}\ldots dx\,dy\ldots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma(\mu)}{n^{\mu}}.$$

Die linke Seite zerfällt in ein Produkt einfacher Integrale, und die nunmehrige Gleichung

$$\frac{1}{n}\cdot\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(\mu)}{n^{\mu}\sqrt{n}}$$

stellt den erwähnten Gauss'schen Satz dar.

XXVII. Ueber das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty\frac{\cos 2\beta x}{\alpha^2+x^2}\,e^{-\gamma^2x^2}\,dx.$$

Das vorstehende Integral, welches die bekannten Integrale

$$\int_0^\infty\frac{\cos 2\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx\quad\text{und}\int_0^\infty e^{-\gamma^2x^2}\cos 2\beta x\,dx$$

als specielle Fälle in sich enthält, lässt sich durch folgende Transformationen auf eine sehr bekannte Transcendente zurückführen.

Statt des unter dem Integralzeichen vorkommenden Factors $\frac{1}{\alpha^2+x^2}$ setzen wir das Integral

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha^2+x^2)u}\,du$$

und erhalten für das ursprüngliche Integral, dessen unbekannter Werth vorläufig M heissen möge,

$$M=\int_0^\infty\cos 2\beta x\,e^{-\gamma^2x^2}\,dx\int_0^\infty e^{-(\alpha^2+x^2)u}\,du$$

oder bei umgekehrter Anordnung der Integrationen

$$M=\int_0^\infty e^{-\alpha^2u}\,du\int_0^\infty e^{-(\gamma^2+u)x^2}\cos 2\beta x\,dx.$$

Nach einer bekannten Formel giebt diess

$$M=\int_0^\infty e^{-\alpha^2 u}\,du\,\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\gamma^2+u}}\,e^{-\beta^2:(\gamma^2+u)};$$

daraus wird mittelst der Substitution $u=\xi^2-\gamma^2$

$$M=\sqrt{\pi}\,e^{\alpha^2\gamma^2}\int_\gamma^\infty e^{-\alpha^2\xi^2-\left(\frac{\beta}{\xi}\right)^2}\,d\xi$$

und statt dessen schreiben wir

$$M=\sqrt{\pi}\,e^{\alpha^2\gamma^2-2\alpha\beta}\,N,\qquad N=\int_\gamma^\infty e^{-\left(\alpha\xi-\frac{\beta}{\xi}\right)^2}\,d\xi.$$

In dem mit N bezeichneten Integrale benutzen wir die Substitution

$$\alpha\xi-\frac{\beta}{\xi}=\eta,\ \text{mithin}\ \xi=\frac{\eta\pm\sqrt{\eta^2+4\alpha\beta}}{2\alpha},$$

und setzen die Constanten α, β, γ als positiv voraus. Dieser Bestimmung zufolge darf das vorkommende Radical nur mit dem positiven Vorzeichen genommen werden, weil sonst ξ, im Widerspruche mit den dafür geltenden positiven Integrationsgrenzen γ und ∞, negativ ausfallen würde. Demgemäss ist

$$N=\frac{1}{2\alpha}\int_{\alpha\gamma-\frac{\beta}{\gamma}}^\infty e^{-\eta^2}\left(1+\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+4\alpha\beta}}\right)d\eta;$$

wir beziehen die Integration auf beide Theile des Faktors von $d\eta$, setzen im zweiten Integrale

$$\sqrt{\eta^2+4\alpha\beta}=\zeta,\ \text{woraus}\ \frac{\eta\,d\eta}{\sqrt{\eta^2+4\alpha\beta}}=d\zeta,$$

und erhalten

$$N=\frac{1}{2\alpha}\int_{\alpha\gamma-\frac{\beta}{\gamma}}^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta+\frac{1}{2\alpha}\,e^{4\alpha\beta}\int_{\alpha\gamma+\frac{\beta}{\gamma}}^\infty e^{-\zeta^2}\,d\zeta.$$

Damit ist N auf die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Wärmetheorie oft gebrauchte Transcendente

$$\int_\mu^\infty e^{-t^2}\,dt$$

zurückgeführt, die wir kurz mit $T(\mu)$ bezeichnen wollen; wir haben nämlich

$$N=\frac{1}{2\alpha}\left\{T\left(\alpha\gamma-\frac{\beta}{\gamma}\right)+e^{4\alpha\beta}\,T\left(\alpha\gamma+\frac{\beta}{\gamma}\right)\right\}$$

und daraus folgt für M der Werth

$$M=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\,e^{\alpha^2\gamma^2}\left\{e^{-2\alpha\beta}\,T\left(\alpha\gamma-\frac{\beta}{\gamma}\right)+e^{+2\alpha\beta}\,T\left(\alpha\gamma+\frac{\beta}{\gamma}\right)\right\}.$$

Stellen wir endlich die erste und letzte Form von M zusammen und lassen 2β durch β vertreten, so gelangen wir zu dem Resultate

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\, e^{-\gamma^2 x^2}\, dx$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\, e^{\alpha^2\gamma^2}\left\{e^{-\alpha\beta}\, T\left(\alpha\gamma-\frac{\beta}{2\gamma}\right)+e^{+\alpha\beta}\, T\left(\alpha\gamma+\frac{\beta}{2\gamma}\right)\right\}.$$

Durch Differentiation in Beziehung auf β unter Rücksicht auf die Gleichung $dT(\mu) = -e^{-\mu^2}\, d\mu$ ergiebt sich noch

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\, e^{-\gamma^2 x^2}\, dx$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{\alpha^2\gamma^2}\left\{e^{-\alpha\beta}\, T\left(\alpha\gamma-\frac{\beta}{2\gamma}\right)-e^{+\alpha\beta}\, T\left(\alpha\gamma+\frac{\beta}{2\gamma}\right)\right\}.$$

Mit Hülfe der ziemlich ausgedehnten Tafel, welche Kramp in seiner Abhandlung über die astronomische Sttahlenbrechung gegeben hat, und bei Anwendung der leicht zu beweisenden Relation

$$\int_{-\mu}^\infty e^{-t^2}\, dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\, dt - \int_\mu^\infty e^{-t^2}\, dt$$

d. h.

$$T(-\mu) = \sqrt{\pi} - T(\mu)$$

hat die numerische Berechnung der in Rede stehenden Integrale nicht die mindeste Schwierigkeit. Für $\gamma = 0$ wird $T(\infty) = 0$, $T(-\infty) = \sqrt{\pi}$ und dann erhält man ein paar längst bekannte Formeln.

XXVIII. Die Erzeugung eines luftverdünnten Raumes wird in manchen Fällen nach Brunner (Mittheilungen der naturforsch. Gesellsch. in Bern 1854; Poggend. Annal. Bd. 94. S. 523), z. Th. auf vortheilhaftere und wirksamere Weise als durch die Luftpumpe, durch Absorption eines leicht absorbirbaren Gases bewerkstelligt werden können; ein Mittel, dessen auch schon Andrews (Poggend. Ann. Bd. 88. S. 309.) und Fontaine (Compt. rend. Mars 1853) Erwähnung gethan haben. Selbstverständlich können im Allgemeinen hierzu nur solche Gase gebraucht werden, welche wenig und gar keine Einwirkung auf das Material des Apparates und die dem Versuche noch anderweitig ausgesetzen Substanzen haben, und es werden daher Kohlensäure und etwa noch Ammoniak sich als die geeignetsten Gase herausstellen. Kommt es behufs einer Demonstration zunächst und hauptsächlich nur auf Herstellung eines möglichst luftleeren Raumes an, so kann man hierzu ein gewöhnliches starkes Bierglas verwenden, auf dessen sorgfältig abgeschliffenem und mit etwas Fett bestrichenem Rande ein metallener Deckel luftdicht aufsitzt. Der Deckel hat in der Nähe des inneren Randes vom Glase eine Oeffnung, welche nach Aussen mit einem kurzen Ansatze versehen ist und mit einem konisch geformten, gut eingeschliffenen metallenen Stopfen verschlossen werden kann. Durch den Stopfen ist eine Glasröhre von etwa 2 Millim. Weite im Lichten geführt, an deren nach Aussen etwas schief gerichtetem Ende eine Kugel angeblasen ist. Der an-

dere für das Innere des Glases bestimmte Theil der Röhre ist an seinem untern Ende offen und etwas nach entgegengesetzter Seite zu gebogen. Durch den Deckel ist noch eine zweite, zweischenklige Glasröhre luftdicht geführt, deren längerer ausserhalb des Glases herabsteigender Schenkel 30 Zoll lang ist und eine Barometerscale trägt. In das Glas wird ein auf drei Füsschen von Glas oder Blei stehendes Schälchen gesetzt, welches mittels eines daran angebrachten Messingdrahtes bequem eingestellt werden kann, und auf welchem vorher etwa 4 Gramm trockner, gut gebrannter Aetzkalk auf einer Unterlage von 2 oder 3 Blättern Fliesspapier ausgebreitet worden ist. Vor dem Einsetzen des Schälchens werden auf den Boden des Glases 40—50 Grammen englische Schwefelsäure gegossen. Die Oeffnung des Deckels, welche für die mit der Kugel versehene Glasröhre bestimmt ist, verschliesst man zuerst in gewöhnlicher Weise mit einem durchbohrten Korke, durch welchen eine Glasröhre aus einem Kohlensäureentwickelungsapparat bis nahe an die Oberfläche der Schwefelsäure herabgeführt ist. Nachdem nun das Glas mit Kohlensäure gefüllt und man sicher ist, dass alle atmosphärische Luft durch die Barometerröhre hindurch ausgetrieben worden, wofür einige vorläufige Versuche angestellt werden können, verschliesst man die untere Oeffnung der Barometerröhre durch ein darunter gesetztes Gefäss mit Quecksilber, dessen Oberfläche bis an das Nullzeichen der Röhre steht. Hierauf wird die Röhre, durch welche das Gas einströmte, herausgenommen und dafür die mit der Kugel versehene und mit Wasser oder Kalilauge gefüllte Röhre luftdicht eingesetzt. Durch Erhitzung der Kugel wird die Flüssigkeit derselben auf das mit Aetzkalk belegte Schälchen getrieben, wobei das Fliesspapier eine allseitigere Verbreitung der Flüssigkeit und eine gleichmässigere Löschung des Kalkes bewirkt. Das auf diese Weise aus dem Aetzkalk entstandene Kalkhydrat absorbirt nun sehr begierig die Kohlensäure, wie aus dem alsbaldigen Steigen des Quecksilbers in der Barometerröhre ersichtlich wird. Bei gehöriger Anordnung des Apparates von den bemerkten Dimensionen ist binnen 5—6 Minuten durch Absorption der Kohlensäure eine Verdünnung bis gegen 12 Millim. Barometerstand erreicht. Die übrige Spannung rührt noch von dem gleichzeitig mit entwickelten Wasserdampfe her, welcher nun, allerdings in einer etwas längern Zeit (1½—2 Stunden), von der Schwefelsäure grösstentheils aufgenommen wird, so dass dann das Quecksilber sehr nahe dem Barometerstande gleich steht.

Die oben vorausgesetzte vollständige Verdrängung der atmosphärischen Luft durch die Kohlensäure lässt *a priori* einige Zweifel bezüglich der Erreichung eines so hohen Grades von Verdünnung aufkommen, indessen ist eine Verdünnung bis auf 1 Millim. Unterschied zwischen dem Barometerstande und der Quecksilberprobe thatsächlich auf diesem Wege erreicht worden.

Der eben beschriebene Apparat lässt sich zur Anstellung anderer Versuche bequemer einrichten. Man kann sich hierbei einer grösseren Glasglocke bedienen, welche mit ihrem gut abgeschliffenen Rande auf einem ebenen Teller luftdicht aufgesetzt wird. Die Glocke enthält oben die mit einer Messingfassung umkleidete Oeffnung, durch welche die Röhre aus dem Kohlensäureentwickelungsapparat lose gesteckt wird, und welche dann durch die mit der Kugel versehene Röhre auf dieselbe oben beschriebene Weise luftdicht verschlossen werden kann. Aetzkalk und Schwefelsäure werden in besonderen übereinanderstehenden Schälchen vorher eingesetzt

und ebenso werden eine abgekürzte Barometerprobe, wie sie unter der Glocke einer Luftpumpe eingestellt zu werden pflegt, sowie die Gegenstände, welche dem luftverdünnten Raume ausgesetzt werden sollen, auf einem besonderen Tischchen darüber oder daneben unter der Glocke aufgestellt.

Die aus möglichst dichtem kohlensauren Kalk (am besten Marmor) und Salzsäure entwickelte Kohlensäure leite man, ehe sie in die Glocke tritt, durch eine Waschflasche mit englischer Schwefelsäure, welche Wasser und übergerissene Salzsäure zurückhält. Wendet man einen Gasentwickelungsapparat und eine Waschflasche nicht grösser als nöthig ist an, so hat man den Vortheil, nicht zu viel atmosphärische Luft vorher austreiben zu müssen.

Dieser Apparat hat vor dem der Luftpumpe jedenfalls den Vorzug, dass er leichter an jeden beliebigen Ort hingetragen werden kann; doch ist es wohl kaum nöthig zu bemerken, dass derselbe nicht in allen Fällen die Luftpumpe zu ersetzen im Stande ist, namentlich dann nicht, wo es auf möglichst rasch zu bewirkende Luftverdünnung ankommt.

Wollte man für dieselben Zwecke Ammoniakgas verwenden, so würde als Absorptionsmittel sowohl für dasselbe als auch für den Wasserdampf die englische Schwefelsäure gleichmässig dienen können; dieselbe würde nach dem Einleiten des Gases auf dieselbe Weise vermittels der Röhre mit der Kugel in den Apparat hineingebracht werden. Die Anwendung dieses Gases hat indess für viele Fälle etwas umständlicheres.

XXIX. Die Apparate zum Experimentiren mit Knallgas sind in der Regel ziemlich complicirt, daher nicht ohne erhebliche Kosten herzustellen, sowie auch nicht besonders leicht zu handhaben und zu reguliren. Eine eben so einfache wie gefahrlose Vorrichtung, die von jedem Laboranten selbst ohne bedeutende Kosten hergestellt werden kann, hat Prof. Ineichen in Luzern angegeben, (Poggend. Ann. Bd. 95. S. 334). Dieselbe besteht im Wesentlichen aus einem Fläschchen mit etwas weitem Halse (von der Form sogenannter Opodeldocfläschchen), welches bis an den eingepassten Kork mit Wasser gefüllt ist. Durch den Kork gehen zwei Glasröhren, die erstere ist ziemlich bis an den Boden des Glases oder doch einige Centimeter bis unter die Oberfläche des Wassers geführt, an dem äusseren Ende rechtwinklig gebogen und mittelst einer Kautschukröhre mit einer Messingröhre verbunden, die mit einem Hahne versehen ist und mit einem Gasometer oder dem Behältniss, in welchem sich das Gas befindet, in Verbindung steht. Die zweite durch den Kork der Flasche gesteckte Röhre endet unmittelbar an der inneren Grundfläche des Korkes. An dieser Stelle ist der Kork etwas ausgeschnitten, so dass zwischen diesem Theil der untern Korkfläche und der Wasseroberfläche ein kleiner wasserleerer Raum sich befindet, dessen obere Fortsetzung die letzterwähnte zweite Röhre, welche ebenfalls umgebogen ist, bildet. Mit dieser Röhre ist vermittelst einer Kautschukröhre noch eine zweite etwa 4 Decimeter lange und 1 Millimeter weite Glasröhre verbunden und an diese wieder eine Löthrohrspitze gesteckt.

Wird auf das Gasgemenge im Gasometer ein Druck ausgeübt, so tritt dasselbe durch die erste Röhre unter das Wasser im Glase, sammelt sich in dem kleinen Raume unter der zweiten Röhre und tritt durch dieselbe bis an die Mündung der Löthrohrspitze, wo es angezündet wird. In dieser

Flamme können die bekannten Versuche über das Siderallicht, die Schmelzung strengflüssiger Metalle, Verbrennung des Eisens etc. gefahrlos vorgenommen werden, indem die Flamme nicht in den Gasbehälter zurücktreten, sondern nur bis zu dem kleinen, unter dem Ende der zweiten Röhre und dem Korke befindlichen Gasvolum gelangen kann. Dasselbe lässt sich aber so klein machen, dass eine Explosion nicht zu besorgen ist. Beträgt es bis gegen 27 Cubikcentimeter, so erhält das Glas durch Zurücksteigen der Flamme nur eine kleine gefahrlose Erschütterung. Die Erschütterung wird kaum bemerkbar, wenn das Volum bis auf 10 — 12 Cubikcentimeter herabgebracht wird. Zu klein diesen Raum zu machen ist deshalb nicht rathsam, weil dann die im Glase aufsteigenden Gasblasen leicht Wasser in die zweite Röhre mit hinauftreiben.

XXX. Das sogenannte **Reaumur'sche Porcellan** oder **entglaste, undurchsichtig gewordene, Glas** wird bekanntlich dadurch erhalten, dass gewöhnliches Glas nach dem Schmelzen einer sehr langsamen Erkaltung, oder einer andauernden Erweichung unterworfen wird. Dasselbe ist weniger dicht aber beträchtlich härter als das durchsichtige, indem es das letztere leicht ritzt, und giebt am Stahl Funken; es ist noch spröde, doch viel weniger, als das durchsichtige; leitet die Wärme schlecht, dagegen die Elektricität sehr merklich, etwa in einem Grade, wie Marmor, jedenfalls besser als das gewöhnliche Glas und Porcellan. Das undurchsichtige Glas ist keineswegs so unschmelzbar wie Porcellan, schmilzt im Gegentheil eben so leicht wie das gewöhnliche. Jedes Glas kann entglast oder undurchsichtig gemacht werden, das Kaliglas allerdings schwieriger als das Natronglas. Das dreifach kieselsaure Natron $NaO, 3SiO^3$ entglast sich unter allen Silicaten am leichtesten.

Ueber die Constitution dieses entglasten Glases sind i. J. 1830 von Dumas und 1845 von Leblanc vergleichende Analysen von durchsichtigem und undurchsichtigem Glase angestellt worden. Dieselben betrachten letzteres als eine bestimmte chemische Verbindung, welche mehr Kieselerde und weniger Alkali enthält, als das durchsichtige, und somit auch strengflüssiger ist. Die Entglasung wäre demnach eine Krystallisation des Glases in Folge der Bildung bestimmter Verbindungen, welche bei der zur Zeit der Entglasung stattfindenden Temperatur unschmelzbar sind, und diese relative Unschmelzbarkeit würde entweder durch Verflüchtigung der alkalischen Basis herbeigeführt, oder durch blose Vertheilung der Bestandtheile des Glassatzes, wobei die Alkalien mehr in den Theil übergehen, welcher den amorphen Zustand beibehält. Dass das Reaumur'sche Porcellan eine krystallisirte Glasmasse ist, damit stimmen auch andere Chemiker, sowie auch die Glasfabrikanten überein, dass diese Krystallisation aber durch andere Vertheilung der Bestandtheile des Glassatzes herbeigeführt werde, wird von Einigen, namentlich von Pelouze (*Comptes rend. Juin* 1855. Nr. 26) in Zweifel gezogen. Derselbe hält nach den Resultaten seiner Analysen, welche die Zusammensetzung des krystallisirten und amorphen Glases für identisch herausstellten, das erstere nur für eine andere Modification des gewöhnlichen Glases vielleicht in Folge einer anderen Wärmecapacität und betrachtet somit die Entglasung lediglich als eine physische Veränderung des Glases. Er glaubt seine Ansicht noch unterstützt durch den Umstand, dass während der langsamen Erkaltung des Glases beim Entglasen

keine Blasen, Streifen etc. als Anzeichen eingetretener Ungleichartigkeit in der Zusammensetzung der Glasmasse entstehen, dass ferner das Gewicht der Glasmasse durch die Entglasung nicht verändert wird. Diese angeführten Umstände sind indessen noch nicht entscheidend genug. Man kann, wie Dumas (a a. O.) nachträglich bemerkt, den Vorgang der Entglasung sich so vorstellen, dass die zuerst entstandenen Krystalle und die Fortsetzung der Erkaltung Veranlassung zur Bildung und Absonderung ganz verschiedener Krystalle von verschiedener Zusammensetzung geben. So wie also in der scheinbar homogenen Masse durchsichtigen Glases verschiedene und bestimmte, aber zusammengeschmolzene Silicate vorkommen, ebenso können in den faserigen Massen von entglastem Glase neben einander Nadeln von krystallisirten Silicaten vorhanden sein, welche eine bestimmte Zusammensetzung haben, unter einander aber vollkommen verschieden sind. Diese undurchsichtigen Glasmassen werden dann, wieder geschmolzen, auch dasselbe durchsichtige Glas von derselben Zusammensetzung geben, wie dasjenige, woraus sie zuerst entstanden. Dumas vergleicht die Krystallmassen des entglasten Glases mit gewissen Gemengen von festen Fettsäuren, welche durch Schmelzen ebenfalls eine homogene Flüssigkeit geben, beim Erstarren aber eine faserige Masse bilden, in der das Auge nichts Ungleichartiges erkennt, obgleich jede Säure sich von der andern in bestimmten Krystallen abgeschieden hat. Diese Massen kann man, wie das krystallisirte Glas, beliebig oft umschmelzen und wieder erstarren lassen, wobei sich dieselben Erscheinungen wiederholen.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

XI.

Ueber die Bernoulli'sche Funktion und deren Gebrauch bei der Entwickelung halbconvergenter Reihen.

Von O. Schlömilch.

Unter den zahlreichen Transformationen endlicher und unendlicher Reihen, welche Stirling in seinem *Methodus differentialis sive tractatus de summatione serierum*, *Londini* 1730, entwickelt hat, ist besonders die Formel

$$l1 + l2 + l3 + \ldots + lp = \tfrac{1}{2} l(2\pi) + (p + \tfrac{1}{2})\, lp - p$$
$$+ \frac{B_1}{1\,.\,2}\frac{1}{p} - \frac{B_3}{3\,.\,4}\frac{1}{p^3} + \ldots\ldots$$

zu einer gewissen Berühmtheit gelangt, weil sie namentlich bei grossen p, wie sie z. B. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommen, ein leichtes Mittel zur Beurtheilung des Werthes von $l(1\,.\,2\,.\,3\ldots p)$ an die Hand giebt. Die oben erwähnte, nach Potenzen von $\frac{1}{p}$ fortschreitende Reihe besitzt die Eigenthümlichkeit, dass sie anfangs zwar gut convergirt, späterhin aber jedesmal divergirt (weil die Bernoulli'schen Zahlen B_1, $B_3\ldots$ rascher als eine geometrische Progression wachsen), und es ist daher gerade hier eine genaue Untersuchung des Restes unerlässlich, da man sonst nicht einmal diejenige Gliederzahl anzugeben wüsste, deren Summe dem Betrage von $l(1\,.\,2\ldots p)$ am nächsten liegt. Eine ähnliche Bemerkung trifft die allgemeinere Formel

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(p) = Const. + \int^{(x=p)} f(x)\,dx + \tfrac{1}{2} f(p)$$
$$+ \frac{B_1}{1\,.\,2} f'(p) - \frac{B_3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} f'''(p) + \ldots,$$

die gewöhnlich als die Euler'sche Summenformel bezeichnet wird, obschon sie nur die Folge eines von Mac Laurin im *Treatise on fluxions* (pag. 672) entwickelten Satzes ist. Da auch diese Reihe anfangs zu convergiren und späterhin divergent zu werden pflegt, also unter die sogenannten halbconvergenten Reihen gehört, so bedarf es wiederum einer Untersuchung des Ergänzungsgliedes, und diese ist bereits von mehreren Analytikern auf verschiedene Weisen angestellt worden.

Den ersten derartigen Versuch findet man nach Erchinger's Vorgange ausgeführt in Ettingshausen's Vorlesungen über höhere Mathematik, und zwar wird dort die Restbestimmung auf die Integration einer gewissen Differentialgleichung zurückgebracht. Da aber letz-

tere nur bei vorausgesetzter Convergenz der Reihe besteht und gerade dieser Umstand nicht immer stattfindet, so kann jene Restbestimmung nicht als eine allgemein gültige angesehen werden.

Eine von Poisson zu dem nämlichen Zwecke angestellte Untersuchung geht von dem Satze aus, dass jede Funktion $f(x)$ innerhalb der Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$ durch die Reihe

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\frac{\pi x}{\lambda} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{\lambda} + \dots$$
$$+ b_1 \sin\frac{\pi x}{\lambda} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{\lambda} + \dots$$

ausgedrückt werden kann, wenn die Coefficienten a_k und b_k mittelst der Formeln

$$a_k = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{+\lambda} f(u)\cos\frac{k\pi u}{\lambda}\,du, \quad b_k = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{+\lambda} f(u)\sin\frac{k\pi u}{\lambda}\,du$$

bestimmt werden. Abgesehen von dem Umstande, dass dieser Satz der Sache selber etwas fremd sein dürfte, ist auch das Endresultat der übrigens äusserst scharfsinnigen Deduction kein völlig allgemeines, denn nur für den Fall, dass $f^{(2n)}(x)$ innerhalb des Intervalles, welches x bei der Summirung durchläuft (oben 1 bis p) sein Vorzeichen nicht ändert, kommt es zu einer in endlicher Form darstellbaren Restbestimmung.

Wie in vielen Theilen der Wissenschaft, so hat auch hier Jacobi den entscheidenden Schritt gethan indem er zeigte, dass die Discussion des Restes auf die Betrachtung einer gewissen ganzen rationalen und algebraischen Function zurückkommt (*De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae*, *Crelle's Journ.* Bd. 12, pag. 263); er leitete daraus eine kurze Ausdrucksweise des Restes unter der Annahme her, dass x auf ein Intervall beschränkt wird, innerhalb dessen die Summen $\Sigma f^{(2n)}(x)$ und $\Sigma f^{(2n+2)}(x)$ beide das nämliche Vorzeichen behalten.

Auch dieses Resultat ist nicht allgemein, und es blieb daher immer noch die Frage, ob nicht eine Restbestimmung möglich sei, bei welcher hinsichtlich der Function $f(x)$ nur die eine unumgängliche Bedingung der Continuität von $f(x), f'(x), f''(x) \dots$ innerhalb des dem x ertheilten Spielraumes gestellt würde. Die Antwort hierauf hat Malmstén gegeben (Crelle's Journal Bd. 35, pag. 55) und damit die Sache wohl ohne Zweifel zur vollständigen Erledigung gebracht. Der Ausgangspunkt der Malmstén-schen Untersuchung ist der nämliche wie bei Jacobi, aber eine genauere Discussion der vorhin erwähnten ganzen rationalen algebraischen Funktion führt zu einer von Jacobi nicht bemerkten Eigenschaft derselben, wodurch gerade die allgemeine Restbestimmung ermöglicht wird.

Wenn wir trotzdem diesen Gegenstand hier noch einmal aufnehmen, so geschieht diess aus einem doppelten Grunde. Der Jacobi-Malmstén'sche Gedankengang erheischt vielerlei einzelne Entwickelungen, namentlich Transformationen endlicher Reihen, unter denen sich die eigentliche Idee fast vergräbt; dagegen wird die Sache äusserst einfach, wenn man die bisher übersehene Bemerkung hinzubringt, dass jene algebraische Funktion, auf die zuletzt Alles hinauskommt, ein Differentialquotient ist — hieraus ergeben sich alle ihre Eigenschaften mit grösster Leichtigkeit. Von ganz anderer Seite her, ohne Zusammenhang mit der Mac Laurin'schen

Summenformel, ist die nämliche Funktion unter dem Namen der Bernoulli'schen Funktion betrachtet worden von Raabe in Crelle's Journal Bd. 42, pag. 348, und es wird daher die folgende Darstellung den weiteren Vortheil bieten, dass man auch die Raabe'schen Ergebnisse ihrer eigentlichen Quelle entfliessen sieht.

Die Bernoulli'sche Funktion.

I. Von dem Ausdrucke $v:(e^v-1)$, den wir im Folgenden immer mit $\chi(v)$ bezeichnen wollen, ist bekannt, dass er sich für $2\pi > v > -2\pi$ in eine nach Potenzen von v fortgehende Reihe verwandeln lässt, nämlich

$$1)\qquad \chi(v)=\frac{v}{e^v-1}=1-\tfrac{1}{2}v + \frac{B_1}{1.2}v^2-\frac{B_3}{1.2.3.4}v^4+\frac{B_5}{1.2\ldots6}v^6-\ldots,$$

worin $B_1, B_3, B_5\ldots$ die Bernoulli'schen Zahlen $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}\ldots$ bedeuten; man hat daher

$$2)\qquad \begin{cases}\chi(0)=0, & \chi'(0)=-\tfrac{1}{2},\\ \chi^{(2n)}(0)=(-1)^{n-1}B_{2n-1}, & \chi^{(2n+1)}(0)=0,\quad n>0.\end{cases}$$

Nach der bekannten Regel für die mehrfache Differentiation der Produkte ist ferner

$$D_v^m\left(v\frac{e^{vz}-1}{e^v-1}\right)=D_v^m\left[\chi(v)(e^{vz}-1)\right]$$
$$=\chi(v)z^m e^{vz}+(m)_1\chi'(v)z^{m-1}e^{vz}+(m)_2\chi''(v)z^{m-2}e^{vz}+\ldots$$
$$\ldots+(m)_{m-1}\chi^{(m-1)}(v)ze^{vz}+(m)_m\chi^{(m)}(v)(e^{vz}-1)$$

mithin für $v=0$ unter Benutzung der Gleichungen 2)

$$3)\qquad D_v^m\left(v\frac{e^{vz}-1}{e^v-1}\right)_{(0)}=z^m-\tfrac{1}{2}(m)_1z^{m-1} +(m)_2B_1z^{m-2}-(m)_4B_3z^{m-4}+\ldots\ldots,$$

wobei die Reihe rechter Hand nur soweit zu nehmen ist, dass $(m)_m$ nicht mehr vorkommt, weil der Coefficient dieses Ausdrucks (vorhin $e^{vz}-1$) jedenfalls verschwindet. Die auf der rechten Seite der Gleichung 3) verzeichnete ganze rationale und algebraische Funktion von z wollen wir die Bernoulli'sche Funktion m^{ten} Grades nennen und mit $\varphi(z,m)$ oder, wo die Angabe des Grades nicht nothwendig ist, kürzer mit $\varphi(z)$ bezeichnen; demnach haben wir die Gleichungen

$$4)\qquad \varphi(z,m)=D_v^m\left(v\frac{e^{vz}-1}{e^v-1}\right)_{(0)}$$

oder auch, wie sich leicht findet,

$$5)\qquad \varphi(z,m)=m\,D_v^{m-1}\left(\frac{e^{vz}-1}{e^v-1}\right)_{(0)}$$

und bei ausgeführter Differentiation

$$6)\qquad \varphi(z,m)=z^m-\tfrac{1}{2}(m)_1z^{m-1} +(m)_2B_1z^{m-2}-(m)_4B_3z^{m-4}+(m)_6B_5z^{m-6}-\ldots$$

also z. B.

$$\begin{aligned}
\varphi(z,2) &= z^2 - z = z(z-1),\\
\varphi(z,3) &= z^3 - \tfrac{3}{2}z^2 + \tfrac{1}{2}z = z(z-\tfrac{1}{2})(z-1),\\
\varphi(z,4) &= z^4 - 2z^3 + z^2 = z^2(z-1)^2,\\
\varphi(z,5) &= z^5 - \tfrac{5}{2}z^4 + \tfrac{5}{3}z^3 - \tfrac{1}{6}z,\\
\varphi(z,6) &= z^6 - 3z^5 + \tfrac{5}{2}z^4 - \tfrac{1}{2}z^2,\\
\varphi(z,7) &= z^7 - \tfrac{7}{2}z^6 + \tfrac{7}{2}z^5 - \tfrac{7}{6}z^3 + \tfrac{1}{6}z,\\
\varphi(z,8) &= z^8 - 4z^7 + \tfrac{14}{3}z^6 - \tfrac{7}{3}z^4 + \tfrac{2}{3}z^2,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Aus der Fundamentalgleichung 4) erhält man sofort für $z=0$ und für $z=1$

$$7)\qquad \varphi(0,m) = \varphi(1,m) = 0;$$

ferner ist nach Nr. 4)

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1,m) - \varphi(x,m) &= D_v^m\left(v\,\frac{e^{v(x+1)} - e^{vx}}{e^v - 1}\right)_{(0)}\\
&= D_v^m\,(v\,e^{vx})_{(0)}
\end{aligned}$$

und bei Ausführung der Differentiation

$$8)\qquad \varphi(x+1,m) - \varphi(x,m) = m\,x^{m-1};$$

daraus folgt umgekehrt $\varphi(x,m) = \Sigma(m\,x^{m-1})$ wenn $\Delta x = 1$ gesetzt wird. Dieses bekannte Resultat führen wir nur an um die Bemerkung daran zu knüpfen, dass sich die Untersuchung von $\varphi(z,m)$ auf das Intervall $z=0$ bis $z=1$ beschränken kann; wäre nämlich $z>1$, so würde man z in eine ganze Zahl k und in einen ächt gebrochenen Rest x zerlegen und dann mittelst der Formel 8) leicht zu folgender Relation gelangen:

$$\begin{aligned}
9)\qquad &\varphi(z,m) = \varphi(k+x,m)\\
&= \varphi(x,m) + m\,[x^{m-1} + (x+1)^{m-1} + (x+2)^{m-1} + \ldots + (x+k-1)^{m-1}].
\end{aligned}$$

Für $x=0$ erhält man specieller

$$10)\qquad \varphi(k,m) = m\,[1^{m-1} + 2^{m-1} + \ldots + (k-1)^{m-1}]$$

was hinreichend bekannt ist und für uns die Bedeutung hat, dass hiermit der Werth von $\varphi(z,m)$ für ein ganzes positives Argument bestimmt wird.

Unter Rücksicht auf die identische Gleichung

$$\frac{e^{v(1-x)} - 1}{e^v - 1} = 1 - \frac{e^{-vx} - 1}{e^{-v} - 1}$$

leitet man aus der Fundamentalformel 4) die folgende ab

$$D_v^m\left(v\,\frac{e^{v(1-x)} - 1}{e^v - 1}\right) = -\,D_v^m\left(v\,\frac{e^{-vx} - 1}{e^{-v} - 1}\right)$$

oder wenn rechter Hand $v = -w$ gesetzt wird,

$$D_v^m\left(v\,\frac{e^{v(1-x)} - 1}{e^v - 1}\right) = (-1)^m\,D_w^m\left(w\,\frac{e^{wx} - 1}{e^w - 1}\right);$$

für $v=0$ mithin auch $w=0$ giebt diess

$$11)\qquad \varphi(1-x,m) = (-1)^m\,\varphi(x,m).$$

Die Bernoulli'sche Funktion nimmt also von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ wieder dieselben absoluten Werthe an, die sie von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ hatte und zwar mit dem nämlichen oder mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, jenachdem die Funktion gerader oder ungerader Ordnung ist. Man ersieht zugleich, dass sich vermöge dieser Eigenschaft die Discussion von $\varphi(z, m)$ auf das Intervoll $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ beschränken darf. Für $x = \frac{1}{2}$ und ein ungerades $m = 2n - 1$ giebt die Formel 11)

$$12) \qquad \varphi(\tfrac{1}{2}, 2n - 1) = 0.$$

Auch für gerade m ist der Werth von $\varphi(\frac{1}{2}, m)$ leicht zu ermitteln; man hat nach Nr. 4)

$$\varphi(\tfrac{1}{2}, 2n) = D_v^{2n}\left(v\,\frac{e^{\frac{1}{2}v} - 1}{e^v - 1}\right)_{(0)} = 2\,D_v^{2n}\left(\frac{\frac{1}{2}v}{e^{\frac{1}{2}v} + 1}\right)_{(0)}$$

und hier lässt sich die Differentiation mittelst der schon von Laplace angewendeten identischen Gleichung

$$\frac{\frac{1}{2}v}{e^{\frac{1}{2}v} + 1} = \chi(\tfrac{1}{2}v) - \chi(v)$$

leicht ausführen. Diess giebt nämlich

$$D^{2n}\left(\frac{\frac{1}{2}v}{e^{\frac{1}{2}v} + 1}\right) = \frac{1}{2^{2n}}\,\chi^{(2n)}(\tfrac{1}{2}v) - \chi^{(2n)}(v)$$

mithin für $v = 0$ und durch Substitution des bekannten Werthes von $\chi^{(2n)}(0)$

$$13) \qquad \varphi(\tfrac{1}{2}, 2n) = (-1)^n\,\frac{2^{2n} - 1}{2^{2n-1}}\,B_{2n-1}.$$

Die so eben entwickelten Sätze sind nur specielle Fälle eines allgemeineren Theoremes, zu welchem man durch den naheliegenden Versuch gelangt, den Betrag von

$$\varphi(x, m) + \varphi\left(x + \frac{1}{k}, m\right) + \varphi\left(x + \frac{2}{k}, m\right) + \ldots + \varphi\left(x + \frac{k-1}{k}, m\right)$$

zu ermitteln, wo k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Man findet zunächst den Werth dieser Summe

$$= D_v^m\left\{\left[e^{vx}\left(1 + e^{\frac{v}{k}} + e^{\frac{2v}{k}} + \ldots + e^{\frac{(k-1)v}{k}}\right) - k\right]\chi(v)\right\}_{(0)}$$

$$= D_v^m\left\{v\,\frac{e^{vx} - 1}{e^{\frac{v}{k}} - 1} + k\left[\chi\left(\frac{v}{k}\right) - \chi(v)\right]\right\}_{(0)};$$

nimmt man $v = kw$, wo w mit v gleichzeitig verschwindet, so ist der vorige Ausdruck

$$= \frac{1}{k^{m-1}}\,D_w^m\left(w\,\frac{e^{wkx} - 1}{e^w - 1}\right)_{(0)} + k\left(\frac{1}{k^m} - 1\right)\chi^{(m)}(0)$$

$$= \frac{1}{k^{m-1}}\,\varphi(kx, m) - \frac{k^m - 1}{k^{m-1}}\,\chi^{(m)}(0),$$

und hieraus ergiebt sich bei geraden m:

$$14)\ \begin{cases} \varphi(x,m)+\varphi\left(x+\frac{1}{k},m\right)+\varphi\left(x+\frac{2}{k},m\right)+\ldots+\varphi\left(x+\frac{k-1}{k},m\right) \\ =\frac{1}{k^{m-1}}\left[\varphi(kx,m)+(-1)^{\frac{1}{2}m}(k^m-1)B_{m-1}\right] \end{cases}$$

dagegen für ungerade m:

$$15)\ \begin{cases} \varphi(x,m)+\varphi\left(x+\frac{1}{k},m\right)+\varphi\left(x+\frac{2}{k},m\right)+\ldots+\varphi\left(x+\frac{k-1}{k},m\right) \\ =\frac{1}{k^{m-1}}\varphi(kx,m). \end{cases}$$

II. Um die Eigenschaften der Differentialquotienten von $\varphi(z,m)$ kennen zu lernen, differenziren wir den Ausdruck

$$\frac{e^{vz}-1}{e^v-1}$$

$(m-1)$mal in Beziehung auf v, einmal in Beziehung auf z und machen von dem Satze Gebrauch, dass diese Operationen in beliebiger Ordnung vorgenommen werden dürfen. Wir erhalten auf diese Weise

$$D_z D_v^{m-1}\left(\frac{e^{vz}-1}{e^v-1}\right)=D_v^{m-1}D_z\left(\frac{e^{vz}-1}{e^v-1}\right)=D_v^{m-1}\left(\frac{ve^{vz}}{e^v-1}\right)$$
$$=D_v^{m-1}\left(v\frac{e^{vz}-1}{e^v-1}+\chi(v)\right)$$

mithin für $v=0$ unter Benutzung der Formeln 5) und 4)

$$D_z\frac{\varphi(z,m)}{m}=\varphi(z,m-1)+\chi^{(m-1)}(0).$$

Auf die Unterscheidung gerader und ungerader m eingehend ziehen wir hieraus die Differentialformeln

$$16)\qquad \frac{d\varphi(z,2n)}{dz}=2n\,\varphi(z,2n-1),\quad n>1,$$

$$17)\qquad \frac{d\varphi(z,2n+1)}{dz}=(2n+1)\left[\varphi(z,2n)+(-1)^{n-1}B_{2n-1}\right],$$

sowie umgekehrt bei Rücksicht auf den Umstand, dass $\varphi(z,m)$ für $z=0$ verschwindet, die Integralformeln:

$$18)\qquad \int_0^z \varphi(z,2n-1)\,dz=\frac{\varphi(z,2n)}{2n},\qquad n>1,$$

$$19)\qquad \int_0^z \varphi(z,2n)\,dz=\frac{\varphi(z,2n+1)}{2n+1}+(-1)^n B_{2n-1}\,z;$$

specielle für $z=\frac{1}{2}$ zum Vorschein kommende Fälle hiervon sind:

$$20)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z,2n-1)\,dz=(-1)^n\frac{2^{2n}-1}{n\,2^{2n}}B_{2n-1},$$

$$21)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2n)\, dz = (-1)^n \tfrac{1}{2} B_{2n-1}.$$

Die Formeln 16) und 17) geben vollständigen Aufschluss über den Verlauf der Bernoulli'schen Funktion innerhalb des Intervalles $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$; die betreffende Discussion fangen wir mit dem einfachsten Falle $m = 2$ an und führen sie mittelst der obigen Relationen weiter.

Hinsichtlich der ersten Funktion

$$\varphi(z, 2) = z^2 - z = z(z-1)$$

erhellt unmittelbar, dass sie von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ negativ bleibt und fortwährend abnimmt; der Werth $\varphi(\frac{1}{2}, 2) = -\frac{1}{4}$ ist folglich ihr absolutes Minimum innerhalb des genannten Intervalles.

Weiter haben wir nach Formel 17)

$$\frac{1}{3} \frac{d\varphi(z, 3)}{dz} = \varphi(z, 2) + B_1;$$

die rechte Seite ist anfangs für $z = 0$ positiv, nimmt dann continuirlich ab und erhält für $z = \frac{1}{2}$ den negativen Werth

$$-\tfrac{1}{4} + B_1 = -\tfrac{1}{12},$$

woraus folgt, dass es zwischen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$ einen aber auch nur einen Werth giebt, für welchen der fragliche Ausdruck verschwindet. Diesem Verhalten von $\varphi'(z, 3)$ gemäss steigt anfangs $\varphi(z, 3)$, erreicht zwischen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$ ein Maximum, und fällt dann wieder. Jenes Steigen fängt an mit $\varphi(0, 3) = 0$, das nachherige Fallen hört auf mit $\varphi(\frac{1}{2}, 3) = 0$, die Funktion $\varphi(z, 3)$ bleibt also positiv während des Intervalles 0 bis $\frac{1}{2}$ und besitzt innerhalb desselben ein Maximum.

Die Formel 16) giebt

$$\frac{1}{4} \frac{d\varphi(z, 4)}{dz} = \varphi(z, 3),$$

und da nach dem Vorigen die rechte Seite mithin auch $\varphi'(z, 4)$ positiv ist, so findet bei $\varphi(z, 4)$ ein fortwährendes Wachsthum statt; dieses beginnt mit $\varphi(0, 4) = 0$, mithin ist $\varphi(z, 4)$ positiv und zunehmend.

In der ferneren Gleichung

$$\frac{1}{5} \frac{d\varphi(z, 5)}{dz} = \varphi(z, 4) - B_3$$

ist die rechte Seite anfangs für $z = 0$ negativ, wird aber immer grösser und erreicht für $z = \frac{1}{2}$ ihren grössten Werth

$$\varphi(\tfrac{1}{2}, 4) - B_3 = \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) B_3,$$

welcher positiv ist. Aus diesem Verhalten von $\varphi'(z, 5)$ folgt, dass $\varphi(z, 5)$ erst ab- und nachher wieder zunimmt. Die Abnahme fängt mit $\varphi(0, 5) = 0$ an, die Zunahme hört mit $\varphi(\frac{1}{2}, 5) = 0$ auf, mithin bleibt $\varphi(z, 5)$ negativ von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ und besitzt innerhalb dieses Intervalles ein Minimum.

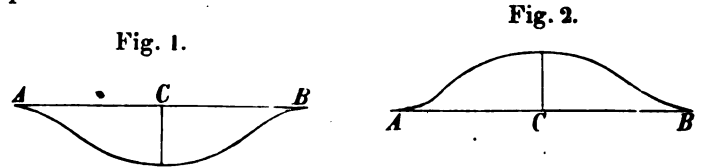
Weil ferner

$$\frac{1}{6} \frac{d\varphi(z, 6)}{dz} = \varphi(z, 5)$$

und die rechte Seite also auch $\varphi'(z, 6)$ immer negativ ist, so nimmt $\varphi(z, 6)$

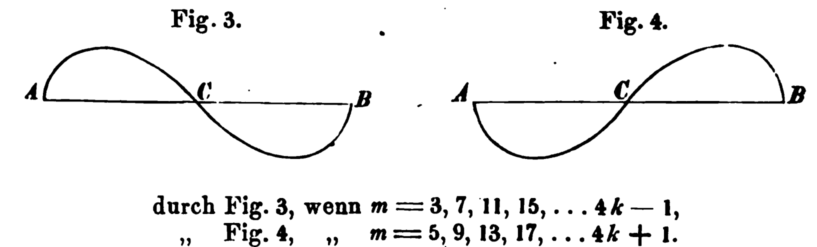
immer ab mit $\varphi(0, 6) = 0$ anfangend; mithin ist $\varphi(z, 6)$ **negativ** und **abnehmend**.

Man übersieht augenblicklich den Fortgang dieser überaus einfachen Schlüsse, deren Gesammtergebniss sich leicht graphisch darstellen lässt, wenn man z als Abscisse und $\varphi(z, m)$ als zugehörige rechtwinklige Ordinate construirt. Für $AC = CB = \frac{1}{2}$ werden nämlich die Funktionen gerader Ordnung repräsentirt



durch Fig. 1. wenn $m = 2, 6, 10, 14, \ldots\ 4k - 2$,
„ Fig. 2. „ $m = 4, 8, 12, 16, \ldots\ 4k$,

und die Funktionen ungerader Ordnung



durch Fig. 3, wenn $m = 3, 7, 11, 15, \ldots 4k - 1$,
„ Fig. 4, „ $m = 5, 9, 13, 17, \ldots 4k + 1$.

III. Wir versuchen jetzt die Bernoulli'sche Funktion in eine nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens fortgehende Reihe zu verwandeln indem wir den bekannten, für $\lambda \geqq z \geqq 0$ gültigen Satz

$$f(z) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \frac{\pi z}{\lambda} + a_2 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} + \ldots\ldots$$

$$a_k = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(z) \cos \frac{k\pi z}{\lambda} dz$$

in Anwendung bringen. Nehmen wir $\lambda = 1$ und $f(z) = \varphi(z, 2n)$, so ist für $1 \geqq z \geqq 0$

$$\varphi(z, 2n) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \pi z + a_2 \cos 2\pi z + \ldots.$$

und auch, wenn $1 - z$ an die Stelle von z tritt,

$$\varphi(z, 2n) = \tfrac{1}{2} a_0 - a_1 \cos \pi z + a_2 \cos 2\pi z - \ldots.;$$

hieraus folgt, dass die Coefficienten ungerader Nummer verschwinden, also nur bleibt

$$\varphi(z, 2n) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_2 \cos 2\pi z + a_4 \cos 4\pi z + \ldots.$$

$$a_k = 2 \int_0^1 \varphi(z, 2n) \cos k\pi z\, dz$$

worin k eine gerade Zahl bedeutet. Der Formel 4) zufolge ist

$$a_k = 2\int_0^1 D_v^{2n}\left(v\frac{e^{vz}-1}{e^v-1}\right)_{(0)} \cos k\pi z\, dz$$

und bei umgekehrter Anordnung der Operationen

$$a_k = 2\, D_v^{2n}\left[\chi(v)\int_0^1 (e^{vz}-1)\cos k\pi z\, dz\right]_{(0)},$$

wo nun die Integration leicht ausgeführt werden kann wenn man die Fälle $k=0$ und $k>0$ unterscheidet. Für $k=0$ ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}a_0 = D_v^{2n}\left[\chi(v)\left(\frac{e^v-1}{v}-1\right)\right]_{(0)}$$

$$= D_v^{2n}[1-\chi(v)]_{(0)} = (-1)^n B_{2n-1};$$

dagegen für $k>0$

$$a_k = 2\, D_v^{2n}\left[\chi(v)\,\frac{v(e^v-1)}{k^2\pi^2+v^2}\right]_{(0)} = 2\, D_v^{2n}\left[\frac{v^2}{k^2\pi^2+v^2}\right]_{(0)}$$

$$= 2(-1)^n\frac{1.2.3\ldots.(2n)}{k^{2n}\pi^{2n}},$$

mithin ist die gesuchte Reihenentwickelung, worin $1.2.3\ldots m$ kurz mit m' bezeichnet werden möge,

$$\varphi(z,2n) = (-1)^n B_{2n-1}$$
$$+(-1)^{n-1}2\,\frac{(2n)'}{\pi^{2n}}\left[\frac{\cos 2\pi z}{2^{2n}}+\frac{\cos 4\pi z}{4^{2n}}+\frac{\cos 6\pi z}{6^{2n}}+\ldots\right].$$

Setzt man in dieser für $1\geqq z>0$ geltenden Gleichung $z=0$ und subtrahirt das entstehende specielle Ergebniss von der vorstehenden Gleichung, so hat man auch

für $1\geqq z\geqq 0$, $\tfrac{1}{2}\varphi(z,2n)$

$$=(-1)^n\frac{(2n)'}{\pi^{2n}}\left[\frac{1-\cos 2\pi z}{2^{2n}}+\frac{1-\cos 4\pi z}{4^{2n}}+\frac{1-\cos 6\pi z}{6^{2n}}+\ldots.\right]$$

oder

22) für $2\geqq u\geqq 0$, $\tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2}u,2n)$

$$=(-1)^n\frac{(2n)'}{(2\pi)^{2n}}\left[\frac{1-\cos \pi u}{1^{2n}}+\frac{1-\cos 2\pi u}{2^{2n}}+\frac{1-\cos 3\pi u}{3^{2n}}+\ldots.\right].$$

Durch ein ähnliches Verfahren kann man $\varphi(z,2n-1)$ oder $\varphi(\tfrac{1}{2}u,2n-1)$ in eine nach Sinus fortgehende Reihe verwandeln, kürzer jedoch gelangt man hierzu durch Differentiation der vorigen Gleichung; diess giebt

23) für $2\geqq u\geqq 0$, $\tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2}u,2n-1)$

$$=(-1)^n\frac{(2n-1)'}{(2\pi)^{2n-1}}\left[\frac{\sin \pi u}{1^{2n-1}}+\frac{\sin 2\pi u}{2^{2n-1}}+\frac{\sin 3\pi u}{3^{2n-1}}+\ldots.\right].$$

Die Formeln 22) und 23) sind unter etwas anderer Gestalt längst bekannt aber nicht immer streng bewiesen worden; Prof. Raabe leitet sie in seiner Abhandlung dadurch ab, dass er die Gleichung

$$\frac{1}{2}(\pi - x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots.$$

mehrmals nach einander mit dx multiplicirt und zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = x$ integrirt, wobei linker Hand der Reihe nach die Bernoullischen Funktionen für $m = 2, 3, 4 \ldots$ zum Vorschein kommen. Die in den Abschnitten I. und II. entwickelten Eigenschaften derselben werden dann mittelst der Gleichungen 22) und 23) bewiesen, was gerade die Umkehrung des obigen Gedankenganges ist.

Die Mac Laurin'sche Summenformel.

IV. Wir bezeichnen im Folgenden mit $F(u)$ eine beliebige Funktion von u, und mit x und h zwei in der Art willkührlich gewählte Grössen, dass die Funktionen

$$F(u), F'(u), F''(u), \ldots\ldots F^{(2n+1)}(u)$$

von $u = x$ bis $u = x + h$ stetig und endlich bleiben; ferner setzen wir

$$24) \qquad R_{2n} = \frac{h^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n)} \int_0^1 \varphi(t, 2n)\, F^{(2n+1)}(x + ht)\, dt$$

und versuchen den Werth der vorläufig mit R_{2n} bezeichneten Grösse zu ermitteln.

Für den einfachsten Fall $n = 1$ ist

$$R_2 = \frac{1}{2} h^3 \int_0^1 \varphi(t, 2)\, F'''(x + ht)\, dt;$$

durch theilweise Integration nach der Formel

$$\int UV\, dt = U \int V\, dt - \int U'\, dt \int V\, dt$$

und unter Beachtung des Umstandes, dass $U = \varphi(t, 2)$ sowohl für $t = 1$ als für $t = 0$ verschwindet, erhalten wir einfacher

$$R_2 = -\frac{1}{2} h^2 \int_0^1 \varphi'(t, 2)\, F''(x + ht)\, dt$$

$$= -\frac{1}{2} h^2 \int_0^1 (2t - 1)\, F''(x + ht)\, dt,$$

und durch wiederholte theilweise Integrationen

$$R_2 = -\frac{1}{2} h\, [F'(x + h) + F'(x)] + F(x + h) - F(x)$$

oder bei Gebrauch der gewöhnlichen Bezeichnung $f(x + h) - f(x) = \Delta f(x)$,

$$25) \qquad R_2 = -h F'(x) - \frac{1}{2} h \Delta F'(x) + \Delta F(x).$$

Auf ganz analoge Weise findet sich aus Nr. 24) durch einmalige partielle Integration

$$R_{2n} = -\frac{h^{2n}}{1.2.3\dots(2n)}\int_0^1 \varphi'(t, 2n)\, F^{(2n)}(x+ht)\, dt$$

$$= -\frac{h^{2n}}{1.2\dots(2n-1)}\int_0^1 \varphi(t, 2n-1)\, F^{(2n)}(x+ht)\, dt,$$

und nach einer zweiten partiellen Integration

$$R_{2n} = +\frac{h^{2n-1}}{1.2\dots(2n-1)}\int_0^1 \varphi'(t, 2n-1)\, F^{(2n-1)}(x+ht)\, dt$$

$$= \frac{h^{2n-1}}{1.2\dots(2n-2)}\int_0^1 [\varphi(t, 2n-2) + (-1)^n B_{2n-3}]\, F^{(2n-1)}(x+ht)\, dt.$$

Integrirt man rechter Hand die einzelnen Theile, so giebt die Integration des ersten Theiles den Ausdruck R_{2n-2} und es ist folglich

$$R_{2n} = R_{2n-2} + \frac{(-1)^n B_{2n-3} h^{2n-1}}{1.2\dots(2n-2)}\int_0^1 F^{(2n-1)}(x+ht)\, dt$$

oder

$$R_{2n} - R_{2n-2} = (-1)^n \frac{B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2.3\dots(2n-2)} \Delta F^{(2n-2)}(x).$$

In dieser Gleichung setzen wir für n der Reihe nach die Zahlen $2, 3, 4 \dots n$ und addiren alle entstehenden Gleichungen nebst der Gleichung 25); wir erhalten dadurch

$$R_{2n} = -h F'(x) - \tfrac{1}{2} h \Delta F'(x) + \Delta F(x)$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta F''(x) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\Delta F^{IV}(x) + \dots + (-1)^n \frac{B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2.3\dots(2n-2)}\Delta F^{(2n-2)}(x)$$

womit der Werth des fraglichen Integrales gefunden ist.

Die vorstehende Formel lässt sich noch unter einem anderen Gesichtspunkte betrachten wenn man ihr die folgende Gestalt ertheilt

$$26)\quad h F'(x) = \Delta F(x) - \tfrac{1}{2} h \Delta F'(x)$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta F''(x) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\Delta F^{IV}(x) + \dots$$
$$\dots + (-1)^n \frac{B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2.3\dots(2n-2)}\Delta F^{(2n-2)}(x) - R_{2n};$$

sie giebt in diesem Falle eine Reihenentwickelung für $h F'(x)$, bei welcher $-R_{2n}$ den Rest der Reihe darstellt. Den Betrag dieses Ergänzungsgliedes genau anzugeben würde nicht rathsam sein, weil man damit auf die identische Gleichung $h F'(x) = h F'(x)$ zurückkäme, dagegen kann man $-R_{2n}$ auf verschiedene Weisen in Grenzen einschliessen, wenn man den Gang

von $\varphi(t, 2n)$ oder von $F^{(2n+1)}(x+ht)$ innerhalb des Intervalles $t=0$ bis $t=1$ näher untersucht.

Bezeichnen wir mit $t=a$ und $t=b$ diejenigen zwischen 0 und 1 liegenden Werthe von t, für welche $F^{(2n+1)}(x+ht)$ innerhalb jenes Intervalles sein absolutes Maximum und sein absolutes Minimum erreicht, so besitzen die Differenzen

$$F^{(2n+1)}(x+ht) - F^{(2n+1)}(x+ha),$$
$$F^{(2n+1)}(x+ht) - F^{(2n+1)}(x+hb)$$

entgegengesetzte Vorzeichen; dasselbe gilt, weil $\varphi(t, 2n)$ sein Vorzeichen nicht ändert, von den Produkten

$$[F^{(2n+1)}(x+ht) - F^{(2n+1)}(x+ha)]\,\varphi(t, 2n),$$
$$[F^{(2n+1)}(x+ht) - F^{(2n+1)}(x+hb)]\,\varphi(t, 2n)$$

mithin auch von den Integralen, welche entstehen sobald man die vorliegenden Ausdrücke mit dt multiplicirt und zwischen $t=0$ und $t=1$ integrirt. Der Gegensatz in den Vorzeichen dieser Integrale

$$\int_0^1 F^{(2n+1)}(x+ht)\,\varphi(t, 2n)\,dt - F^{(2n+1)}(x+ha)\int_0^1 \varphi(t, 2n)\,dt$$

$$\int_0^1 F^{(2n+1)}(x+ht)\,\varphi(t, 2n)\,dt - F^{(2n+1)}(x+hb)\int_0^1 \varphi(t, 2n)\,dt$$

lässt weiter erkennen, dass der Werth von

$$\int_0^1 F^{(2n+1)}(x+ht)\,\varphi(t, 2n)\,dt$$

zwischen den Grössen

$$F^{(2n+1)}(x+ha)\int_0^1 \varphi(t, 2n)\,dt = F^{(2n+1)}(x+ha)\,(-1)^n B_{2n-1}$$

$$F^{(2n+1)}(x+hb)\int_0^1 \varphi(t, 2n)\,dt = F^{(2n+1)}(x+hb)\,(-1)^n B_{2n-1}$$

enthalten ist; man kann folglich

$$\int_0^1 F^{(2n+1)}(x+ht)\,\varphi(t, 2n)\,dt = (-1)^n B_{2n-1}\,F^{(2n+1)}(x+h\vartheta)$$

setzen, wo ϑ zwischen a und b mithin auch zwischen 0 und 1 liegt d. h. ein positiver ächter Bruch ist. Durch Substitution des obigen Integralwerthes erhalten wir eine neue Form von R_{2n} und überhaupt die Gleichung

27) $$hF'(x) = \Delta F(x) - \tfrac{1}{2} h F'(x)$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2} \Delta F''(x) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4} \Delta F^{IV}(x) + \dots$$
$$\dots + (-1)^n \frac{B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2.3\dots(2n-2)} \Delta F^{(2n-2)}(x)$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1} h^{2n+1}}{1.2.3\dots(2n)} F^{(2n+1)}(x + \vartheta h),$$

worin der Rest unter der allgemeinen von **Malmstén** angegebenen Form dargestellt ist.

Eine andere Gestalt bekommt derselbe wenn man von der Gleichung

$$-R_{2n} = \frac{h^{2n}}{1.2\dots(2n-1)} \int_0^1 F^{(2n)}(x + ht)\, \varphi(t, 2n-1)\, dt$$

ausgeht und zunächst das Integral in zwei Integrale von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}$ und von $t = \frac{1}{2}$ bis $t = 1$ zerlegt, damit in jedem Theile für sich $\varphi(t, 2n-1)$ dasselbe Vorzeichen behalte. Setzt man also

$$\int_0^1 F^{(2n)}(x + ht)\, \varphi(t, 2n-1)\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} F^{(2n)}(x + ht)\, \varphi(t, 2n-1)\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 F^{(2n)}(x + ht)\, \varphi(t, 2n-1)\, dt$$

und im zweiten Integrale rechter Hand $1 - t$ statt t, so wird wegen $\varphi(1-t, 2n-1) = -\varphi(t, 2n-1)$

$$\int_0^1 F^{(2n)}(x + ht)\, \varphi(t, 2n-1)\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} [F^{(2n)}(x + ht) - F^{(2n)}(x + h - ht)]\, \varphi(t, 2n-1)\, dt,$$

und hier sind fast ganz dieselben Betrachtungen wie vorhin anwendbar; man findet mittelst derselben, dass

$$\int_0^1 F^{(2n)}(x + ht)\, \varphi(t, 2n-1)\, dt$$
$$= [F^{(2n)}(x + h\vartheta) - F^{(2n)}(x + h - h\vartheta)] \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(t, 2n-1)\, dt$$
$$= [F^{(2n)}(x + h\vartheta) - F^{(2n)}(x + h - h\vartheta)]\, (-1)^n \frac{2^{2n} - 1}{n\, 2^{2n}} B_{2n-1}$$

gesetzt werden darf, wo ϑ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt. Bezeichnen wir zur Abkürzung $1 - \vartheta$ mit Θ, so erhalten wir folgende Formel:

$$28)\quad hF'(x) = \Delta F(x) - \tfrac{1}{2} h F'(x)$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1\,.\,2} \Delta F''(x) - \frac{B_3 h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \Delta F^{IV}(x) + \dots$$
$$\dots + (-1)^n \frac{B_{2n-3} h^{2n-2}}{1\,.\,2 \dots (2n-2)} \Delta F^{(2n-2)}(x)$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1\,.\,2 \dots (2n)} [F^{(2n)}(x+\theta h) - F^{(2n)}(x+\vartheta h)]$$

worin die Restbestimmung gleichfalls allgemein und bisher nicht bemerkt worden ist.

Wenn $F^{(2n)}(u)$ von $u = x$ bis $u = x + h$ entweder nur wächst oder nur abnimmt, was in dem Falle eintritt, wo $F^{(2n+1)}(u)$ innerhalb jenes Intervalles sein Vorzeichen nicht wechselt, so ist $F^{(2n)}(x+h) - F^{(2n)}(x)$ der grösste Werth, den $F^{(2n)}(x+\theta h) - F^{(2n)}(x+\vartheta h)$ erlangen kann, und folglich darf man setzen

$$F^{(2n)}(x+\theta h) - F^{(2n)}(x+\vartheta h) = \eta \, \Delta F^{(2n)}(x),$$

wo η einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Das Ergänzungsglied der obigen Reihe wird dann

$$(-1)^{n+1} \eta \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1\,.\,2 \dots (2n)} \Delta F^{(2n)}(x)$$

oder auch

$$(-1)^{n+1} \zeta \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1\,.\,2\,.\,3 \dots (2n)} \Delta F^{(2n)}(x),$$

wo ζ zwischen 0 und 2 liegt; diese Form des Restes ist insofern bequem, als der Faktor von ζ mit dem allgemeinen Gliede der Reihe übereinstimmt.

Auf der rechten Seite der hiermit gewonnenen Gleichung

$$29)\quad hF'(x) = \Delta F(x) - \tfrac{1}{2} h \Delta F'(x)$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1\,.\,2} \Delta F''(x) - \frac{B_3 h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \Delta F^{IV}(x) + \dots$$
$$\dots + (-1)^n \frac{B_{2n-3} h^{2n-2}}{1\,.\,2 \dots (2n-2)} \Delta F^{(2n-2)}(x)$$
$$+ (-1)^{n+1} \zeta \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1\,.\,2 \dots (2n)} \Delta F^{(2n)}(x),$$

welche nur unter der Voraussetzung gilt, dass $F^{(2n+1)}(u)$ von $u = x$ bis $u = x + h$ sein Vorzeichen nicht wechselt, setzen wir noch den Ausdruck

$$0 = (-1)^{n+1} \left[\frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1\,.\,2 \dots (2n)} \Delta F^{(2n)}(x) - \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1\,.\,2 \dots (2n)} \Delta F^{(2n)}(x) \right]$$

hinzu und ziehen den obigen Rest mit dem zweiten Theile des vorstehenden Aggregates zusammen; für $\zeta - 1 = \varrho$ giebt dies

$$30) \quad hF'(x) = \varDelta F(x) - \tfrac{1}{2} h \varDelta F'(x)$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2} \varDelta F''(x) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4} \varDelta F^{IV}(x) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1.2\ldots(2n)} \varDelta F^{(2n)}(x)$$
$$+ (-1)^{n+1} \varrho \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1.2\ldots(2n)} \varDelta F^{(2n)}(x).$$

Da ϱ seiner Bedeutung nach zwischen $+1$ und -1 liegt, so beträgt hier der Rest einen aliquoten Theil des zuletzt in Rechnung gebrachten Reihengliedes, und es wäre nur noch zu untersuchen, in welchen Fällen ϱ positiv und in welchen es negativ ist. Die Entscheidung hierüber wird dadurch herbeigeführt, dass man in der allgemeinen Formel 27) $n+1$ an die Stelle von n treten lässt und das Resultat mit der obigen Gleichung zusammenhält; nach Hebung der gemeinschaftlichen Faktoren bleibt

$$\frac{B_{2n+1} h^2}{(2n+1)(2n+2)} F^{(2n+3)}(x + \vartheta h) = -\varrho B_{2n-1} \varDelta F^{(2n)}(x)$$

oder

$$\frac{B_{2n+1} h}{(2n+1)(2n+2)} F^{(2n+3)}(x + \vartheta h) = -\varrho B_{2n-1} \int_0^1 F^{(2n+1)}(x + ht)\, dt.$$

Der Voraussetzung nach ändert $F^{(2n+1)}(u)$, d. h. überhaupt jeder Differentialquotient ungerader Ordnung, sein Vorzeichen innerhalb des Intervalles $u = x$ bis $u = x + h$ nicht; dasselbe gilt von $F^{(2n+3)}(u)$ oder von $F^{(2n+3)}(x + \vartheta h)$. Besitzen nun $F^{(2n+3)}(u)$ und $F^{(2n+1)}(u)$ gleiche Vorzeichen, so kommt dieses Zeichen auch dem Integrale zu, und es muss dann ϱ negativ sein, weil zwischen zwei von Null verschiedenen entgegengesetzten Grössen keine Gleichheit bestehen könnte; aus ähnlichen Gründen folgt, dass ϱ positiv ist, wenn $F^{(2n+1)}(u)$ und $F^{(2n+3)}(u)$ entgegengesetzte Vorzeichen behalten.

V. In der Formel 27) setzen wir für x der Reihe nach die Grössen

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots\ldots a+(q-1)h$$

und addiren alle entstehenden Gleichungen; dies giebt

$$h[F'(a) + F'(a+h) + F'(a+2h) + \ldots + F'(a + \overline{q-1}h)]$$
$$= F(a+qh) - F(a) - \tfrac{1}{2} h [F'(a+qh) - F'(a)]$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}[F''(a+qh) - F''(a)] - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}[F^{IV}(a+qh) - F^{IV}(a)] + \ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^n \frac{B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)}[F^{(2n-2)}(a+qh) - F^{(2n-2)}(a)]$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)} S,$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde

$$S = F^{(2n+1)}(a+\vartheta_1 h) + F^{(2n+1)}(a+h+\vartheta_2 h) + \dots\dots$$
$$\dots + F^{(2n+1)}(a+\overline{q-1}\,h+\vartheta_q h),$$

und $\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_q$ gewisse positive ächte Brüche bezeichnen. Die Grössen $a+\vartheta_1 h$, $a+h+\vartheta_2 h, \dots a+(q-1)h+\vartheta_q h$ liegen sämmtlich zwischen a und $a+qh$, mithin beträgt der absolute Werth von S weniger als die Summe, welche zum Vorschein kommt, wenn man an die Stelle jedes der obigen Summanden den grössten absoluten Werth setzt, den $F^{(2n+1)}(u$ innerhalb des Intervalles $u=a$ bis $u=a+qh$ erreicht. Dieses Maximum heisse M; es ist dann

$$-qM < S < qM \text{ oder } S = \varepsilon q M,$$

wo ε einen positiven oder negativen ächten Bruch bedeutet. Nehmen wir endlich

$$a+qh=b \text{ mithin } q=\frac{b-a}{h}$$

und setzen $F'(u)=f(u)$, so erhalten wir die folgende Summenformel

$$31)\quad h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\dots+f(a+\overline{q-1}\,h]$$
$$=\int_a^b f(u)\,du-\tfrac{1}{2}h[f(b)-f(a)]$$
$$+\frac{B_1 h^2}{1.2}[f'(b)-f'(a)]-\frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}[f'''(b)-f'''(a)]+\dots$$
$$+(-1)^n\frac{B_{2n-3}h^{2n-2}}{1.2\dots(2n-2)}[f^{(2n-3)}(b)-f^{(2n-3)}(a)]+(-1)^{n+1}\frac{\varepsilon B_{2n-1}h^{2n}}{1.2\dots(2n)}(b-a)M,$$

welche so lange gilt, als die Funktionen $f(u), f'(u), f''(u) \dots f^{(2n)}(u)$ innerhalb des Intervalles $u=a$ bis $u=b$ stetig und endlich bleiben; M ist der ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen genommene absolut grösste Werth, den $f^{(2n)}(u)$ zwischen $u=a$ und $u=b$ erreicht.

Die Operationen, welche von der Formel 27) zur vorigen Summenformel führten, dienen auch, um aus der Gleichung 28) eine nur in der Form des Restes von Nr. 31) abweichende Summenformel abzuleiten. Man findet sogleich

$$h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\dots+f(a+\overline{q-1}\,h)]$$
$$=\int_a^b f(u)\,du-\tfrac{1}{2}h[f(b)-f(a)]$$
$$+\frac{B_1 h^2}{1.2}[f'(b)-f'(a)]-\frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}[f'''(b)-f'''(a)]+\dots$$
$$\dots+(-1)^n\frac{B_{2n-3}h^{2n-2}}{1.2\dots(2n-2)}[f^{(2n-3)}(b)-f^{(2n-3)}(a)]+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{1.2\dots(2n)}S,$$

worin S die Summe der aus q Differenzen bestehenden endlichen Reihe

$$f^{(2n-1)}(a+\Theta_1 h)-f^{(2n-1)}(a+\vartheta_1 h)$$
$$+f^{(2n-1)}(a+h+\Theta_2 h)-f^{(2n-1)}(a+h+\vartheta_2 h)+\dots$$

bezeichnet und jedes Θ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, sowie jedes ϑ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ enthalten ist. Nennen wir T den ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen genommenen grössten Werth, welchen die Differenz

$$f^{(2n-1)}(w) - f^{(2n-1)}(v)$$

erreicht, wenn man sowohl v als w das Intervall a bis $a + qh = b$ durchlaufen lässt, so beträgt der absolute Werth von S weniger als qT und folglich

$$S = \eta q T = \eta \frac{b-a}{h} T$$

gesetzt werden, wenn η einen positiven oder negativen ächten Bruch bezeichnet. Wir gelangen so zu der neuen und allgemeinen Formel

$$32)\quad h[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+\overline{q-1}\,h)]$$
$$= \int_a^b f(u)\,du - \tfrac{1}{2}h[f(b) - f(a)]$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}[f'(b) - f'(a)] - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}[f'''(b) - f'''(a)] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}[f^{(2n-3)}(b) - f^{(2n-3)}(a)]$$
$$+ (-1)^{n+1} \eta \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \frac{B_{2n-1} h^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n)}(b-a)\,T.$$

Etwas einfacher gestaltet sich S mithin auch das Ergänzungsglied in dem speciellen Falle, wo $f^{(2n-1)}(u)$ von $u = a$ bis $u = a + qh = b$ entweder nur wächst oder nur abnimmt, d. h. wenn $f^{(2n)}(u)$ innerhalb des genannten Intervalles sein Vorzeichen nicht wechselt. Unter dieser Voraussetzung liegt nämlich

$$f^{(2n-1)}(a + \Theta_1 h) - f^{(2n-1)}(a + \vartheta_1 h)$$
$$\text{zwischen 0 und } f^{(2n-1)}(a+h) - f^{(2n-1)}(a),$$

ebenso

$$f^{(2n-1)}(a + h + \Theta_2 h) - f^{(2n-1)}(a + h + \vartheta_2 h)$$
$$\text{zwischen 0 und } f^{(2n-1)}(a+2h) - f^{(2n-1)}(a+h),$$

u. s. w.

mithin ist S zwischen 0 und $f^{(2n-1)}(a+qh) - f^{(2n-1)}(a)$ enthalten und es darf folglich

$$S = \eta[f^{(2n-1)}(a+qh) - f^{(2n-1)}(a)] = \eta[f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)]$$

gesetzt werden, wo η einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Addirt man nach Substitution dieses Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung noch den Ausdruck

$$0 = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}[f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)]$$
$$- (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}[f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)],$$

und setzt

$$\eta \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} - 1 = \varrho,$$

wo nun ϱ ein positiver oder negativer ächter Bruch ist, so hat man die von Poisson herrührende Formel

$$33)\quad h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+\overline{q-1}\,h)\right]$$

$$= \int_a^b f(u)\,du - \tfrac{1}{2}h\left[f(b)-f(a)\right]$$

$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\left[f'(b)-f'(a)\right] - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\left[f'''(b)-f'''(a)\right] + \ldots.$$

$$+ (-1)^{n+1}\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}\left[f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\right]$$

$$+ (-1)^{n+1}\frac{\varrho B_{2n-1}h^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}\left[f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\right].$$

Hier beträgt also der Rest einen aliquoten positiven oder negativen Theil des letzten Reihengliedes.

Um zu entscheiden, in welchen Fällen ϱ positiv und in welchen es negativ ist, braucht man nur die allgemeine Formel 31) so in Anspruch zu nehmen, dass man die Reihe um ein Glied weiter fortsetzt und das Ergebniss mit dem Obigen vergleicht. Durch ganz ähnliche Schlüsse, wie sie am Ende des Abschnittes IV. benutzt wurden, findet man leicht, dass ϱ negativ ist, wenn die nicht wechselnden Vorzeichen von $f^{(2n)}(u)$ und $f^{(2n+2)}(u)$ übereinstimmen, und dass ϱ positiv ist wenn jene Vorzeichen entgegengesetzt sind. In dem ersten Falle, welcher häufig vorkommt, lässt sich das letzte Reihenglied mit dem Reste vereinigen wenn man $1+\varrho=\sigma$ setzt, wo σ einen positiven ächten Bruch bezeichnet; es ist dann unter der gemachten Voraussetzung

$$34)\quad h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+\overline{q-1}\,h)\right]$$

$$= \int_a^b f(u)\,du - \tfrac{1}{2}h\left[f(b)-f(a)\right]$$

$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\left[f'(b)-f'(a)\right] - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\left[f'''(b)-f'''(a)\right] + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n\frac{B_{2n-3}h^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}\left[f^{(2n-3)}(b)-f^{(2n-3)}(a)\right]$$

$$+ (-1)^{n+1}\frac{\sigma B_{2n-1}h^{2n}}{1.2.3\ldots.(2n)}\left[f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\right].$$

Bei dieser von Jacobi angegebenen Formel beträgt der Rest einen Bruchtheil des Gliedes, welches bei weiterer Fortsetzung der Reihe folgen würde.

Der zuletzt genannten Bedingung genügt z. B. die Funktion $f(u)=\frac{1}{u}$, wenn a und b nicht die Null zwischen sich fassen; man hat also für $a=1$, $h=1$, $b=q$

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{q}$$

$$=l(q+1)-\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{q+1}-1\right]-\frac{B_1}{2}\left[\frac{1}{(q+1)^2}-1\right]+\cdots\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}}{2n-2}\left[\frac{1}{(q+1)^{2n-2}}-1\right]+(-1)^n\frac{\sigma B_{2n-1}}{2n}\left[\frac{1}{(q+1)^{2n}}-1\right].$$

Nimmt man $q=p-1$, addirt beiderseits $\frac{1}{p}$ und vereinigt die von p unabhängigen Glieder zu einer Constante C, so gelangt man zu der bekannten Formel

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{p}$$

$$=C+lp+\frac{1}{2p}-\frac{B_1}{2p^2}+\frac{B_3}{4p^4}-\cdots\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}}{(2n-2)p^{2n-2}}+(-1)^n\frac{\sigma B_{2n-1}}{2np^{2n}},$$

worin C durch die Gleichung

$$C=Lim\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}-lp\right],\quad p=\infty$$

bestimmt wird und die Constante des Integrallogarithmus ist.

Die Formeln 31) bis 34) liefern auch die Mittel zur näherungsweisen Berechnung des Integrales

$$\int_a^b f(u)\,du,$$

worauf wir, da die Sache hinreichend bekannt ist, nicht weiter eingehen.

Schliesslich noch die Bemerkung, dass man statt der Formeln 31) bis 34) leicht etwas allgemeinere entwickeln kann, sobald man überhaupt unter

$$\Phi(x)=\Sigma f(x)$$

eine Funktion versteht, welcher die Eigenschaft

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=f(x)\text{ oder }\Delta\Phi(x)=f(x)$$

zukommt. Man setzt nämlich in den Gleichungen des vorigen Abschnittes erst $F'(u)=\Phi(u)$, nachher $\Delta\Phi(x)=f(x)$ und schafft die Constante der endlichen Integration dadurch weg, dass man $u=b$, $u=a$ nimmt und die entstehenden Gleichungen von einander subtrahirt. Die auf solche Weise für

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\sum_a^b f(x)$$

gewonnenen Formeln gehen in die vorigen über wenn $b-a$ ein Vielfaches von $h=\Delta x$ ausmacht.

XII.

Zur Theorie der Torsion cylindrischer Wellen.

Von Autenheimer,

Ingenieur zu Basel.

Es werde eine Welle von der Form eines senkrechten Kreiscylinders am einen Ende festgehalten und am andern durch ein Kräftepaar, das in einer zur Axe normalen Ebene liegt, verwunden; man sucht den Zusammenhang zwischen dem statischen Moment jenes Paars, den Dimensionen der Welle, der Grösse der Torsion und einem von der Natur des Materials abhängigen Coefficienten.

I. Voraussetzungen.

Bei Lösung dieser Aufgabe gehen wir von folgenden Annahmen aus:

1. Ein beliebiger materieller Punkt der Welle bewegt sich während der Torsion auf der Oberfläche eines Kreiscylinders, dessen Axe die Axe der Welle ist. Diese Bewegung kann in zwei Seitenbewegungen, parallel und senkrecht zur Axe, zerlegt werden. Die Verschiebung in einer Normalebene zur Axe ist proportional der Entfernung des Punktes von der Axe und vom befestigten Ende der Welle. (Die Verschiebung der Punkte längs der Axe ist eine Folge der Längenänderung der Fasern, wie sich ergeben wird.)
2. Die Kraft, welche an irgend einer Stelle einer Längenfaser eine Verschiebung bewirkt, ist proportional dem Querschnitt der Faser und der Grösse der Verschiebung.

II. Nothwendigkeit einer Längenverschiebung.

Jede Faser, welche vor der Torsion parallel zur Axe liegt, nimmt während der Torsion die Form einer Schraubenlinie an; dadurch werden die äussern Fasern ausgedehnt. Dieser Ausdehnung setzen sie einen Widerstand entgegen, der sich dadurch äussert, dass sie die beiden Endflächen der Welle einander nähern. Die äussern Faserschichten werden also ausgedehnt, die innern verkürzt. Wo die Ausdehnung in die Verkürzung übergeht, liegt eine Schichte, welche keine Längenänderung erleidet und die wir die neutrale Schichte nennen wollen. In jedem normalen Querschnitt der Welle muss unter den ausdehnenden und comprimirenden Molecularkräften für einen beliebigen Dehnungswinkel Gleichgewicht bestehen, weil die äussern Torsionskräfte keine Componente liefern, welche zur Axe

parallel ist. Hiernach wird sich die ganze Welle verkürzen und jeder normale Querschnitt längs der Axe verschoben um einen Weg, welcher seinem Abstand vom befestigten Ende der Welle proportional ist.

III. Bestimmung der Lage der neutralen Schichte.

Die neutrale Schichte wird cylindrisch vorausgesetzt werden können. Ihre Lage ist durch das Verhältniss der Ausdehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit bedingt. Im Folgenden soll der Halbmesser dieser Schichte bestimmt werden für den Fall, dass der Widerstand des Materials gegen Ausdehnung und Compression der gleiche ist.

Es sei:

L die Länge der Welle vor der Torsion,
R der Halbmesser der Welle,
a der Halbmesser der neutralen Schichte,
φ der Drehungswinkel am freien Ende der Welle, abgetragen als Bogen eines Kreises, dessen Radius die Einheit ist;
x die Entfernung einer Faser von der Axe,
E der Modul der Elasticität für die Ausdehnung.

Da nun irgend eine Faser in der neutralen Schichte ihre Länge während der Torsion nicht ändert, so bildet sie abgewickelt die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der Bogen $a\varphi$ und dessen andere Kathete somit $\sqrt{L^2 - a^2\varphi^2}$ ist. Eine Faser im Abstand x von der Axe ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen beide Katheten φx und $\sqrt{L^2 - a^2\varphi^2}$ sind. Folglich ist die Länge einer solchen Faser $= \sqrt{L^2 - a^2\varphi^2 + \varphi^2 x^2}$, und ihre Ausdehnung $= \sqrt{L^2 - a^2\varphi^2 + \varphi^2 x^2} - L$. Diese Ausdehnung wird $= 0$ für $x = a$ und negativ für $x < a$, sie wird also im letztern Fall zu einer Verkürzung. Die Kraft, welcher in der Richtung der Faser auf eine Querschnittseinheit ausdehnend wirkt, wird sein

$$1)\qquad E\,\frac{\sqrt{L^2 - a^2\varphi^2 + \varphi^2 x^2} - L}{L}$$

Man zerlege diese Kraft in zwei Seitenkräfte, senkrecht und parallel zur Axe; so ist die letztere Seitenkraft

$$E\,\frac{\sqrt{L^2 - a^2\varphi^2 + \varphi^2 x^2} - L}{L} \cdot \frac{\sqrt{L^2 - a^2\varphi^2}}{\sqrt{L^2 - a^2\varphi^2 + \varphi^2 x^2}}$$

Multiplicirt man dieselbe mit dem Differenzial $2\pi x\,dx$ des Querschnittes und integrirt hierauf zwischen $x = 0$ und $x = R$, so erhält man die Summe der ausdehnenden und comprimirenden Kräfte für einen und denselben Querschnitt der Welle, nämlich

$$2)\qquad \frac{2\pi E\sqrt{L^2 - a^2\varphi^2}}{L}\int_0^R \left(x - \frac{Lx}{\sqrt{L^2 - a^2\varphi^2 + \varphi^2 x^2}}\right) dx$$

$$= \frac{2\pi E\sqrt{L^2 - a^2\varphi^2}}{L}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{L}{\varphi^2}\left(\sqrt{L^2 - a^2\varphi^2 + R^2\varphi^2} - \sqrt{L^2 - a^2\varphi^2}\right)\right]$$

da aber die Kräfte parallel zur Axe in jedem Querschnitt sich das Gleich-

gewicht halten, so muss dieses Integral $=0$ sein; folglich erhält man zur Bestimmung von a die Gleichung

$$\frac{R^2}{2}-\frac{L}{\varphi^2}\left(\sqrt{L^2-a^2\varphi^2+R^2\varphi^2}-\sqrt{L^2-a^2\varphi^2}\right)=0$$

woraus nach einigen Reductionen folgt

$$a^2=\frac{R^2}{2}-\frac{R^4\varphi^2}{16L} \tag{3)}$$

Für einen kleinen Torsionswinkel φ ist daher annähernd

$$a=\frac{R}{\sqrt{2}}=0{,}707\,R \tag{4)}$$

d. h. der Halbmesser der neutralen Schichte ist für kleine Torsionen 0,707 vom Halbmesser der Welle.

IV. Mass der Verschiebungen längs der Axe.

Die Ausdehnung der Fasern in der äussersten Schichte ist $=\sqrt{L^2-a^2\varphi^2+R^2\varphi^2}-L$, die Verkürzung der Axe $=L-\sqrt{L^2-a^2\varphi^2}$. Entwickelt man diese Ausdrücke in Reihen und setzt den Werth von a aus 4) ein, so erhält man, wenn die Glieder von der 4ten Potenz von φ an vernachlässigt werden, für beide Längenänderungen denselben Werth. Bezeichnet λ die Verkürzung der ganzen Axe, so ist

$$\lambda=\frac{1}{4}\frac{R^2\varphi^2}{L}. \tag{5)}$$

Alle Punkte in einem und demselben normalen Querschnitt werden somit längs der Axe während der Torsion verschoben um

$$\frac{1}{4}\frac{R^2\varphi^2}{L}\cdot\frac{z}{L} \tag{6)}$$

wenn z den Abstand dieses Querschnittes vom befestigten Ende der Welle bezeichnet.

Da die Ausdehnung einer Faser im Abstand x von der Axe für kleine Torsionen $=\frac{(x^2-a^2)\varphi^2}{2L}$, so wird die Kraft, welche ein Faserprisma in dieser Lage ausdehnt, wenn sein Querschnitt die Flächeneinheit ist, sein

$$E\,\frac{(x^2-a^2)\varphi^2}{2L^2}$$

Sie wird für Fasern in der äussersten Schichte $=E\frac{R^2\varphi^2}{4L^2}$, für Fasern in der neutralen Schichte $=0$ und für Fasern in der Axe $=-E\frac{R^2\varphi^2}{4L^2}$.

Wird das Integral 2) zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=R$ genommen, so erhält man als Summe der ausdehnenden Kräfte, wenn die Glieder mit φ von der 4ten Potenz an wegfallen,

$$\frac{\pi E}{8}\cdot\frac{R^4\varphi^2}{L^2}. \tag{7)}$$

Die Summe der comprimirenden Kräfte hat denselben Werth. Würde keine Verkürzung der Welle angenommen, so müsste die Summe der ausdehnenden Kräfte das Doppelte von 7) betragen. Das Gleichgewicht der Kräfte längs der Axe könnte somit nur durch eine gleiche, entgegengesetze äussere Kraft aufgehoben werden, was gegen die Voraussetzung ist.

V. Verhältniss zwischen der Längen- und Querverschiebung.

Ein Punkt, welcher um x von der Axe und um z vom befestigten Ende der Welle absteht, wird während der Torsion in senkrechter Richtung zur Axe um $\varphi x \cdot \frac{z}{L}$ verschoben. Durch Vergleichung mit 6) beträgt somit das Verhältniss der Längen- und Querverschiebung eines Punktes

$$\tfrac{1}{4} \cdot \frac{R^2 \varphi}{L x}.$$

Dasselbe ist für Punkte in derselben cylindrischen Schichte constant, für Punkte in der äussersten Schichte $= \frac{1}{4} \frac{R\varphi}{L}$, für solche in der neutralen Schichte $= \frac{1}{2} \frac{R\varphi}{L}$ und für die Axe $= \infty$.

VI. Statisches Moment der Torsion, hervorgebracht durch die Längenänderungen der Fasern.

Die Kraft 4), welche in der Richtung der Fasern ausdehnend wirkt, liefert eine zur Axe normale Componente gleich

$$E \frac{\sqrt{L^2 - a^2 \varphi^2 + \varphi^2 x^2} - L}{L} \cdot \frac{\varphi x}{\sqrt{L^2 - a^2 \varphi^2 + \varphi^2 x^2}}.$$

Diese Kraft verschwindet für $x = a$, weil in der neutralen Schichte keine Resultante vorhanden ist; sie wird für Werthe zwischen $x = a$ und $x = R$ positiv und für Werthe zwischen $x = a$ und $x = 0$ negativ. Multiplicirt man dieselbe mit dem Hebelarme x und dem Flächenelement $2\pi x dx$ und integrirt innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = R$, so ergiebt sich

$$\frac{2\pi\varphi E}{L} \int_0^R \left(x^3 - \frac{L x^3}{\sqrt{L^2 - a^2 \varphi^2 + \varphi^2 x^2}} \right) dx$$

als statisches Moment der Torsion, welches aus der Längenänderung der Fasern entspringt. Nun ist

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{L^2 - a^2 \varphi^2 + \varphi^2 x^2}} = \frac{x^2 \sqrt{L^2 - a^2 \varphi^2 + \varphi^2 x^2}}{\varphi^2} - \frac{2 (L^2 - a^2 \varphi^2 + \varphi^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{3 \varphi^4}$$

folglich das obige bestimmte Integral

$$\frac{2\pi\varphi E}{L} \left[\frac{R^4}{4} - \frac{L R^2 \sqrt{L^2 - a^2 \varphi^2 + \varphi^2 R^2}}{\varphi^2} + \frac{2L (L^2 - a^2 \varphi^2 + \varphi^2 R^2)^{\frac{3}{2}}}{3 \varphi^4} - \frac{2L (L^2 - a^2 \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{3 \varphi^4} \right]$$

Entwickelt man in Reihen und setzt den Werth von a aus 3) ein, so erhält

man, wenn die Glieder von der 5ten Potenz von φ an vernachlässigt werden, als gesuchtes Moment

$$8) \qquad \frac{\pi E}{24} \cdot \frac{R^6 \varphi^3}{L^3}.$$

Da dieser Ausdruck die 3te Potenz von φ enthält, so üben die Längenänderungen für kleine Torsionen einen unmerklichen Einfluss aus auf das äussere verdrehende Moment.

VII. Statisches Moment der Torsion, hervorgebracht durch die Querverschiebungen.

Es sei T der Modul der Elasticität für die Querverschiebung, so ist $T.\frac{\varphi x}{L}$ die Kraft, welche ein Faserprisma von der Länge L und dem Querschnitte 1 im Innern der Welle um φx normal zur Axe verschieben kann. Multiplicirt man diese Kraft mit dem Flächenelement $2\pi x\,dx$ und dem Hebelsarm x und integrirt innerhalb $x = 0$ und $x = R$, so erhält man das verlangte statische Moment der Torsion, nämlich

$$9) \qquad \frac{2\pi\varphi T}{L}\int_0^R x^3\,dx = \frac{\pi T}{2} \cdot \frac{R^4 \varphi}{L}.$$

VIII. Gesammtes Torsionsmoment.

Das äussere Moment des Kräftepaars, welches die Welle verdreht, und das wir mit M bezeichnen wollen, ist gleich der Summe der Momente 8) und 9); mithin

$$M = \frac{\pi T}{2} \cdot \frac{R^4 \varphi}{L} + \frac{\pi E}{24} \cdot \frac{R^6 \varphi^3}{L^3}$$

Nehmen wir mit Navier $T = 0{,}4 E$ an, so wird, indem man die Ausdehnung λ nach 5) einführt:

$$10) \qquad M = \frac{\pi E}{5} \cdot \frac{R^4 \varphi}{L}\left(1 + \frac{5\lambda}{6L}\right).$$

Diese Formel hat so lange Geltung, als die Formänderung innerhalb der Grenzen der Elasticität stattfindet. Für diese Grenze ist nach Poncelet bei Schmiedeisen $\frac{\lambda}{L} = \frac{1}{1500}$. Mithin verhalten sich in diesem Falle die Momente, hervorgehend aus der Längenänderung und den Querverschiebungen, wie 1 : 1800. Sollte die vorangehende Formel, wenigstens annähernd, noch Geltung für den Bruch haben und nimmt man für diesen Fall bei Schmiedeisen $\frac{\lambda}{L} = \frac{1}{50}$ an, so würden sich die beiden Momente verhalten wie 1 : 60.

Man sieht hieraus, dass es bei Versuchen über die Torsion kaum möglich ist, den Einfluss der Längenänderung der Fasern zu beobachten. Es geht aber auch aus unserer Darstellung überhaupt hervor, dass die Längenänderung der Fasern nicht zur Bestimmung des Torsionsmomentes benutzt werden kann, wie diess z. B. in der „Ingenieur-Mechanik“ von Weissbach geschehen ist.

XIII.

Ueber Leuchtmaterialien.

Von Dr. Hugo Fleck,

Assistent an der königl. polytechnischen Schule in Dresden.

Das Bestreben der Techniker, die Apparate der Beleuchtung zu einer so hohen Vollkommenheit gelangen zu lassen, dass dieselben, mit grösstmöglichster Einfachheit ausgestattet, die höchsten Lichteffecte zu erzeugen im Stande seien, hat in neuester Zeit eine Reihe sehr wichtiger Fragen an die Chemie und Physik ergehen lassen, von deren völliger und unbestreitbarer Beantwortung beide Wissenschaften zum grossen Theil noch zu weit entfernt sind, als dass nicht Jeder, der den Fortschritten der Beleuchtungsindustrie mit wissenschaftlichem Interesse folgte, sich veranlasst finden sollte, in die Reihe der Antwortgeber zu treten.

Ausser den öconomischen Interessen, deren reiflichste Erörterung zu sehr das praktische Gebiet berührt, um in diesen Blättern erschöpfend besprochen werden zu können, sind es die während der Verbrennung der Leuchtmaterialien auftretenden Zersetzungs- und Verbindungsprozesse und die aus denselben resultirenden Lichteffecte, welche um so mehr einer vielseitigen Betrachtung werth sind, als von ihnen und ihrer gehörigen Leitung, Förderung und Benutzung einerseits sowohl ein höheres Leuchtvermögen der Materialien, als auch andererseits ein aus diesen von selbst erwachsender Vortheil für die Consumenten entspringen muss.

Alle organischen Stoffe, welche mit leuchtender Flamme brennen, sind unter verschieden günstigen Einflüssen der Erzeugung gleicher Lichteffecte fähig, und jeden Augenblick kann durch das Experiment bewiesen werden, dass der Kiehnspahn mit dem Glanze der Paraffinkerze zu brennen im Stande ist, sobald den entweichenden Zersetzungsprodukten zu ihren völligen und effektreichsten Verbrennung genügende Quellen geboten sind. Es werden die qualitativen und quantitativen Verhältnisse, in denen letztere auf die Leuchtmaterialien wirken, bedingt sein

1. durch die chemische Zusammensetzung
2. durch die Form, in welcher sie als Beleuchtungsmittel verwendet werden; beide müssen ihrem Werth nach im umgekehrten Verhältniss zu den ihren Lichteffekt erhöhenden Hülfsmitteln stehn.

Die Fette des Thier- und Pflanzenreichs enthalten als nähere Bestandtheile in Zusammensetzung und Consistenz verschiedene organische Säuren, die Fettsäuren, und stellen, indem sie an ein organisches Oxyd gebunden sind, organische Salze dar, deren theilweise Zersetzung und Umsetzung die Grundlagen der Seifen- und Stearinfabrikation bilden. Ausser diesen

von der Natur gebotenen Leuchtmaterialien hat es die neuere Zeit verstanden, in den aus der trocknen Destillation organischer Stoffe resultirenden Zersetzungsprodukten eine Reihe grösstentheils aus Kohlenstoff und Wasserstoff bestehende, theils feste, theils flüssige oder gasförmige Leuchtmaterialien zu erzeugen, deren Werth für die Beleuchtungsindustrie so gross und deren fabrikmässige Darstellung so folgenreich für letztere ist, dass man mit ihrem Auftreten unbedingt eine neue Epoche dieses Industriezweiges begrüssen muss.

In Bezug auf die Leuchtkraft hat die Erfahrung bis jetzt den Grundsatz geltend zu machen versucht, dass erstere ihren Höhepunkt da erreicht, wo das Leuchtmaterial oder seine während der Verbrennung auftretenden Zersetzungsprodukte sich in ihrer Zusammensetzung dem Elaylgas nähern, dass ferner der Sauerstoffgehalt derselben durch seine Wasserstoff absorbirende Eigenschaft hindernd auf das Leuchtvermögen und auf die dasselbe bedingende völlige Erglühen des freiwerdenden Kohlenstoffs wirke, und nur in den Fällen, wo trotz eines geringen Sauerstoffgehaltes der Lichteffekt ein unterdrückter war, konnte für die Verminderung des letzteren ein genügender Grund nicht gegeben werden. — Es liegt auf der Hand, dass hier ausser der chemischen elementaren Zusammensetzung, welche für den obigen Fall massgebend für die Leuchtkraft sein könnte, noch andere Bedingungen obwalten müssen, deren Erörterung die Aufgabe ist, welche sich der Verfasser in Folgendem gestellt hat.

Die procentische Zusammensetzung der Leuchtmaterialien, in soweit dieselbe bis jetzt bekannt ist, macht es uns möglich, die zunächst liegenden Bedingungen einer grösseren oder geringeren Leuchtkraft zu erkennen und gestattet uns, Vergleiche anzustellen, welche theilweise praktisch bewährt sind. Ich füge, indem ich dieselben folgen lasse, noch die Zusammensetzung einiger flüssiger und fester Stoffe bei, welche, obgleich nicht zu den Leuchtmaterialien gehörend, doch den Schlüssel zur Lösung einiger späteren Fragen bieten sollen.

	Kohlenstoff.	Wasserstoff.	Sauerstoff.	chemische Formel.
Elaylgas, Photogen, Paraffin	85,71	14,29	— —	$C_n H_n$
Wachs (gebleicht)	81,80	12,67	5,55	$C_{38} H_{38} O_3$
Wallrath	81,60	12,80	5,60	$C_{97} H_{64} O_5$
Hammeltalg	78,00	11,70	9,30	$C_{56} H_{50} O_5$
Stearinsäure	76,05	12,68	11,27	$C_{36} H_{36} O_4$
Colophonium	79,27	10,15	10,58	$C_{10} H_{10} O$
Terpenthinöl	88,23	11,77	— —	$C_{10} H_8$
Aether	64,85	13,51	21,62	$C_4 H_5 O$
Alkohol	52,15	13,04	34,77	$C_4 H_6 O_2$
Aceton	68,57	8,57	22,86	$C_3 H_3 O$

Ist die Annahme, dass der Sauerstoff der Leuchtmaterialien sich zur Wasserbildung der erforderlichen Wasserstoffmengen aus dem Wasserstoffgehalte der Leuchtmaterialien bediene, richtig, und lässt sich erwarten, dass das Elaylgas ($C_2 H_2$) während seiner Verbrennung in der Weise zersetzt werde, dass der Wasserstoff durch seine Vereinigung mit dem atmosphäri-

schen Sauerstoff das Erglühen des Kohlenstoffs und dadurch das Leuchten der Flamme bewirke, so folgt: dass alle organischen Stoffe, welche nach der Vereinigung des chemisch gebundenen Sauerstoffs mit einem bestimmten Antheil Wasserstoff, noch so viel von letzterem Elemente enthalten, als zur Bildung von Elaylgas mit der vorhandenen Kohlenstoffmenge nöthig ist, bei ihrer Verbrennung eine dem Elaylgas gleiche Flamme geben müssen; dass ferner überall da, wo die Kohlenstoffmenge die zur Elaylgasbildung erforderlichen Quantitäten übersteigt, feine Kohlen zurückbleiben, also ein Verkohlungsprocess stattfinden, oder solche in Form von Russ während der Verbrennung abgeschieden werden muss, sofern er sich an dem Vergasungsprocesse betheiligt hatte; dass endlich Leuchtmaterialien, welchen die zur Elaylgasbildung nöthige Kohlenstoffmenge mangelt, in ihrem Lichteffekte sich um so mehr dem des Sumpfgases (CH_2) nähern müssen, als sich die Zusammensetzung der entweichenden Gase diesem Atomcomplexe nähert. — Ein Blick auf die vorausgeschickte Tabelle und auf die Lichteffekte, welche den meisten der daselbst erwähnten Stoffe resultiren, belehrt uns jedoch, dass obige Annahme nicht bei jedem Leuchtmaterial in vollem Masse Geltung finden kann, und dass, ausser der elementaren Zusammensetzung, die physikalischen Eigenschaften der Leuchtmaterialien (ihre Dichtigkeit, Schmelzbarkeit, die grössere oder geringere Differenz ihrer Zersetzungsprodukte) wesentliche Einflüsse auf die zu erzielenden Lichteffekte äussern müssen.

Versuche ich es, die vorausgeschickten, aus der procentischen Zusammensetzung berechneten empirischen Formeln in die Bestandtheile des Wassers und Elaylgases zu zerlegen, so resultirt:

Wachs	$= C_{23} + C_{35}\ H_{35} + 3\,HO.$
Wallrath	$= C_{28} + C_{59}\ H_{59} + 5\,HO.$
Talg	$= C_{11} + C_{45}\ H_{45} + 5\,HO.$
Stearinsäure	$= C_4 + C_{32}\ H_{32} + 4\,HO.$
Colophonium	$= C + C_9\ H_9 + HO.$
Terpenthinöl	$= C_2 + C_8\ H_8.$
Aether	$= C_4 H_4 + HO.$
Alcohol	$= C_4 H_4 + 2\,HO.$
Aceton	$= C + C_2\ H_2 + HO.$

Nach dem oben Gesagten müsste diejenige Verbindung, welche bei ihrer Zersetzung vollkommen in eine dem Elaylgas polymere Verbindung und Wasser aufgeht, den vollkommensten Leuchteffekt, alle mit Kohlenstoffüberschuss sich zerlegenden eine Russabscheidung geben und die daraus hervorgehende Scala wäre, wenn ich mit dem, der Formel nach den höchsten Lichteffekt gebenden, Aether beginne: Aether, Weingeist, Colophonium, Stearinsäure, Talg, Wachs, Wallrath, Aceton, Terpenthinöl.

Die gänzliche Verschiedenheit dieser hypothetischen Reihe mit der praktischen Wahrheit leuchtet auf den ersten Blick ein. Wir dürfen, das geht daraus hervor, die empirische Formel der Leuchtmaterialien für nichts Anderes als die quantitative Elementarnomenclatur halten und müssen, wollen wir der Wahrheit auf dem Wege der Spekulation näher kommen, zu anderen Hülfsmitteln greifen. — Je höher wir in der Reihe der polymeren Kohlenwasserstoffe von der Formel CH und deren abgeleiteten Oxydations- oder Substitutionsprodukten steigen, desto dichter gestalten sich dieselben, desto höher liegt ihr Schmelzpunkt und Kochpunkt und desto enger fallen

die beiden letzteren zusammen, desto höher atomisirt gestalten sich aber auch ihre Zersetzungsprodukte und deren Dichtigkeitsverhältnisse bei gleichen Zersetzungstemperaturen. Ein Blick auf die Reihe der sogenannten Fettsäuren und auf die durch Erhitzung ihrer Salze mit freien Alkalien resultirende Acetonreihe bestätigt letztere Annahme und lässt keinen Zweifel hegen, dass auch bei der Zersetzung der Fette während deren trockner Destillation Atomgruppen sich gestalten, welche, je nach der Dichtigkeit des Fettes, Dämpfe von verschiedener Dichte bilden. Der in dem Kerzen- oder Lampendocht vor sich gehende Zersetzungsprocess ist bei seiner Einleitung nichts Anderes als eine trockene Destillation des organischen Leuchtmaterials. Je nach den Wärmemengen, welche während der Verbrennung der aus den Dochtröhren freiwerdenden Gase auftreten, muss die Temperatur in den Dochtröhren eine der entwickelten Wärme proportionale sein und jedenfalls Zersetzungsprodukte von stets gleicher Beschaffenheit hervorbringen, sobald das Leuchtmaterial in seiner Masse von ganz gleicher Dichtigkeit, von gleicher chemischer Zusammensetzung, von constantem und gleichem Schmelz- und Kochpunkte ist; die Folge einer solchen normalen Gasentbindung muss die Gleichmässigkeit der Flammen und eine der atomistischen Gruppirung der Elemente proportionale Leuchtkraft sein. Nehmen wir — vor der Hand von dem Einfluss des in den Fetten enthaltenen Sauerstoffs auf den Zersetzungsprocess absehend — an, dass die entweichenden Kohlenwasserstoffe von der Formel (CH) um so höher atomisirt sind, je dichter, je schwerer schmelz- und zersetzbar die organische Verbindung ist, so erhellt, dass bei der Einwirkung des atmosphärischen Sauerstoffs auf die entweichenden Gase um so grössere Mengen Wasserstoff aus den letzteren gleichzeitig an dem Verbrennungsprocesse theilnehmen müssen, ferner, dass dadurch eine Wärmemenge resultirt, welche sowohl das Erglühen des seines Wasserstoffs beraubten Kohlenstoffs bedingt, als auch eine vollständige Verbrennung desselben gestattet, sobald er aus der verbrennenden Wasserstoffschicht austretend, in glühendem Zustande dem atmosphärischen Sauerstoff preisgegeben ist. Denkt man sich nun ein Leuchtmaterial aus verschiedenen Fettsäuren zusammengesetzt, wie dies beim Talg der Fall ist, aus Fettsäuren, deren Schmelzpunkte bedeutend differiren und deren Kochpunkte daher um so weiter von einander entfernt sind, so erhellt, dass die Zersetzung der leichter schmelz- und zersetzbaren Oelsäure viel schneller und mit weit grösserer Heftigkeit von Statten gehen muss, als die der schwerer schmelzbaren Stearinsäure, dass ferner die durch die Verbrennung der aus letzterer austretenden, höher atomisirten Kohlenwasserstoffe hervorgerufene Temperatur wohl stets gleiche Zersetzungsprodukte von dieser, aber völlig mit ihnen differirende der Oelsäure hervorrufen muss, wodurch eine Ungleichmässigkeit der Gasbildung bedingt wird, welche insofern verändernd auf die Leuchtkraft der Talgkerze einwirken muss, als die von der Oelsäure mit grösserer Heftigkeit entweichenden Gase während ihres Durchdringens der aus der Stearinsäure sich bildenden dichteren Gase nicht Zeit genug findet, sich mit ersteren zu diffundiren, und daher, den glühenden Theil der Flamme durchströmend, sowohl eine Verminderung der Verbrennungstemperatur des Wasserstoffs und daher ein herabgestimmtes Erglühen des aus seiner Verbindung mit diesem tretenden Kohlenstoffs bedingt, als auch durch seine eigne Masse verdünnend und daher die Leuchtkraft vermindernd auf den hellen Flammentheil wirkt. Wir dürfen die Dochte der Talgkerzen als ein System von Gasretorten betrachten, in wel-

chen je nach der auf letztere wirkenden Temperatur sich die Zersetzungsprodukte der Fettsäuren mit grösserer oder geringerer Heftigkeit und Geschwindigkeit und von verschiedener atomistischer Zusammensetzung, daher auch von verschiedener Dichtigkeit entbinden; die daraus resultirenden Differenzen der Gasströmung bedingen eine Unregelmässigkeit der Flamme und eine Verminderung der Leuchtkraft. — Da sich die Dichtigkeiten der Gase proportional dem Quadrat der Ausströmungszeiten verhalten, so muss aus derselben Ausströmungsöffnung in gleichen Zeiträumen von zwei Gasen eine diesem Verhältniss entsprechende Menge ausströmen, welche um so mehr auf die Lichteffekte influiren muss, je grösser die Differenzen der Gasdichtigkeit sich gestalten.

Durch dieselbe Oeffnung, durch welche in 460 Secunden 3 Cubicfuss atmosphärische Luft strömen, werden in derselben Zeit 4,64 Cubicfuss eines Gases von 0,647 spec. Gewicht gehen, also beide Gase zusammen in 920 Secunden einen Raum von 7,64 Cubicfuss erfüllen. Wenden wir dieses Beispiel auf die in dem Dochte sich bildenden Gase an, so werden, da ihre Entwickelung während des Leuchtprocesses eine continuirliche und ihren Dichtigkeiten proportionale ist, in gleichen Zeiträumen von den dichteren Kohlenwasserstoffverbindungen um so geringere Mengen den Gasraum erfüllen, je grösser die Gasmengen der leichteren Kohlenwasserstoffe sind und je höher die auf die Dochtröhren wirkende Temperatur ist. Im Wachs ist ein Leuchtmaterial geboten, dessen einzelne Atomcomplexe in ihren Dichtigkeitsverhältnissen so wenig differiren, dass die aus denselben sich bildenden Gase sich mit fast gleicher Intensität an dem Verbrennungsprocesse betheiligen können, für dessen Vollständigkeit die so hoch atomisirte Kohlenwasserstoffgruppe, welche bei der Zerlegung der Formel hervortritt, spricht. In hohem Grade gleichmässig müssen sich die Vergasungsverhältnisse der Stearinsäure gestalten, deren Masse von stets gleicher Dichtigkeit und Schmelzbarkeit ist und daher jedenfalls gleich zusammengesetzte Gase liefern muss. Der oben zergliederten empirischen Formel gemäss stünde zu erwarten, dass das Colophonium mit einer der Stearinsäure gleichen Intensität im Dochte verbrennen müsse, doch lehrt uns die Erfahrung das Gegentheil und die physikalischen Eigenschaften dieses wie der meisten Harze lassen auch nie einen hohen Lichteffekt unter den den Kerzen analogen Verbrennungsbedingungen erwarten Das Colophonium ist eine aus mehreren Harzsäuren und jedenfalls noch andern nicht genau studirten Atomgruppen bestehende Verbindung, deren Schmelzpunkt bei + 135° C. liegt. Die Höhe desselben spricht für die hohe Atomisirung seiner Zersetzungsprodukte, zu deren völliger Verbrennung die von der atmosphärischen Luft gleichzeitig gebotenen Sauerstoffmengen entweder nicht hinreichen oder deren gasförmige Zersetzungsprodukte wegen ihrer zu grossen Dichtigkeit der sie umgebenden Atmosphäre nur geringen Zutritt gestatten, als dass ein vollständiges Verbrennen des Wasserstoffs und ein damit Hand in Hand gehendes genügend helles Erglühen des Kohlenstoffs erzielt werden könnte.

Es unterliegt somit keinem Zweifel, dass die Temperatur der Lichtflamme dem gleichzeitig dem Verbrennungsprocesse preisgegebenen Brennmaterial proportional ist, dass daher deren Wärmeeffekt sich um so höher gestalten muss, je mehr atmosphärische Luft gleichzeitig den in deren Sauerstoffgehalt äquivalenten Verhältnissen auftretenden Kohlenwasserstoffverbindungen geboten wird und je weniger chemisch gebundener Sauerstoff dem Leuchtmaterial inne wohnt, indem derselbe Wasserstoff entziehend und

somit die Flammentemperatur in zweifacher Weise deprimirend wirkt, wie dies beim Aether, noch mehr beim Alkohol der Fall ist. Es liegen uns über die Temperaturwerthe der Lichtflamme noch so wenig zuverlässige Resultate vor und die zur Zeit dazu verwendeten Apparate ermangeln so alles Vertrauens, dass wir, sobald es darauf ankommt, Vergleiche zwischen den Temperaturen der verschiedenen Lichtflammen zu ziehen, vielleicht mit mehr Sicherheit auf die Resultate der Berechnung bauen dürfen. Aus dem bisher Besprochenen dürfte zur Genüge erhellen, dass Flammentemperatur und Lichteffekt in bestimmtem Verhältnisse zu einander stehen müssen, und dass, je grössere Mengen Kohlenstoff und Wasserstoff in gleicher Zeit an dem Verbrennungsprocesse Theil nehmen, und je mehr Sauerstoff zuvörderst die Verbrennung des Wasserstoffs befördert, die Leuchtkraft um so höher steigen muss. Sind uns daher die Kohlenstoff- und Wasserstoffmengen bekannt, welche gleichzeitig den Verbrennungsprocess bedingen und kennen wir den Wärmeeffekt, welchen beide Elemente während ihrer Verbrennung in atmosphärischer Luft hervorbringen, so sind wir jedenfalls unter Hinzuziehung der bereits erlangten photometrischen Erfahrungen in den Stand gesetzt, die Verhältnisse festzustellen, in denen die Flammentemperaturen zu den Lichteffekten stehen und die Bedingungen zu begründen, welche der günstigsten Gestaltung ersterer zu Gebote stehen müssen.

In den Zersetzungsverhältnissen organischer Verbindungen finden ebenso streng begrenzte stöchiometrische Verhältnisse statt, wie sie sich bei den Zersetzungen unorganischer Verbindungen herausstellen und die bisher nur angedeuteten Progressionen derselben im Verhältniss zu ihrer atomistischen Gruppirung und der auf sie wirkenden Wärmemenge lassen ein Gesetz vermuthen, welches allen Zersetzungsprocessen organischer Verbindungen unterliegt.

Es lassen sich zuvörderst, als durch die Erfahrung genügend bestätigt, folgende Sätze feststellen:

1. Alle aus Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff bestehenden organischen Verbindungen besitzen, je nach der Atomenanzahl, in welcher diese Elemente zusammengetreten sind, mit denselben wachsende Schmelz- und Kochpunkte.
2. Mit der Anzahl der zu einer organischen Verbindung gruppirten Elementaratome sinken die Zersetzungstemperaturen, so dass sich letztere bei den höher atomisirten Verbindungen unter deren Kochpunkt befinden und dieser unter dem obwaltenden Atmosphärendruck nicht mehr constatirt werden kann.
3. Die bei constanten Temperaturen auftretenden Zersetzungsprodukte organischer Verbindungen stehen mit letzteren in bestimmten stöchiometrischen Beziehungen und sind um so höher atomisirt, je höher es die ursprüngliche Verbindung war.
4. Je grösser die Wärmemengen sind, welche gleichzeitig den Zersetzungsprocess hervorrufen, desto niedriger atomisirt resultiren die Zersetzungsprodukte, desto geringer ist ihre Dichtigkeit, desto grösser ihre Flüchtigkeit.

Aus folgender der Fettsäuregruppe angehörenden Reihe organischer Verbindungen ergiebt sich, dass mit dem Eintritt eines dem Elaylgas (C_2H_2) entsprechenden Atomcomplexes der Kochpunkt um 17—20^0 erhöht wird, während sich die Dichtigkeit der Dämpfe um 0,4127 vermehrt:

	Formel.	Dichtigkeit.	Kochpunkt.
Ameisensäurehydrat	$C_2H\ O_3+HO.$	1,5961	99° Cels.
Essigsäurehydrat	$C_4H_3O_3+HO.$	2,0836	117° „
Metacetonsäurehydrat	$C_6H_5O_3+HO.$	2,5712	138° „
Buttersäurehydrat	$C_8H_7O_3+HO.$	3,0585	157° „
Baldriansäurehydrat	$C_{10}H_9O_3+HO.$	3,5458	176° „
Capronsäurehydrat	$C_{12}H_{11}O_3+HO.$	4,0331	197° „
Oenanthsäurehydrat	$C_{14}H_{13}O_3+HO.$	4,5204	218° „
Caprylsäurehydrat	$C_{16}H_{15}O_3+HO.$	5,0077	236° „

Die Dampfdichte der Verbindung C_2H_2 (0,9746) wächst um ihr Gleiches, je mehr dieses Atomcomplexes gleichzeitig zusammengetreten ist, so dass die Dampfdichte eines aus C_8H_8 bestehenden Kohlenwasserstoffs, der unter der mittleren Temperatur und bei normalem Luftdrucke eine Flüssigkeit sein würde, schon 4. 0,9746 = 3,8984 beträgt.

Die Beobachtungen, welche Couërbe in der Dichtigkeitszunahme der folgenden Kohlenwasserstoffe machte, beweist, dass auch durch das Eintreten einfacher Kohlenstoffatome die Differenzen in den Dichtigkeitsverhältnissen gleichmässige bleiben:

$$\left.\begin{array}{l} C_4H_4 = 1,9348 \\ C_5H_4 = 2,3494 \\ C_6H_4 = 2,7640 \\ C_7H_4 = 3,1786 \\ C_8H_4 = 2,5932 \end{array}\right\} \text{Diff.} = 0,4146.$$

Diese berechnete Dichtigkeit stimmt mit der Beobachtung so nahe überein, dass auftretende Verschiedenheiten wohl auf Kosten des Experimentes zu bringen sind.

Genügen diese Angaben, um zu beweisen, dass, je nach der Atomgruppirung, die Dichtigkeitsverhältnisse organischer Verbindungen mathematisch begrenzte sind, so liegt es nahe, dass auch die Zersetzungsprodukte, welche bei bestimmten Temperaturen aus denselben hervorgehen, progressiv atomisirt sind.

Durch die Erhitzung der fettsauren Alkalisalze bei Anwesenheit freier Alkalien resultirt eine Reihe von Destillationsprodukten, welche sowohl in ihrer Zusammensetzung als in ihren Siedepunkten analoge wachsende Verhältnisse aufzuweisen haben und folgenden Formeln entsprechen:

Aceton	$= C_3H_3O =$	Siedepunkt bei	+ 56° Cels.	
Metaceton	$= C_5H_5O =$	„ „	+ 97° „	
Butyron	$= C_7H_7O =$	„ „	+ 138° „	
Valeron	$= C_9H_9O =$	„ „	+ 179° „	

Ein noch sprechenderer Beleg geht uns, was die Zunahme der Dichtigkeits- und Flüchtigkeitsverhältnisse bei steigenden Atomverhältnissen anbelangt, aus der Reihe der Alkohole hervor:

	Formel.	Dampfdichte.	Kochpunkt.
Methyloxydhydrat (Holzgeist)	$C_2 H_3 O + HO$.	1,1056	+ 61° Cels.
Aethyloxydhydrat (Weingeist)	$C_4 H_5 O + HO$.	1,5893	+ 78° „
Amyloxydhydrat (Kartoffelfuselöl)	$C_{10} H_{11} O + HO$.	3,0379	+ 133° „

Es drängen sich uns nun zunächst folgende Fragen zur Beantwortung auf, von deren Lösung die Möglichkeit abhängig ist, die Temperaturen der Lichtflammen zu finden und von ihnen aus, unter Berücksichtigung der jeweiligen Consumtionsverhältnisse, den Leuchtwerth der Leuchtmaterialien zu bestimmen:

1. In welchem Verhältniss stehen die Siedepunkte organischer Verbindung zu ihrer gefundenen oder berechneten Dampfdichte?
2. Welche Beziehungen walten zwischen den in ersterer Frage gefundenen Zahlengrössen und den Schmelz- und Zersetzungstemperaturen ob?
3. Von welcher Dichtigkeit sind die bei bestimmten Zersetzungstemperaturen auftretenden Zersetzungsprodukte?
4. Welche Wärmemengen werden bei der Verbrennung derselben erzeugt?

Das Verhältniss der Dampfdichte organischer Verbindungen zu ihrem Kochpunkte lässt sich für die Reihe der Fettsäuren
von der Formel $C_n H_n O_4$ (oder $C_n H_{n-1} O_3 + HO$),
für die der Aetherarten von der Formel $C_n H_{n+1} O$
und für die Reihe der Alkohole von der Formel $C_n H_{n+2} O$ (oder $C_n H_{n+1} O + HO$)
durch folgende Formeln ausdrücken, in welchen d und D die Dampfdichten, k und K die Kochpunkte ausdrücken:

$$a)\ \text{für die Fettsäuren:}\quad \frac{d}{D} : \frac{k}{K} = 1 : 0{,}7575\ \ldots$$

$$b)\ \text{für die Aether:}\quad \frac{d}{D} : \frac{k}{K} = 1 : 1{,}3419\ \ldots$$

$$c)\ \text{für die Alcohole:}\quad \frac{d}{D} : \frac{k}{K} = 1 : 0{,}8853\ \ldots$$

Durch dieselben sind wir in den Stand gesetzt die Kochpunkte derjenigen Atomgruppen zu finden, deren Zersetzungspunkt noch unter dem Kochpunkte liegt, und zu ihnen gehören vor Allem die Fettsäuren, welche in den Thier- und Pflanzenfetten vertreten sind, also die Basis der Leuchtmaterialien bilden.

Nach Formel a) gestaltet sich die Berechnung des Kochpunktes der Stearinsäure von der Zusammensetzung: $C_{36} H_{35} O_3 + HO$ in folgender Weise:

$$\frac{9{,}8807}{1{,}5961} : \frac{R}{99} = 1 : 0{,}7575$$

D und K sind hier die Dampfdichte und der Kochpunkt des Hydrats der Ameisensäure, d die berechnete Dampfdichte der Stearinsäure, so dass

$$(log\ d - log\ D) + (log\ K + log\ 0{,}7575) = log\ k$$
$$log\ k = log\ N + 464{,}2^0 \text{ Cels.}$$

Nach Formel b treten für die Kochpunkte des im Wallrath enthaltenen Cethyloxyds und des im gebleichten Wachs verbundenen Melissyloxyds folgende Zahlen auf:

$$\frac{16{,}2175}{2{,}5731} : \frac{k}{35{,}4} = 1 : 1{,}3419$$

$k = 376{,}9^0$ Cels. der Kochpunkt des Cethyloxyds $= (C_{32} H_{33} O)$

$$\frac{29{,}8119}{2{,}5731} : \frac{k}{35{,}4} = 1 : 1{,}3419$$

$k = 550{,}4^0$ Cels., der Kochpunkt des Melissyloxyds $= (C_{60} H_{61} O)$.

Aus dem Verhältniss der Dampfdichte und der Kochpunkte der Aetherarten und Alkohole ersehen wir, dass ebenso, wie bei den Fettsäuren durch das Eintreten von 1 Atom HO das specivische Gewicht der Dämpfe um eine bestimmte Grösse abnimmt; denn während die Dampfdichte des Methyloxyds $= 1{,}5982$, so ist die seines Hydrats, des Alkohols $= 1{,}1037$; und während die Dampfdichte der wasserfreien Ameisensäure $(C_2 H O_3) = 2{,}5692$, so ist die des Ameisensäurehydrats $= 1{,}5961$. Die hier auftretenden Differenzen sind zwischen dem Aether und seinem Hydrat $= 0{,}4945$ und bei den Fettsäuren und deren Hydraten $= 0{,}9731$. — In den Formeln b und c verhalten sich die Quotienten von

$$\frac{d}{D} \text{ und } \frac{k}{K} = \begin{cases} 1 : 1{,}3419 \\ 1 : 0{,}8853 \end{cases} \text{Differenz } 0{,}4566.$$

Da die Differenz der durch den Zutritt von 1 Atom Wasser zu den Aetherarten resultirenden Dampfdichten beinahe halb so gross ist als bei den Fettsäuren, so scheint die Annahme nicht ungegründet zu sein, dass die Quotienten aus den Dampfdichten und Kochpunkten der wasserfreien Fettsäuren in ihrem Verhältniss um die Hälfte der aus b und c gefundenen Differenz $\frac{(0{,}4566)}{2}$ erhöhen müssen, und sich dann die Formel

d) für die wasserfreien Fettsäuren gestaltet:

$$\frac{d}{D} : \frac{k}{K} = 1 : (0{,}7575 + 0{,}2283)$$
$$= 1 : 0{,}9858.$$

Während die Dämpfe der wasserfreien Fettsäuren gleich 2 Volumen und die ihrer Aetherverbindungen gleich 4 Volumen sind, so steht zu erwarten, dass hier Kochpunkte und Volumina in umgekehrtem Verhältniss stehen und mithin der Kochpunkt der Fettsäuren ein doppelt so hoher sein muss. Diese Annahme, welche sich allerdings bis jetzt nur bei der wasserfreien Ameisensäure und dem ameisensauren Aethyloxyd bestätigt, sich aber jedenfalls zwischen der Buttersäure und dem buttersauren Amyloxyd aufrecht erhält, gestaltet die Formel:

d) für die wasserfreien Fettsäuren:

$$\frac{d}{D} : \frac{k}{K} = 1 : 0{,}9893,$$

welche mit der vorigen fast völlig zusammenfällt. Nach dieser letzteren ergeben sich die Kochpunkte der wasserfreien Fettsäuren:

	Formel.	Dampfdichte.	Kochpunkt.
Ameisensäure	$C_2 H O_3$	2,5602	106,8° Cels.
Essigsäure	$C_4 H_3 O_3$	3,5428	145,2° „
Buttersäure	$C_8 H_7 O_3$	5,4930	225,1° „
Baldriansäure	$C_{10} H_9 O_3$	6,4671	265,0° „
Palmitinsäure	$C_{32} H_{31} O_3$	17,1883	706,8° „

In den Fetten erkennen wir nichts Anderes als Verbindungen wasserfreier Fettsäuren mit Aetherarten, welche beide hoch atomisirt und dicht sind. Um die Verhältnisse zwischen ihren Dichtigkeiten und Kochpunkten aufzufinden glaube ich noch die Dichtigkeits- und Siedepunktsverhältnisse mehrerer fettsaurer Aethyloxydverbindungen vorausschicken zu dürfen, um aus ihnen und den oben angedeuteten Verhältnissen die Kochpunkte der Fette zu bestimmen.

	Formel.	Dampfdichte.	Kochpunkt.
Ameisensaures Aethyloxyd	$C_4 H_5 O + C_2 H O_3$	2,5711	+ 53,4° Cels.
Essigsaures „	$C_4 H_5 O + C_4 H_3 O_3$	3,0584	+ 76,0° „
Buttersaures „	$C_4 H_5 O + C_8 H_7 O_3$	4,0330	+ 110,0° „
Baldriansaures „	$C_4 H_5 O + C_{10} H_9 O_3$	4,5201	+ 133,5° „

(Fortsetzung folgt.)

XIV.

Ueber einige Abänderungen und Verbesserungen in der Einrichtung der Volta-Inductionsapparate.

Von Witzschel.

Die Inductionsapparate bieten unter Umständen den besondern Vortheil dar, dass vermittels einer verhältnissmässig schwachen primären Elektricitätsquelle von ein oder zwei Elementen sehr kräftige Elektricitätserscheinungen hervorgerufen werden können. Letztere hängen von einer zweckmässigen, den Inductionserscheinungen richtig entsprechenden Einrichtung und Anordnung des Apparates ab, für welchen in neuerer Zeit mannigfache Abänderungen resp. Verbesserungen von verschiedenen Seiten angegeben worden sind. Eines besonderen Rufes erfreuen sich bis jetzt die Ruhmkorff'schen Apparate, welche durch Hinzufügung des Fizeau'schen sogenannten Condensators eine nicht unwesentliche Vebesserung erhalten haben. In neuester Zeit haben Poggendorf (Monatsberichte der K. Pr.

Akademie der Wissensch. 1855., 1854 Dec. S. 683., 1855 Jan. S. 12., März S. 208. Annal. der Physik u. Chem. Bd. 94. S. 289., Bd. 95. S. 156.) und Sinsteden (Pogg. Annal. Bd. 96. S. 353) über Einrichtung, Theorie und Wirkung von mannigfach abgeänderten Inductionsapparaten sehr beachtenswerthe Angaben gemacht, auf welche sowie auf einige andere Beschreibungen von Hülfs- und Nebenapparaten hier näher eingegangen werden mag. Die Poggendorf'schen Abhandlungen enthalten zugleich einige Details über die Construction der Inductionsapparate überhaupt, so dass es nicht unangemessen erscheinen dürfte, dieselben theilweise ganz unverkürzt hier zu wiederholen und daran die von Sinsteden angegebenen Abänderungen anzuknüpfen.

In seiner vollständigeren Gestalt besteht der Inductionsapparat aus 6 Hauptheilen, nämlich 1. der Drahtrolle, in welcher die Induction entwickelt wird, oder der Inductionsrolle; 2. der Drahtrolle, welche den inducirenden galvanischen Strom leitet, oder der Hauptrolle; 3. dem Eisendrahtbündel; 4. dem Stromunterbrecher; 5. dem Condensator und 6. der Volta'schen Batterie, als primärer Elektricitätsquelle. Hierzu kommen noch einige Neben- oder Hülfsapparate, nämlich eine Art allgemeiner Auslader, um einige Reductionserscheinungen mit grösserer Bequemlichkeit und Sicherheit zu beobachten, sodann das sogenannte elektrische Ei, sowie einige Vorrichtungen auf dem Teller einer Luftpumpe, um die Untersuchungen der Inductionserscheinungen im partiellen Vacuum mit grösserer Freiheit als mittels des elektrischen Eies anstellen und abändern zu können.

Diese einzelnen Theile, von denen jeder auf die übrigen fünf und auf die Gesammtwirkung, den Inductionsstrom, mehr oder weniger einwirkt, sollen nun einzeln kurz betrachtet werden.

1. Die Inductionsrolle. Bei den gewöhnlichen Inductionsrollen bilden die Drahtwindungen Lagen, die sich hin und her ohne Unterbrechung über die ganze Länge der Rolle erstrecken, gewöhnlich in grader Anzahl, so dass Anfang und Ende des Drahtes an ein und demselben Ende der Rolle liegen. Da aber in einem Draht, dessen Punkte alle in ziemlich gleichem Grade elektrisch erregt werden, die Spannungen von der Mitte aus nach den Enden hin in entgegengesetztem Sinne wachsen, so kommen bei dieser Anordnung der Drahtlagen Punkte von grosser elektrischer Differenz sehr nahe, wodurch ein Ueberspringen von Funken aus einer Drahtlage zur andern leichter möglich gemacht und so die Wirkung der Rolle abgeschwächt werden kann.

Diesem Uebelstande meint Poggendorff wenigstens theilweise dadurch abhelfen zu können, dass man erstlich die Rolle ihrer Länge nach in mehrere Abtheilungen zerfällt und eine nach der andern in der früher für die ganze Rolle angewandten Weise mit Draht umwickelt, dabei aber eine ungrade Anzahl von Lagen nimmt, damit die Drahtenden in jeder Abtheilung an entgegengesetzten Enden derselben auslaufen und mit den Enden der darüber und darunter stehenden Abtheilung leicht in Verbindung gesetzt werden können. Die Enden oder Pole der gesammten Inductionsrolle laufen somit auch an entgegengesetzten Enden derselben aus.

Ferner muss für eine gute Isolation der Drahtwindungen gesorgt werden. Die gewöhnliche Umspinnung des Drahtes mit Seide reicht dazu nicht aus, wie man sich schon länger davon überzeugt hat. In der Regel hat man diese Isolation verstärkt durch einen alkoholischen Lackfirniss, der aber,

wenn er wegen der grossen Länge des Drahtes, wie nicht gut anders möglich ist, lagenweise aufgetragen wird, schwerlich ganz austrocknet, vielmehr einen solchen Grad von Feuchtigkeit noch hartnäckig festhält, dass dadurch eine grössere Leitung unter den Drahtwindungen sich einstellt, als bei trockner Seide stattfindet. Poggendorff hat deshalb einen leicht schmelzbaren Isolator (Wallrath, Stearinsäure, ein Gemisch von Wachs und Oel) angewendet und zwar denselben über seinen Schmelzpunkt überhitzt aufgetragen, damit er auf den kalten Lagen der Drahtwindungen nicht sogleich erstarre, sondern vorher den Seidenüberzug gut durchdringe und somit den Draht recht allseitig isolire. Poggendorff schlägt als einen hierzu tauglichen ebenfalls leicht schmelzbaren und nach Riess gut isolirenden Körper noch Paraffin, das jetzt käuflich zu haben ist, vor; für noch bessere Isolatoren hält er aber flüssige Körper, wie rectificirtes Terpenthinöl, weil, wenn dennoch bei starker Spannung in der Inductionsrolle die Isolation durch Ueberspringen von Funken durchbrochen wird und dadurch Kanäle für einen leichten Uebergang der Elektricität aus einer Lage in die andere gebildet sind, diese isolirenden Flüssigkeiten die unterbrochene Isolation durch Ausfüllung der Kanäle wieder herstellen können. Sinsteden hat den übersponnenen Draht vor dem Aufwickeln mit Schellacklösung getränkt und gut trocknen lassen, ferner jede Lage des aufgewickelten Drahtes mit einem Blatt Wachspapier umgeben, so dass durch letzteres die Rolle nicht nach ihrer Länge sondern nach ihrer Dicke in eben so viel von einander isolirte, über einander liegende Abtheilungen oder Cylinder mit gemeinschaftlicher Axe getheilt ist, als sie Drahtlagen enthält. Es ist indess zu bemerken, dass ein gut getrockneter Schellacküberzug sehr spröde ist, und daher beim Aufwickeln, wenn auch durch den Seidenüberzug festgehalten, nicht abspringt, doch zersplittert und somit dem Drahte eine Menge Ecken und Schärfen darbietet, an welchen sich bekanntlich die Elektricität leichter fortleitet, da doch auch der Schellack kein absoluter Isolator ist. Man vermeidet vielleicht diesen Uebelstand, wenn man dem Schellack etwas Wachs oder weichen Terpenthin zusetzt, die weingeistige Lösung dieses Gemenges in sehr verdünntem Zustande auf den Draht überträgt und diesen Ueberstrich mehrmals wiederholt, nachdem der jedesmal vorhergehende gut ausgetrocknet ist. Am zweckmässigsten indess möchte sich ein halbflüssiger Isolator, wie sogenannter weicher venetianischer Terpenthin herausstellen, dessen Anwendung nicht viel umständlicher als der vorhergenannten ist, und der den von Poggendorff angeführten Vortheil der Selbstwiederherstellung der Isolation darbietet.

Um ferner nach Aussen hin eine gute Isolation herzustellen, erachtete Poggendorff es für zweckmässig, den Draht auf einen Glascylinder zu wickeln, die Seitenfassungen dieses Cylinders von Guttapercha zu nehmen, zumal sich in derselben die Ansatzstifte des Drahts gut befestigen lassen, dann die ganze Rolle mit einem dicken Wachsüberzug zu versehen und endlich, nachdem auch dieser gefirnisst worden, zwei starke Ringe von Guttapercha herumzulegen, mittelst welcher das Ganze auf einem Holzgestelle ruhen könne.

Nach den von ihm angegebenen Prinzipien hat er drei Rollen, jede zu 5¾ pariser Zoll Länge mit einem innern Durchmesser von 22 par. Linien und einem äussern von 32 par. Linien angefertigt. Zwei derselben enthalten einen äusserst dünnen Draht von nur 0,15 Millim. Durchmesser, in der dritten hat derselbe 0,25 Millim. Durchmesser. In jeder der beiden ersten

hat der Draht eine Länge von gegen 10,000 par. Fuss und macht in 8 Abtheilungen, deren jede 33 Lagen enthält, gegen 16000 Windungen. In der dritten Rolle hat der Draht 2400 par. Fuss Länge und bildet 19 Lagen.

Trotz dieser besonderen Vorkehrungen empfiehlt Poggendorff doch die Inductionsrollen nicht zu sehr anzustrengen oder zu hohe Spannungen in denselben hervorzurufen, weil nach seinen Erfahrungen doch ein Durchbrechen oder Ueberschlagen der Elektricität innerhalb der Rolle dadurch herbeigeführt wird und dann die Rollen weit weniger leisten als vorher. Ausser der Anwendung einer Flüssigkeit als Isolationsmittel empfiehlt er daher noch einen nicht zu dünnen Draht zu nehmen (Draht von ¼ Millim. hält er am geeignetsten) und demselben eine recht starke Umspinnung zu geben. Auch meint er, dass die bisher angewendete cylindrische Form vortheilhafter durch eine solenoid- oder spindelartige Gestalt vertreten werden könnte, weil die inducirende Rolle und das Drahtbündel ihre Wirkung hauptsächlich in der Mitte ausüben.

Sinsteden hat eine Rolle von 8 par. Zoll Länge und 3 Zoll Dicke aus einem 5300 Fuss langen ¼ Linie dicken Drahte (das doppelte Seidengespinnst mit gerechnet), der in 32 Lagen 10700 Windungen macht, angefertigt. Zwischen jede Lage ist, wie erwähnt, ein Blatt Wachspapier gelegt, wodurch die Rolle wenig verdickt wird, da die 32 Papierdicken zusammen nicht eine Linie betragen. Anfang und Ende des Inductionsdrahtes liegen an entgegengesetzten Enden der Rolle. Das innere Ende desselben ist an das Ende der Magnetisirungsspirale gelöthet, das äussere Ende dagegen setzt sich in ein 7 Fuss langes 7 Zoll breites Stanniolblatt, an welches es angelöthet ist, fort, indem dieses Stanniolblatt zugleich mit einem 8 Zoll breiten und 7 Fuss langen Streifen doppelten Wachspapiers in gleicher Richtung wie der Draht auf die Rolle fest aufgewickelt ist. Dieses grosse Stanniolblatt, dessen einzelne breite Windungen durch das dazwischen gelegte Wachspapier gut von einander isolirt sind, hat eine die Elektricität der Pole beträchtlich vermehrende Wirkung.

2. Die Hauptrolle und das Eisendrahtbündel. Die inducirenden Rollen haben an den Poggendorf'schen Apparaten keine von den gewöhnlichen wesentlich abweichende Construction, mit Ausnahme, dass eine jede derselben zwei übersponnene und überfirnisste Drähte enthält, die nach Belieben einzeln oder verbunden, neben- oder hintereinander angewendet werden können. Der Draht ist 1 Millim. dick und jede seiner Hälften 100 par. Fuss lang. Er ist bei zwei Exemplaren auf Röhren von Pappe, bei einem dritten auf eine Glasröhre mit 15½ par. Linien innerem Durchmesser gewickelt, und bildet auf derselben 4 Lagen, wodurch er die Inductionsrolle ausfüllt. Eine vierte Hauptrolle enthält einen 0,67 Millim. dicken und 400 par. Fuss langen Draht. Es ist nämlich unter übrigens gleichen Umständen die reducirende Wirkung eines galvanischen Stromes ganz wie seine magnetisirende Wirkung ein Produkt aus seiner Stärke in seine Länge, und es kann daher ein kurzer, dicker Draht bei grösserer Stromstärke durch einen längern, dünnen Draht bei kleinerer Stromstärke ersetzt werden. Das Letztere ist vortheilhaft, wenn man lang andauernde Wirkungen haben will, weil dabei die Volta'sche Batterie weniger stark angegriffen wird; doch wächst dabei der innere Inductionsstrom oder Extrastrom an Intensität, wodurch wieder Nachtheile herbeigeführt werden.

Statt des gewöhnlichen Bündels von ziemlich dicken Eisendrähten oder dünnen Eisenstäben, welche von einer gemeinsamen Hülle fest zusammen-

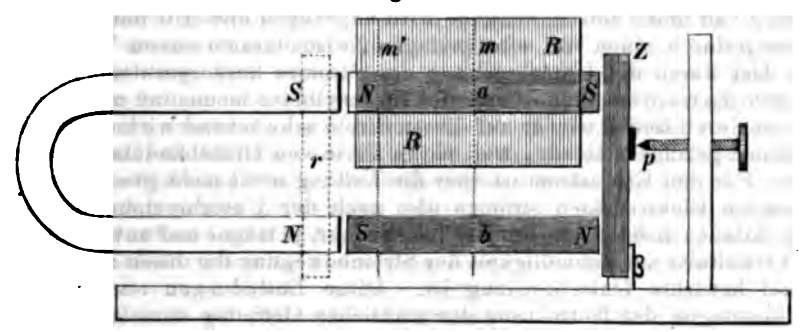
gehalten, jedoch durch einen isolirenden Firniss von einander getrennt werden, wendet Poggendorff ein ziemlich kunstloses Bündel sehr dünner Eisendrähte von 0,25 Millim. Durchmesser an. Der Draht wird ausgeglüht, in Stücke von angemessener Länge zerschnitten und mit Seidenfäden zu einem Bündel gebunden, das der besseren Handhabung wegen mit einer Papierhülle umgeben wird. Die beim Ausglühen entstandene Oxydulschicht, sowie die nicht völlig geradlinige Gestalt der einzelnen Drähte vertritt den Firniss hinreichend, wenn insbesondere das Bündel nicht zu fest zusammengeschnürt wird. Jedes Bündel enthält 4200 Drähte, welche bei zweien 6 par. Zoll Länge, also wenig mehr als die Inductionsrolle haben, bei einem dritten Bündel aber dreimal so lang oder 1½ Fuss sind. Die Anzahl der Drähte kann aber nach Poggendorff unbeschadet der Wirkung bedeutend verringert werden. Ein hohles Bündel von demselben Draht, das einen leeren cylindrischen Raum von 9 par. Linien einschloss und halb so viel als der massive wog, zeigte dieselben Wirkungen wie dieses.

Am Sinsteden'schen Apparate stehen Hauptrolle, Eisendrahtbündel und Stromunterbrecher wie gewöhnlich in einem viel engern Verhältnisse zu einander, dass deren Einrichtung und Wechselwirkung auf einander sich nicht gut getrennt von einander wiedergeben lässt. Dagegen hat es Poggendorff vorgezogen,

3. den Stromunterbrecher in Gestalt des sogenannten Neef'schen oder richtiger Wagner'schen Hammers ganz als ein selbständiges mit dem übrigen Apparate verschiedentlich in Verbindung zu setzendes Instrument hinzustellen. Zum Studium des Verlaufs und der Wechselwirkung der im Apparat entwickelten Elektricitäten, namentlich auch des Extrastromes, sowie der Wirkung des Condensators hat es nämlich Poggendorff vortheilhaft gefunden, den Neef'schen Hammer im partiellen Vacuum unter der Glocke der Luftpumpe arbeiten zu lassen (vergl. Poggend. Annal. Bd. 95. S. 156; Monatsber. der Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1855. S. 208). Einem dieser Stromunterbrecher hat er die gewöhnliche Einrichtung des Neef'schen Hammers mit federnder Zunge, die gegen den darüber stehenden Platinstift schlägt, gegeben und nur noch einen zweiten Stift unterhalb der Zunge angebracht, gegen welchen dieselbe beim Herabgehen schlägt, wodurch der galvanische Strom sowohl doppelt unterbrochen, als auch umgekehrt werden kann (Annal. Bd. 91. S. 290). Der andere Stromunterbrecher hat den Zweck, die Unterbrechungen im Innern einer tropfbaren Flüssigkeit vor sich gehen zu lassen. Der kleine Elektromagnet befindet sich deshalb oberhalb des Ankers der Zunge, welche auch den Platinstift oder Hammer trägt. Dieser schlägt gegen den Amboss, welchen ein dicker Platindraht vorstellt, der mitten in einem kleinen Glascylinder mit messingnem Fusse, auf den der Platindraht eingeschraubt ist, ruht. Um den Draht herum ist der Cylinder mit einer Lage Schwefel ausgegossen, welcher den meisten Flüssigkeiten in der Kälte zu widerstehen vermag.

Sinsteden ist bei der Anordnung seines Apparates darauf ausgegangen, die Vortheile, welche ein hufeisenförmiger Magnet vor einem stabförmigen hat, bei dem Inductionsapparate zu benutzen und hatte zu dem Ende den die Hauptrolle bildenden Draht zuerst um zwei 9 Zoll lange, ¾ Zoll dicke Cylinder von dünnen Eisendrähten *a* und *b* (Fig. 1) gewickelt, von denen *a* innerhalb der mit der Axe horizontal liegenden Inductionsrolle *R*, *b* unterhalb derselben zu liegen kam. Den Polen der Eisenstäbe wurden hier auf dicke Eisenstücke *r* und *Z* angelegt, von denen *r* unbeweg-

Figur 1.



lich fest angebracht wurde, Z dagegen an eine Feder gelegt, als federnde Zunge zur Unterbrechung des Stroms diente. Durch verschiedene Verbindung der 4 Enden der Magnetisirungsspirale mit zwei Bunsen'schen Elementen untersuchte er zunächst diejenige Anordnung der Drähte und Richtung des inducirenden Stromes, bei welcher die stärkste Wirkung sich am Apparat herausstellte. Dieselbe zeigte sich dann, wenn der Strom nur durch die eine innerhalb der Inductionsrolle befindliche Magnetisirungsspirale a geleitet wurde. Dabei ergab sich aber die Anwesenheit des Eisencylinders b sowie des Eisenstücks r als wesentliche Theile zur Erhöhung der Kraft des Apparats. Es wurde daher zunächst nur die Drahtspirale um den Eisencylinder b entfernt und der Magnetisirungsdraht um a gelassen, welcher aus zwei 50 Fuss langen, ⅛ Linie dicken, gut umsponnenen und gefirnissten Kupferdrähten bestand, welche neben einander herliefen, 250 Doppelwindungen in drei Lagen bildeten und deren Enden an entgegengesetzten Enden des Eisencylinders ausliefen. Die Wirkung wurde aber noch erheblich gesteigert, wenn an die Stelle des Eisenstücks r ein kräftiger Stahlmagnet von 50—60 Pfund Tragkraft so vorgelegt wurde, dass seine Pole gegen ungleichnamige Pole der Eisencylinder, wenn diese durch die Spirale erregt sind, zu liegen kamen. Diesen Zuwachs der Wirkung erklärt Sinsteden einmal durch den sehr starken, sowohl von der Elektricität in der Spirale als auch vom Stahlmagneten erregten und in gleichem Sinne wirkenden Magnetismus und sodann durch die Plötzlichkeit und rasche Aufeinanderfolge der Unterbrechung und Schliessung des Stromes, indem nun ein starker, mehrere Pfund betragender Federdruck nöthig ist, um die federnde Zunge Z von den Polen der Eisenstäbe abzutreiben. Bei Untersuchung der magnetischen Vertheilung in den Eisencylindern, während sie nur vom Stahlmagneten erregt sind, durch eine kleine Magnetnadel hat sich ihm nämlich ergeben, dass der Cylinder a bis auf einen sehr kleinen Theil N ganz südpolarisch und der Cylinder b bis auf einen kleinen Theil S ganz nordpolarisch ist. Wird nun der Magnetismus durch die Spirale erregt, so wird nicht nur der Magnetismus der Cylinder bedeutend erhöht, sondern es verschiebt sich auch, wie die Untersuchung durch eine kleine Magnetnadel gelehrt hat, die indifferente Linie m' von den Enden der Stäbe nach der Mitte m derselben, oder der Südmagnetismus, der beinahe den ganzen Cylinder a eingenommen hatte, zieht sich verstärkt auf die eine Hälfte zurück, während die andere Hälfte stark nordpolarisch wird. Dadurch erhält nun erst der Magnetismus in den Polen der Eisen-

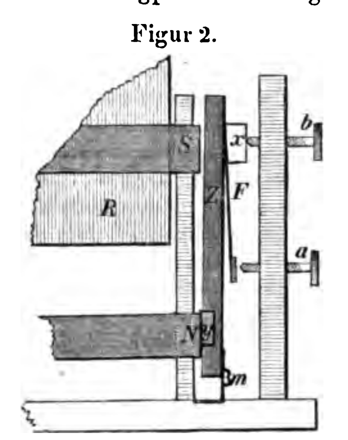
cylinder das Uebergewicht über den starken Federdruck, welcher das Eisenstück Z von ihnen abhält, dasselbe wird angezogen und tritt mit der Platinspitze p durch einen nur sehr geringen Zwischenraum ausser Verbindung.

Der durch die Unterbrechung des Stromes hervorgerufene gleichgerichtete Extrastrom magnetisirt die Eisencylinder momentan noch stärker, welche durch Reflex wieder auf diesen Strom schwächend wirken allerdings in einem geringern Grade, weil sie in Form von Drahtbündeln angebracht sind. Für den Extrastrom ist aber die Leitung nicht mehr geschlossen, die bewegten Elektricitäten strömen also nach der Unterbrechungsstelle hin und entladen sich dort in Funken um so mehr, je träger und unvollkommner im Verhältniss zur Schnelligkeit der Strombewegung die durch mechanische Mittel bewirkte Unterbrechung ist. Diese Entladungen oder partiellen Schliessungen der Kette trotz der wirklichen Oeffnung derselben scheinen eine gegenseitige Schwächung des primären und Extrastromes und deren Wirkung hervorzurufen, die durch Anlegung des Condensators, wovon weiter unten, sowie aber auch durch eine zweckmässige Einrichtung des Stromunterbrechers wenigstens theilweise gehoben werden kann.

Wird die federnde Zunge des Stromunterbrechers durch verschiedene Stellschrauben so gestellt, dass sowohl ihre Schwingungsweite, als auch der Druck, der sie von den Polen der Eisencylinder abtreibt, als auch der Stoss, den sie gegen die Platinspitze macht, nach Belieben verändert werden kann, so ist bei einer bestimmten Anordnung dieser Verhältnisse ein Maximum der Wirkung an den Polen der Inductionsrolle zu erwarten. Auf diese Weise hat Sinsteden die Bedingungen für dieses Maximum ermittelt und darnach eine möglichst zweckmässige und einfache Einrichtung der Zunge oder des Unterbrechers wie folgt angegeben.

Das die federnde Zunge bildende dicke Eisenstück Z (Fig. 2) ist mittels eines Messingplättchens biegsam auf dem Fussbrett des Apparats befestigt.

Figur 2.



Unten hat dies Eisenstück eine horizontale Nuthe, die durch einen dicken Streifen geschwefelten Kautschuk y angefüllt ist, der es mit grosser Kraft von dem Pole S des Eisenkerns abtreibt. Diesen Druck zu reguliren liegt oben auf der entgegengesetzten Seite des Eisenstücks eine Kautschukplatte x, welche mit einem Messingplättchen versehen ist, gegen welches die verstellbare Schraube b mehr oder weniger angedrückt werden kann. Die Messingfeder F ist oben an das Eisenstück Z drehbar angeschraubt, so dass sie von demselben wegfedert, worin sie durch ein zwischen geklemmtes Stück Kautschuk unterstützt wird; der Platinspitze p gegenüber trägt sie ein Platinplättchen. Durch Drehung und Verschiebung der Feder F um die sie befestigende Schraube kann der Platinspitze p immer eine andere Stelle des Platinplättchens gegenüber gestellt werden. Wenn nun die Theile F und p sich berühren, der galvanische Strom den Eisencylinder immer stärker magnetisirt, bis endlich der Druck des Kautschukstücks y überwunden ist, so nähert sich Z dem Pole S; dadurch wird die Feder F von dem Drucke, der sie zurückbog,

immer mehr frei und bewegte sich mit ihrer Platinplatte immer mehr nach entgegengesetzter Richtung als die Zunge *Z*, d. h. das Platinplättchen bleibt immer noch mit der Platinspitze in Berührung. Ist endlich die Feder *F* an der Grenze ihrer Rückwärtsbewegung, welche sie ausführen kann, angekommen, wobei der obere Theil der Zunge *Z* beinahe bis zur Berührung dem Pole *S* sich genähert hat, der Magnetismus des Eisencylinders also am stärksten wirkt, so wird in dem kurzen Moment, in welchem *Z* sich völlig an *S* anlegt, die Feder *F* mit derselben Schnelligkeit, wie sich *Z* bewegt, vom Platinstift *p* sich trennen und den Strom unterbrechen. Diese Unterbrechung währt nur eine sehr kurze Zeit, weil die Contacttheile, die Feder und der Platinstift, immer in der grössten Nähe geblieben sind, so dass sie, wenn der obere Theil der Zunge vom Pole *S* nicht mehr angezogen wird und von dem jetzt auf's Höchste zusammengepressten Kautschukstück *y* zurückgeschnellt, nur die kleinste rückgängige Bewegung macht, sogleich wieder in lang dauernde Berührung gerathen. Auf diese Weise, sowie auch durch die Trägheit des Eisenstücks *Z* kommt auf eine lang anhaltende Schliessung eine plötzliche und kurze Oeffnung und eine ebenso plötzliche Schliessung der Kette zu Stande, welches Spiel für die grösstmöglichste Wirkung an den Polen der Inductionsrolle unter übrigens gleichen Umständen am günstigsten zu sein scheint.

4. Der Condensator. Ueber die eigenthümliche Wirkungsweise dieses Instrumentes giebt es verschiedentliche, mehr oder weniger abweichende Ansichten. So viel steht wohl fest, dass derselbe nicht so, wie der gewöhnliche Condensator wirkt, weshalb ihn auch Sinsteden anders, und zwar nach seiner davon gewonnenen Ansicht Conservator genannt wissen will. Seine bisherigen Namen hat das Instrument von der dem gewöhnlichen Condensator ähnlichen Einrichtung erhalten. Derselbe besteht meist aus einem langen, auf beiden Seiten mit Stanniol belegten Stücke Wachstafft, gefaltet zu hin- und hergehenden Lagen, damit er weniger Raum einnehme und zugleich nur die Theile einer und derselben Belegung mit einander in Berührung kommen lasse. Die Drähte, welche denselben mit der Leitung des primären Stromes verbinden, werden dies- und jenseits der Unterbrechungsstelle am Neef'schen Hammer angelegt und zwar in möglichst geringer Entfernung von derselben, wenn man nicht die Wirkung etwas abschwächen will. Einer der von Poggendorff construirten Condensatoren hält in seinen Zinnflächen 8 par. Fuss Länge und 11 par. Zoll Breite, ein anderer bei derselben Breite nur 23 par. Zoll Länge, wobei aber die zusammengefalteten Lagen durch dazwischen geschobene Pappstreifen getrennt sind, damit die Belege sich nicht rückseits selber berühren.

Diese grösseren in der Regel den Ruhmkorff'schen Inductionsapparaten beigegebenen Condensatoren sind vom Mechanikus Halske durch viel kleinere vertreten und theilweise auch ersetzt worden. Die letzteren bestehen nur aus einem beiderseitig belegten Glimmerblatt von nicht mehr als Octavformat Grösse. Für diese relative Ueberlegenheit des Glimmer-Condensators findet Poggendorff darin den Grund, dass die condensirenden Flächen auf der Rückseite ganz frei die Luft berühren und zugleich einander näher stehen, als auf der grossen Taffetwand, die nicht allein etwas dicker ist, als das angewandte Glimmerblatt, sondern auch durch Krümmungen und Falten ein enges Anschliessen der Stanniolblätter verhindert. Als Ersatzmittel für Glimmer, welcher nicht überall in Tafeln von der erforderlichen Grösse zu haben ist, schlägt Poggendorff Postpapier, auf

beiden Seiten mit Schellack oder Bernsteinlack bestrichen, oder dünnes Wachspapier ebenfalls mit Lackfirniss überzogen, vor. Nach Versuchen mit solchen Papiercondensatoren von 54 und von 30 par. Quadratzoll Fläche fand er dieselben eben so wirksam, wie die grossen von Wachstaffet, was die Schlagweite der Inductionsfunken betrifft. Doch darin waren die grossen den kleinen überlegen, dass sie massigere, compaktere Funken hervorriefen, und dass mit ihnen die Funken auch schneller auf einander folgten, wenn der Abstand der Pole der Grenze sich näherte, bei welcher die Funken einzeln erschienen oder überhaupt noch zum Vorschein kamen. Ausserdem scheinen aber die Wirkungen der grossen Condensatoren mehr hervorzutreten, wenn der inducirende Strom intensiver wird, ganz besonders aber, wenn der Extrastrom auf irgend eine Weise verstärkt wird. Die kleinen Condensatoren sind nur vortheilhaft, wenn der Extrastrom relativ schwach ist, also bei einem kurzen und dicken Drahte, welchen der Hauptstrom zu durchlaufen hat. Wendet man dagegen einen langen und dünnen Draht in der Hauptrolle an, so nimmt unter übrigens gleichen Umständen die Wirkung der kleinen Condensatoren um so mehr ab, je kleiner sie sind. Hiervon kann man sich nach Poggendorff überzeugen, wenn man an der Hauptrolle, welche einen Doppeldraht hat, die Enden einmal so verbindet, dass der Strom einen Draht von doppeltem Querschnitt und einfacher Länge, sodann dass er einen Draht von einfachem Querschnitt und doppelter Länge durchläuft. In letzterem Falle erhält der galvanische Strom eine relativ geringere der Extrastrom eine relativ grössere Stärke und dabei versagen die kleinen Condensatoren fast ganz ihre Wirkung. Endlich hängt die Wirkung der Condensatoren auch von der Beschaffenheit der Inductionsrolle ab. Enthält diese einen kürzeren und dickeren Draht, so sind auch die kleinen Condensatoren ziemlich wirkungslos, während die grossen eine, wie es scheint, nach Verhältniss ihrer Grösse zunehmende Wirkung äussern. Je kräftiger mithin die galvanische Batterie, je leitender und länger die Bahn ihres Stromes, je dicker und massiger der Inductionsdraht ist, je intensiver der Extrastrom also wird, desto grösser muss der Condensator sein, wenn eine energische Funkenentwickelung zwischen den Polen des Apparats hervorkommen soll.

Die Gesammtwirkung des Condensators scheint hauptsächlich darin zu bestehen, dass er bei Unterbrechung des Stromes die vielen Theilentladungen verhindert, indem er die nach der Unterbrechungsstelle sich hindrängenden oder daselbst angehäuften Elektricitäten auf seine beiden Belegungen ableitet und so bei der doch immer noch allmälig stattfindenden Trennung der Leitung durch den Unterbrecher sämmtliche Theilentladungen zu einer einzigen vereinigt. Da diese Theilentladungen, welche ohne Condensator stattfinden, hauptsächlich durch den Extrastrom, sowie auch durch das magnetisirte Eisendrahtbündel, welches überhaupt vielerlei Complicationen herbeiführt, hervorgerufen werden, so ist damit auch die Abhängigkeit erklärlich, in welcher die verschiedenen Wirkungen eines grossen oder kleinen Condensators von der Beschaffenheit und relativen Stärke des Haupt- und Extra-Stroms stehen.

Poggendorff ist der Ansicht, dass Durchbohrungen des Condensators, welche durchschlagende Funken hervorbringen, denselben nicht wesentlich unwirksamer machen. Sinsteden hält dagegen Durchbohrungen für viel bedenklicher, wenigstens bei einem Apparate von so beträchtlicher Stärke, wie der seinige. Er ist daher auch darauf bedacht gewesen, dem

Condensator eine dauerhaftere Einrichtung zu geben und hat zu dem Ende dünnes Tafelglas anstatt des Wachstaffet angewendet. Acht dünne Glastafeln, 18 Zoll lang und 10 Zoll breit, bis auf einen Zoll am Rande mit Stanniol belegt, sind in einem flachen Holzkasten über einander geschichtet, der inwendig mit ⅛ Zoll auseinander stehenden Nuthen versehen ist, in denen die Glastafeln eine sichere Lage haben. An einer Längsseite sind die beiden Ecken der Glastafeln abgeschnitten und hier ein dünner Kupferdraht mit Siegellack auf dem freien Glasrande festgelackt und mittels leichtflüssigen Metalls an das Stanniolblatt festgelöthet. So treten an je einem Ende der Längsseite des Kastens 8 Kupferdrähte hervor, die zusammen und an eine am Kasten wohl isolirt befestigte Klemmschraube gelöthet sind. Die sich gegenüber liegenden Stanniolflächen zweier Tafeln sind immer mit ein und derselben Klemmschraube verbunden, so dass wenn die eine Klemmschraube mit der Zunge, die andere mit der Platinspitze des Stromunterbrechers verbunden ist, jenen gegen einander überliegenden Stanniolflächen gleichnamige Elektricität zugeführt wird. Von solchergestalt eingerichteten Condensatoren hat Sinsteden zwei, jeden mit 20 □Fuss Stanniolbelegung, angewendet und dabei gefunden, dass immer zwei zugleich benutzt eine grössere Wirkung gaben, als einer allein; ein Beweis, dass die Grösse der belegten Glasfläche mit den angegebenen Dimensionen noch nicht überschritten war.

Die Wirkungen des in solcher Weise von Sinsteden hergerichteten Inductionsapparates sind seinen Versicherungen zufolge allerdings sehr bedeutend. Der Apparat, dessen wesentliche von ihm hinzugefügte Zuthaten die Fortsetzung und Erweiterung des Inductionsdrahtes in eine grössere aufgewickelte Stanniolfläche, die Verwendung zweier Eisendrahtbündel und die Anlegung eines Stahlmagneten an die Pole derselben, die eigenthümliche Einrichtung des Stromunterbrechers sowie des Condensators sind, giebt mit zwei Zinkkohlenelementen ohne Thonbecher, nur mit verdünnter Schwefelsäure, der etwas saurés chromsaures Kali zugesetzt worden ist, geladen 9 paris. Linien lange, einzelne breite Inductionsfunken; bei 7 Linien Abstand der Pole fährt ein ununterbrochener dichter Feuerstrahl anhaltend über, und sind zwei Leidner Flaschen, jede von 1½ □Fuss innerer Belegung, in einer unten näher angegebenen Weise mit in den Stromkreis eingeschaltet, so schlagen bei 6 Linien Abstand der Pole rasch hinter einander einzelne breite, lautknallende Funken über, die bei 5 Linien Abstand continuirlich werden, und ein betäubendes, dicht an einander gereihtes Knallen verursachen. Eine ½ Fuss lange Blitztafel mit 25 Unterbrechungsstellen zeigt ein schönes Funkenspiel. Die Fünkchen der vielen Unterbrechungsstellen sind ungemein klein gegen den Funken einer einzigen Unterbrechungsstelle. — Wird ein Hühnerei zwischen die Polspitzen gelegt, so erglüht das Ei, so lange der Strom hindurchgeht, in einem so intensiven Lichte, dass es selbst bei Tage gut zu sehen ist. Zerschlägt man das Ei, so findet man da, wo der negative Poldraht angelegen hat, dicke Klumpen hartgeronnenen Eiweisses. — Fahren die Funken über ein zwischen die Pole gebrachtes Stückchen Kreide hin, so färben sie sich schön roth, ohne dass die Kreide leuchtend wird; Zucker wird durch und durch schneeweiss leuchtend. — Geht der Strom zwischen zwei Stahl- oder Platinspitzen über, so bildet sich in der Mitte zwischen ihnen, wo die beiderseitigen Feuerstrahlen sich begegnen, unter heftigem Sausen eine röthliche Flammenscheibe, an der sich Spiritus, Baumwolle, ein Schwefelholz, Schiesspulver, Papier, ein Talg-

oder Wachslicht etc. anzünden lässt. — Werden die Polspitzen soweit genähert, bis sie sich beinahe berühren, so umhüllt sich die negative von der positiven her mit violettem Lichte und erglüht. Ein Platindraht von 0,75mm Durchmesser glüht auf eine Strecke von 3 bis 4mm noch sehr lebhaft. Sowie die Drähte sich wirklich berühren, hört das Glühen sofort auf (s. u.). Werden statt der dickeren Drähte dünnere von $^1/_{10}$ — $^1/_8$ par. Linie Durchmesser genommen, so schmilzt der negative Poldraht am Ende in ein Kügelchen zusammen (1mm Durchmesser), das endlich so gross wird, dass der Strom es nicht mehr im Fluss erhalten kann; dann leuchtet es aber wie eine strahlige Sonne stundenlang fort. Wird ein Glasfaden an die glühende Platinkugel gehalten, so wird sie, sobald das schmelzende Glas sie überzogen hat, sogleich dunkel und die ihr gegenüber stehende positive Drahtspitze, die bis dahin bei allen bisherigen Versuchen dunkel geblieben war, fängt an zu glühen. — Werden die Pole von Bunsen'scher Kohle gebildet, so entsteht ein brillantes Kohlenlicht, welches leichter zu unterhalten ist, da es bei sehr verändertem Abstande der Kohlen nicht erlischt. Stehen die Kohlenspitzen etwa $1^1/_2$ Linie auseinander, so zeigt sich zwischen ihnen wieder die röthliche, heftig sausende Flamme. Legt man in derselben einen Eisen- oder Platindraht fest gegen die negative Kohle und schiebt die Drahtspitze gegen die positive Kohle hin, ohne diese aber zu berühren, so schmilzt die Drahtspitze in eine Kugel zusammen, die durch Nachschieben der Drahtspitze sich ziemlich vergrössert. Platinkügelchen von $^5/_4$ und Eisenkügelchen von 2mm lassen sich leicht darstellen. Das Platin sprüht dabei Funken, wie Stahl, nur in geringerem Maasse. — So ist nach diesen Ergebnissen zu erwarten, dass der Apparat auf dem eingeschlagenen Wege noch ganz bedeutend verstärkt werden kann, so dass er einer dereinstigen praktischen Verwendbarkeit fähig zu sein scheint, z. B. zur Darstellung des Kohlenspitzenlichts, ohne dazu mehr als 2 oder 4 galvanische Elemente zu bedürfen.

Poggendorff fand bei den Dimensionen seiner Inductionsapparate und bei den Zwecken, zu welchen er seine Versuche anstellte, fast niemals nöthig, mehr als zwei Grove'sche Elemente anzuwenden.

Die eingangs erwähnten, von Poggendorff als Hülfsapparate bezeichneten Vorrichtungen sind erstens eine Art allgemeiner Auslader, welcher im Ganzen die Einrichtung eines Funken-Mikrometers erhalten hat. Die von Glasstäben getragenen und durch Drähte mit den Polen der Inductionsrolle zu verbindenden Platinstifte desselben verstatten sowohl in horizontaler Lage eine horizontale, vertikale und drehende Bewegung, als auch in vertikaler Lage eine Stellung neben- oder übereinander. Dieselben Stifte, an deren Spitzen sich dünnere Drähte, Kugeln oder Platten ansetzen lassen, dienen auch als Elektroden bei den chemischen Zersetzungen durch den Inductionsstrom. — Der zweite Hülfsapparat, das elektrische Ei, ist bekannt. — Der schon erwähnte Extrateller zur Luftpumpe dient zur Anstellung elektrischer Versuche im Vacuum, z. B. zur Untersuchung des Verhaltens und Einflusses des Stromunterbrechers, wenn derselbe im partiellen Vacuum arbeitet, u. a. m. Auf die Messingscheibe des Tellers ist eine Glasscheibe gekittet und beide haben zwei diametrale Löcher, in welchen zwei dicke Kupferstifte luftdicht eingelassen sind, so dass sie das Messing nicht berühren und unterhalb und oberhalb hervorragen, um in mit Klemmschrauben verbundenen Löchern die nöthigen Verbindungsdrähte aufzunehmen.

Die Erscheinungen, welche der Inductionsapparat im Allgemeinen darbietet, sind ihrer Natur nach wesentlich verschieden, je nachdem die Pole des Inductionsdrahtes entweder 1. verbunden sind durch einen guten Leiter, oder 2. getrennt durch Luft oder Gase, oder 3. getrennt durch einen flüssigen oder starren Isolator. Die Eigenthümlichkeiten der Inductionserscheinungen in den 3 bezeichneten Fällen sind zuerst von Poggendorff erfasst und gehörig classificirt worden.

1. Sind die Pole des Inductionsdrahtes durch einen Metalldraht oder eine gut leitende Flüssigkeit verbunden, so besteht der Inductionsstrom aus zwei abwechselnd hin- und herlaufenden Theilen, welche der Schliessung und Oeffnung des inducirenden galvanischen Stroms, in entgegengesetzter und gleicher Richtung mit diesem entsprechen. Wird nämlich ein Galvanometer eingeschaltet, so zeigt dasselbe, wenn der Inductionsdraht sehr dünn und lang ist, keine Ablenkung, oder wenn er dicker und kürzer und der inducirende Strom stärker ist, die Erscheinung der doppelsinnigen Ablenkung (Pogg. Annal. Bd. 45, S. 353), welche auf schnell in entgegengesetzten Richtungen einander folgenden Magnetisirungen der Nadel beruht. — Wird Wasser oder verdünnte Schwefelsäure zwischen die in Platinplatten endigenden Pole gebracht, so entwickelt sich an jeder Platte Sauerstoff und Wasserstoff, und die Platten zeigen nach Aufhebung des Stromes keine Polarisation. — Feuchtes Jodkaliumpapier, mit den Polen in Verbindung gebracht, giebt an jedem Pole eine Ausscheidung von Jod in gleicher Stärke zu erkennen. — Ein Elektro-Thermometer wird zum Steigen gebracht, da für dasselbe die Richtung des Stromes gleichgültig ist, aber eine thermo-elektrische Kette nimmt keine Ladung an. Auf alle diese Erscheinungen ist der Condensator ohne Einfluss.

2. Sind die Pole durch eine, wenn auch noch so kurze Luft- oder Gasstrecke unterbrochen, so äussert sich nur der durch das Oeffnen des galvanischen Stroms entstandene Inductionsstrom; der andere, beim Schliessen hervorgerufene, bleibt wirkungslos nach Aussen in der Rolle zurück. Die Inductionsrolle hat auf diese Weise feste Pole bekommen. Sind nämlich die Pole durch eine grosse Luftstrecke, so dass keine Funken überspringen, von einander getrennt, und wird mit einem der Pole ein Elektrometer in Berührung gebracht, so hängt es ganz vom Zufalle ab, ob dasselbe positiv oder negativ geladen wird, da beide Elektricitäten abwechselnd nach den Polen hinströmen. Wird aber das Elektrometer nur soweit genähert, dass Funken überspringen, so erhält es aus jedem Pol eine bestimmte der Richtung des Oeffnungsstroms entsprechende Elektricität. Wird dabei der eine Pol mit der Feder in leitende Verbindung gebracht, so ladet sich das Elektrometer schon aus einiger Entfernung vom andern Pol, ohne dass ein Funken überspringt, durch blose Ausstrahlung mit derjenigen Elektricität, welche diesem Pole entspricht. Damit stimmt überein, dass, wenn man einem der Pole einen mit dem Erdboden verbundenen Draht bis zur Schlagweite nähert und eine Zeit lang Funken auf ihn überspringen lässt, alsdann die ganze Inductionsrolle nach Erlöschen des Stroms mit der dem andern Pol zugehörigen Elektricität geladen ist. Poggendorff erkennt darin ein Mittel, die Inductionsrolle auf die Güte ihrer äussern Isolation zu prüfen.

Die Funken, welche man im ungeschlossenen Zustande der Inductionsrolle aus einem ihrer Pole zieht, sind stärker, wenn der andere Pol zur Erde abgeleitet ist und wie es scheint, auch kräftiger am negativen Pole, als am positiven.

Werden die Pole der Inductionsrolle soweit einander genähert, dass Funken zwischen ihnen überschlagen, so kann man die Kette als geschlossen betrachten, mit dem Unterschiede jedoch von der durch einen guten Leiter vermittelten Schliessung, dass dabei nur der Oeffnungsstrom circulirt. Man erhält somit einen Strom von constanter Richtung, der mit Ausnahme der Discontinuität alle Eigenschaften eines galvanischen Stromes von hoher Intensität, ähnlich dem durch eine grosse Anzahl kleiner Plattenpaare erregten, besitzt; die Unterbrechung kann hierbei so klein wie nur immer sein. Ein Stück trocknes Fliesspapier zwischen Platten, in welche die Pole auslaufen, gebracht, bewirkt die beabsichtigte Unterbrechung ganz vollkommen und lässt nur den Oeffnungsstrom circuliren. Man bekommt durch diesen Strom eine Ablenkung der Magnetnadel in einem bestimmten Sinne, die Ladung einer Thermokette ganz in der Weise wie von einem galvanischen Strome, entgegengesetzt der Richtung desselben; auch eine thermische Wirkung im Drahte ist den Beobachtungen von Riess zufolge vorhanden, nur eine äusserst schwache. Dagegen üben die Funken an der Unterbrechungsstelle, wie schon oben bemerkt (vergl. auch Annal. Bd. 94, S. 632), eine viel stärkere thermische Wirkung aus. Die chemischen Zersetzungen des Wassers, Jodkaliums u. s. w. erfolgen ganz wie bei einem gewöhnlichen galvanischen Strom, indem an jedem Pole nur einer der Elektrolyte ausgeschieden wird. — Besonders bemerkenswerthe Lichterscheinungen entstehen, wenn die Unterbrechung des Stromes an der Flüssigkeit selbst geschieht, indem die Poldrähte entweder beide in vertikaler Richtung, in angemessener Entfernung über die Oberfläche der Flüssigkeit gestellt werden, wobei die Funken aus beiden auf die Flüssigkeit schlagen, oder indem nur einer derselben in die Flüssigkeit eingetaucht wird, während der andere über derselben steht, aus welchem die Funken in die Flüssigkeit überschlagen. Der Funkenstrom des positiven Pols erhält oben an der Spitze des Drahts eine gelbe oder rothgelbe Farbe und bildet unten auf der Flüssigkeit eine blaue Scheibe, umgekehrt ist der Funkenstrom am negativen Pol blau, während auf der Flüssigkeit ein gelber Schein liegt. Bei grösserer Nähe der Flüssigkeit an den Drähten reducirt sich das Phänomen auf einen blauen Funken am negativen Pol und einen gelben am positiven. Verschiedene Flüssigkeiten zeigen es übrigens verschieden; nicht leitende, wie Terpenthinöl lassen es gar nicht erscheinen, destillirtes Wasser nur unbedeutend, besser mit Schwefelsäure, Salzsäure, Salpetersäure angesäuertes, am besten die concentrirte Schwefelsäure. Diese Erscheinungen werden in einer mässig (bis etwa auf 8 Zoll Quecksilberdruck) verdünnten Luft noch schöner entwickelt. Von einer chemischen Zersetzung ist dabei, wenn die beiden Pole Funken auf die Flüssigkeit senden, nichts zu sehen; ist aber einer der Poldrähte, gleichgültig welcher, in die Flüssigkeit eingetaucht, so erfolgt an diesem eine Gasentwickelung.

Bei dem durch Luft oder Gas unterbrochenen Inductionsstrom spielt nun der Condensator eine sehr eingreifende Rolle. Bemerkenswerth sind dabei auch die Unterbrechungsfunken am Neef'schen Hammer, auf dessen Spiel sowohl der Condensator als auch der Inductionsstrom wirksam ist. Poggendorff hat zum Theil auch zu dem Zwecke den Einfluss des Condensators und des Extrastromes mehr festzustellen, die Unterbrechungen am Hammer innerhalb verschiedener Flüssigkeiten, später auch im luftverdünnten Raume (Annal. Bd. 95, S. 156, Monatsber. der Berliner Akad. 1855, S. 208) vor sich gehen lassen und dabei gefunden, dass namentlich die

Funkenwirkung der Inductionsrolle bei Anwendung des Hammers **im Vacuum ohne Condensator** eben so stark, wo nicht noch stärker ist, als die, welche man durch den Hammer **in freier Luft mit dem Condensator** erhält. Doch wird der Hammer beim Vibriren im Vacuum, wenn die gegeneinander schlagenden Theile von Platin sind, heftig angegriffen; weniger dagegen, wenn der Platinstift durch einen Silberstift ersetzt ist. Für die Praxis ist somit diese Anordnung nicht eben vortheilhaft, desto interessanter in theoretischer Hinsicht. Werden zwischen die gegeneinander schlagenden Theile des Hammers, an welchem der Condensator nicht angelegt ist, Flüssigkeiten von weder zu grosser noch zu geringer Leitungsfähigkeit, wie Weingeist, Brunnen- oder destillirtes Wasser gebracht, so wird die Wirkung an den Polen des Inductionsdrahtes bedeutend erhöht, obgleich der grosse Condensator noch einflussreicher bleibt. Ein Tropfen destillirten Wassers zwischen die vibrirenden Theile des Unterbrechers gebracht, ruft sogleich einen lebhaften Funkenstrom zwischen den Spitzen des Ausladers hervor.

3. Wird in den Funkenstrom, der zwischen den Polen des Apparates übergeht, eine Glasplatte eingeschoben, so wird derselbe im Ganzen so gut, wie vollständig unterbrochen, **wenn die Pole aus mehr oder weniger zugespitzten Drähten bestehen.** Laufen dagegen die Pole in Platten aus, legt man z. B. eine quadratische Kupferplatte, die mit dem einen Pol in Verbindung steht auf den Tisch, bedeckt sie mit einer Glasplatte und legt darauf wieder eine zweite, kleinere, runde Kupferplatte, die mit dem andern Pol in Verbindung steht, so hört man, wenn der Apparat in Gang gesetzt ist, ein fortwährendes Knistern und im Dunkeln sieht man die kleine, runde Scheibe von einer Aureole elektrischen Lichts umgeben, die aus einer Menge kleiner, in fortwährender Bewegung befindlicher Funken besteht. Je kleiner dabei die runde Platte ist, desto breiter die Aureole. An der unteren, grösseren Platte ist keine Lichtentwickelung wahrzunehmen; immer ist es die kleinere Platte, an welcher die Aureole entsteht, gleichgültig mit welchem Pole sie verbunden ist. — Wird die kleine Scheibe auf der Glasplatte so weit verschoben, dass sie nur mit einem Theile über der untern Platte bleibt, so ist auch nur dieser mit der Aureole umgeben. Sind beide Platten von gleicher Grösse, so kommt keine Aureole zum Vorschein. Sieht man aber von der Seite her, so bemerkt man an den Stellen, wo beide Platten nicht genau an das Glas sich anlegen, von beiden Platten unzählige Fünkchen zum Glase überspringen. Statt einer Glasplatte können deren auch mehrere genommen werden, sogar so viel, dass die Dicke aller Platten grösser ist als die gewöhnliche Schlagweite der Funken in der Luft; nur bleibt bei Vermehrung der Platten die Aureole nicht mehr so intensiv. Wird die obere Kupferplatte von einem isolirenden Träger in einem entsprechenden (7mm) Abstande von der untern Platte gehalten, so springen wie gewöhnlich die Funken zwischen beiden über. Wird aber nun auf die untere eine Glasscheibe (4mm Dicke) gelegt, so schiesst ein förmlicher Regen von kleinen Funken von der obern Platte auf das Glas herab.

Der Einfluss des Glases in der Fortpflanzung der Wirkung der Inductionselektricität ist sonach nicht mehr zweifelhaft.

Werden zwei auf der einen Seite mit Stanniol belegte Glastafeln (von etwa Quadratfuss Grösse) mit den unbelegten Seiten an einander gestellt und die Belege hierauf mit den Polen in Verbindung gesetzt, so sieht man im Dunklen den ganzen Zwischenraum der Tafeln, soweit er den Belegen

nach jetziger Bezeichnungsweise, dass $\int_0^b yx\,dx = \frac{b^2c}{2} - \int_0^c \frac{x^2}{2} dy$ sei. Der Beweis nach ihm ist folgender: Man suche das Moment der Fläche *AECBA* in Bezug auf die Librationsachse *AD*. Hierzu dient die Momentvergleichung: Moment der Fläche *AECBA* = Moment der ganzen Fläche *ADCBA* — Moment der Fläche *AECDA*. Nun ist aber ein Element der Fläche *AECBA* = $y\,dx$, der Abstand seines in der Mitte liegenden Schwerpunkts von der Achse $AD = x$, folglich ist das Moment der Fläche $AECBA = \int_0^b yx\,dx$. Das Moment der Fläche *ADCBA* ist offenbar $= \frac{b^2c}{2}$; das Moment der Ergänzungsfläche *AECDA*, deren Element $= x\,dy$ ist, und dessen in seiner Mitte gelegener Schwerpunkt von *AD* um $\frac{x}{2}$ entfernt ist, ist $= \int_0^c \frac{x^2}{2} . dy$. Wir haben also in der That die Gleichung: $\int_0^b yx\,dx = \frac{b^2c}{2} - \int_0^c \frac{x^2}{2} . dy$. Es ergiebt sich aus dieser Ableitung, dass der Satz eine geometrische Bedeutung hat; man kann ihn aber auch rein analytisch betrachten, denn er enthält nichts weiter als die Regel der partiellen Integration $\int yx\,dx = y \int x\,dx - \int dy \int x\,dx = \frac{yx^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} dy$ angewandt auf ein bestimmtes Integral. Dieselbe Regel wiederholt Leibniz im Mscr. vom 26. October 1675 (in III.) unter der Form: *omn.* $\overline{xw}$ ⊓ *ult.* x *omn.* w — *omn.* $\overline{\textit{omn. } w}$, d. h. $\int_0^{\textit{ultim. } w} xw\,dw = \textit{ult. } x . \int_0^{\textit{ultim. } w} w\,dw - \int_0^{\textit{ultim. } x} dx \int w\,dw$ oder $\int_0^{\textit{ultim. } w} xw\,dw = \frac{(\textit{ult. } w)^2 . \textit{ult. } x}{2} - \int_0^{\textit{ult. } x} \frac{w^2}{2} dx$, und drückt sie in Worten aus. Es ist jedoch zu bemerken, dass der in Rede stehende Satz in der letzten Form: *omn.* $\overline{xw}$ ⊓ *ult.x. omn.w* — *omn.* $\overline{\textit{omn. } w}$ bei weitem ungenauer ausgedrückt ist, als in der am vorigen Tage angewendeten Form *omn.* $\overline{yx\,ad\,x}$ ⊓ $\frac{b^2c}{2}$ — *omn.* $\overline{\frac{x^2}{2}\,ad\,y}$, denn in dieser Form ist der jedesmalige Integrationsbuchstabe hinzugefügt, in der andern fehlt derselbe, und dieser offenbare Mangel geht durch alle folgenden Mscr. der früheren Zeit hindurch und verursacht grossentheils die in denselben sich findenden Unrichtigkeiten. Es möchte überhaupt von Bedeutung sein zu erfahren, ob sich nicht etwa unter Leibnizens Papieren eins findet, in welchem er sich über das Hinzufügen des Differenzials der willkürlichen Variabelen unter dem Integralzeichen, auch wenn das Integral nicht als Formel für eine Fläche (wo sich diese Hinzufügung

von selbst versteht), sondern rein analytisch im Gegensatze zum Differenzial aufzufassen ist, ausspricht. Es wäre jedenfalls interessant zu wissen, ob Leibniz dasselbe nur aus formellen Gründen, um sich stets zu erinnern, nach welcher Veränderlichen integrirt werden soll, angewendet, oder sich hierüber auf eine Weise erklärt habe, die Aufschlüsse über seine Auffassung des Differenzials und Integrals liefert. Denn der Algorithmus war, so lange nicht die Nothwendigkeit, dass das Differenzial der willkürlichen Variabelen unter dem Integralzeichen gesetzt werden müsse und nicht blos könne, dargelegt war, immer noch unvollkommen.

Es ist ferner offenbar in dem Ms. vom 29. October 1675 (Beilage II. zu III.), pag. 124*), wo Leibniz die Gleichung aufstellt: $\frac{omn.\,l.\,[2]}{2} \sqcap omn.\,\overline{omn.\,l.\,\frac{l}{a}}$ oder $\frac{(omn.\,l)^2}{2} = omn.\,\overline{omn.\,l.\,\frac{l}{a}}$, l das Differenzial der Ordinate y, also $l = dy$; dies sagt Leibnitz selbst, indem er (III. pag. 123) $y \sqcap omn.\,l$ und (III. pag. 124) $\frac{y^2}{2} \sqcap \frac{omn.\,l.\,[2]}{2}$ setzt. Der Sinn des Satzes $\frac{omn.\,l.\,[2]}{2} \sqcap omn.\,\overline{omn.\,l.\,\frac{l}{a}}$ ist also kein anderer, als $\frac{y^2}{2} = \int dy \int dy$. Ich kann daher nicht beistimmen, wenn Herr Dr. Gerhardt (III. pag. 58 u. 59) sagt: „Er (Leibniz) macht die Annahme — und dies ist, wie es scheint, der Angelpunkt der Entdeckung — einen solchen Ausdruck, wie *omn. y* als eine unendlich kleine Linie aufzufassen," und (ebendaselbst pag. 59): „So gewinnt Leibniz den Satz: $\frac{omn.\,l.\,[2]}{2} \sqcap \overline{omn.\,l.\,\frac{l}{a}}$, wo l die Ordinate der Curve bezeichnet." Denn in diesen Gleichungen bedeutet, wie erwähnt, l das Differenzial der Ordinate. Nur in der letzten Zeile (III. pag. 124), wo Leibniz mit dem soeben gefundenen Satze $\frac{omn.\,l.\,[2]}{2} \sqcap omn.\,\overline{omn.\,l.\,\frac{l}{a}}$ den früheren $omn.\,xw \sqcap ult.\,x\;omn.\,w - omn.\,\overline{omn.\,w}$ zusammenstellt, setzt er in dieser letzten Formel, die er hier für ein unbestimmtes Integral anwendet, und also blos x an die Stelle von $ult.\,x$ schreibt, der Uebereinstimmung mit dem Vorigen wegen, l an die Stelle von w und schreibt also den früheren

*) Auf derselben Seite befindet sich die Stelle, die ich pag. 73 meiner Schrift: „Die Principien der höhern Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange" als einen Beweis meiner Ansicht, dass die Methode des Gregorius a Scto Vincentio nicht, wie Herr Dr. Gerhardt (III. pag. 38) sich ausspricht, auf Bewegung gegründet sei. Wahrscheinlich ist die Meinung des Letzteren daher entstanden: *ducere a in* (oder auch *sub*) *b* heisst nach dem Sprachgebrauche der damaligen Mathematiker, das Product aus *a* und *b* bilden, oder in geometrischem Sinne, das Rechteck aus zwei Linien von der Länge *a* und *b* construiren. Gregorius nannte also seine Methode (M. s. meine Schrift §. 5.) mit Recht: *„ductus plani in planum,"* d. h. Construction aller Rechtecke aus den Ordinaten der einen und der zugehörigen Ordinaten der andern ebenen Curve. Da aber *ducere* auch „führen" bedeutet, so mag die von Herrn Dr. Gerhardt aufgestellte Vorstellung entstanden sein, als habe sich Gregorius die Körper durch Fortführen oder Fortbewegen einer Ebene an einer andern entstehend gedacht. Aus Leibnizens Worten auf dieser Seite (III. pag. 124) geht jedoch hervor, dass auch er die Methode des Gregorius nicht als auf Bewegung beruhend ansicht. Denn er unterscheidet genau „*ducere*" im Sinne des Gregorius und „*ferre*" im Sinne von bewegen.

Satz: $omn.\, xl \sqcap x.\, omn.\, l - omn.\, \overline{omn.\, l}$. Nur in dieser Formel also bedeutet l die Ordinate. — In demselben Ms. (III. pag. 125) stellt Leibniz die Gleichung auf: $\frac{\int l^2}{2} \sqcap \int \overline{\int l.\, \frac{l}{a}}$, welche auch Herr Dr. Gerhardt (III. p. 59) erwähnt. Dieselbe ist offenbar nicht richtig. Denn sie ist dem Zusammenhange nach nichts Anderes, als die pag. 124 von Leibniz unter der Form $\frac{\overline{omn.\, l.}\,[2]}{2} \sqcap omn.\, \overline{omn.\, l.}\, \frac{l}{a}$ ausgesprochne Regel, indem er nur das neu erfundene Integralzeichen an die Stelle des frühern „*omn.*" setzt. Wenn er nun also hier $\frac{\int l^2}{2}$ für $\frac{\overline{omn.\, l.}\,[2]}{2}$ schreibt, so ist der Grund dieses Irrthums entweder ein Versehen, oder Leibniz war damals noch der Meinung, dass wirklich das Quadrat eines Integrals identisch mit dem Quadrate des Integrals, dass also $\left(\int l\right)^2$ gleich $\int \overline{l^2}$ oder $\left(\int dy\right)^2$ gleich $\int \overline{dy^2}$ sei. Letzteres dürfte der wahrscheinlichere Grund sein, denn derselbe Fehler findet sich auf derselben Seite (125) noch einmal, indem Leibniz, nachdem er $\int l = x$ gesetzt hat, den Satz aufstellt: „$\int \frac{\overline{l^2}}{2} \sqcap \int \overline{\int l.\, l}$, *id est* $\frac{x^2}{2} \sqcap \int x$." — Andere Eigenthümlichkeiten der Leibnizischen Manuscripte habe ich a. a. O. erwähnt. Dr. H. Weissenborn.

XXXII. Ueber den Werth von 0^0. Im 2. Hefte des 26. Theiles des Archivs der Mathematik und Physik befindet sich ein kleiner Aufsatz „Ueber die Werthbestimmung von Functionen in unbestimmter Form von Herrn Franz Unferdinger," in welchem die Lehrsätze aufgestellt sind:

„Erscheint die Function u^v für einen bestimmten Werth a der Variabeln x unter der Form 0^0 oder unter der Form ∞^0, so ist ihr Zahlwerth stets gleich 1."

Es handelt sich bei diesen Sätzen um einen sehr wesentlichen Punkt des mathematischen Unterrichtes, dessen Verbesserung ja eine der Hauptaufgaben des Archives ist (wie Herr Professor Grunert in demselben Hefte zu erinnern für nöthig findet) und so hätten wir die neue Entdeckung gern mit freudiger Ueberraschung begrüsst; wenn sie neu und richtig wäre. Beides ist indessen bekanntlich nicht der Fall. Schon vor einigen zwanzig Jahren hat Libri (Crelle's Journal Bd. X. S. 305) nach Mascheroni die Behauptung zu begründen gesucht, dass immer $0^0 = 1$. Diese Behauptung wurde von einem Ungenannten (der sich *S.* unterschrieb) in demselben Journale (Bd. XI. S. 272) angegriffen, und von Moebius (Crelle Bd. XII, S. 134) vertheidigt; worauf endlich (Bd. XII, S. 292) noch zwei anonyme Widerlegungen folgten, mit denen der Streit beendet war. In der That ist auch der Irrthum des seinsollenden Beweises des Herrn U. sehr augenfällig, und es wundert uns nur, dass der gelehrte Herr Herausgeber, dessen Gewissenhaftigkeit und reine Wahrheitsliebe ihn die Prüfung der Arbeiten Anderer so genau ausführen lässt, entweder die Abhandlung des Herrn Unferdinger gar nicht gelesen, oder doch mit sehr wenig Aufmerksamkeit *gelesen hat. In* jenem Beweise wird nämlich gesagt u^v, welches die Ge-

stalt von 0^0 annimmt, habe den Zahlenwerth $X = e^w$ wenn $w = -\frac{u' \cdot v^2}{u \cdot v'}$, wo u', v' die Differentialquotienten bedeuten, und soweit ist kein Zweifel über die Richtigkeit. Falsch aber ist es, wenn dann $\frac{u'}{v'}$ gegen $\frac{v}{u}$ gestrichen wird, da der weitere Factor v erst noch berücksichtigt werden müsste. Mit anderen Worten: es darf nicht früher $x = a$ eingesetzt werden, als bis der Ausdruck auf seine reducirteste Form gebracht ist. Dann aber ist nicht immer $0^0 = 1$, wie in den angeführten Widerlegungen gezeigt wird; z. B. für $u = x$, $v = \frac{b+x}{\log x}$ wird $u^v = 0^0$ bei $x = 0$ und

$$w = -\frac{\left(\frac{b+x}{\log x}\right)^2}{x\left\{\frac{\log x - \frac{b+x}{x}}{(\log x)^2}\right\}} = \frac{(b+x)^2}{b+x-x\log x} = b, \text{ mithin } X = e^b,$$

indem bekanntlich $x \cdot \log x = 0$, wenn $x = 0$. CANTOR.

XXXIII. Ueber die Functionen

$$\varphi(x) = -\int_0^x \frac{l(1-\xi)}{\xi}\, d\xi \quad \text{und} \quad \psi(x) = \int_0^x \frac{l(1+\xi)}{\xi}\, d\xi = -\varphi(-x).$$

Durch eine dynamische Untersuchung, welche nach ihrer Vollendung in diesen Blättern erscheinen soll, wurde die Frage nach den zweckmässigsten Mitteln zur numerischen Berechnung der obigen Funktionen angeregt; dies veranlasste den Unterzeichneten zu einer näheren Ansicht der Sache, wobei die folgenden zum Theil bemerkenswerthen Resultate gewonnen wurden.

a. Für die Funktion $\varphi(x)$, die bei positiven x nur für $x \leqq 1$ reelle Werthe besitzt, hat man unmittelbar die Reihe

$$1) \qquad \varphi(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \cdots$$

diese ist indessen nur für $x \leqq \frac{1}{2}$ zur numerischen Berechnung brauchbar, bei grösseren und namentlich der Einheit naheliegenden x convergirt dagegen die Reihe äusserst langsam. Da der Werth von $\varphi(1)$ bekannt ist, nämlich

$$2) \qquad \varphi(1) = \tfrac{1}{6}\pi^2,$$

so liegt der Gedanke nahe, die Differenz

$$\varphi(1) - \varphi(x) = -\int_x^1 \frac{l(1-\xi)}{\xi}\, d\xi$$

womöglich so zu behandeln, dass eine Beziehung zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(1-x)$ gewonnen wird. Man hat nun für $\xi = 1 - \eta$

$$\tfrac{1}{6}\pi^2 - \varphi(x) = \int_{1-x}^{0} l\eta \frac{d\eta}{1-\eta}$$

und bei theilweiser Integration

$$\int l\eta \frac{d\eta}{1-\eta} = -l\eta \,.\, l(1-\eta) + \int \frac{d\eta}{\eta} l(1-\eta),$$

mithin nach Einführung der Grenzen $\eta = 0$ und $\eta = 1 - x$

$$\tfrac{1}{6}\pi^2 - \varphi(x) = l(1-x)\, lx + \int_{1-x}^{0} \frac{l(1-\eta)}{\eta}\, d\eta;$$

das noch übrige Integral ist $\varphi(1-x)$, und man gelangt damit zu der Reductionsformel

3) $$\varphi(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - lx \,.\, l(1-x) - \varphi(1-x).$$

Mittelst derselben erhält man z. B.

4) $$\varphi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{12}\pi^2 - \tfrac{1}{2}(l2)^2.$$

Ein anderer Weg zur Berechnung von $\varphi(x)$ ist folgender. Nach einer bekannten Formel hat man unter der Bedingung $2\pi > \omega$

$$\frac{1}{e^{\omega}-1} - \frac{1}{\omega} = \frac{e^{-\omega}}{1-e^{-\omega}} - \frac{1}{\omega}$$

$$= -\tfrac{1}{2} + \frac{B_1}{1.2}\omega - \frac{B_3}{1.2.3.4}\omega^3 + \frac{B_5}{1.2\ldots6}\omega^5 - \ldots,$$

wobei B_1, B_3, B_5 etc. die Bernoulli'schen Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$ etc. bezeichnen; durch Multiplication mit $d\omega$ und Integration zwischen den Grenzen $\omega = \omega$ und $\omega = 0$ zieht man hieraus

$$l\left(\frac{1-e^{-\omega}}{\omega}\right) = -\tfrac{1}{2}\omega + \frac{B_1}{1.2}\frac{\omega^2}{2} - \frac{B_3}{1.2.3.4}\frac{\omega^4}{4} + \ldots$$

oder auch

$$l(1-e^{-\omega}) = l\omega - \tfrac{1}{2}\omega$$
$$+ \tfrac{1}{2}\frac{B_1}{1.2}\omega^2 - \tfrac{1}{4}\frac{B_3}{1.2.3.4}\omega^4 + \tfrac{1}{6}\frac{B_5}{1.2\ldots6}\omega^6 - \ldots$$

Nochmalige Multiplication mit $d\omega$ und Integration zwischen den Grenzen $\omega = z$ und $\omega = 0$ giebt unter der Bedingung $2\pi > z$

$$\int_0^z l(1-e^{-\omega})\, d\omega = z(lz - 1) - \tfrac{1}{4}z^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}\frac{B_1}{1.2.3}z^3 - \tfrac{1}{4}\frac{B_3}{1.2..5}z^5 + \tfrac{1}{6}\frac{B_5}{1.2..7}z^7 - \ldots$$

Setzt man $e^{-\omega} = \xi$ und $e^{-z} = x$, wo nun x mehr als $e^{-2\pi}$ betragen muss, so folgt

$$\int_x^1 \frac{l(1-\xi)}{\xi}\,d\xi = l\left(\frac{1}{x}\right)\left[ll\left(\frac{1}{x}\right)-1\right]-\frac{1}{4}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{B_1}{1.2.3}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3-\frac{1}{4}\frac{B_3}{1.2..5}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^5+\dots;$$

die linke Seite ist $=\varphi(x)-\varphi(1)=\varphi(x)-\frac{1}{6}\pi^2$, und demgemäss

$$5)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{6}\pi^2+l\left(\frac{1}{x}\right)\left[ll\left(\frac{1}{x}\right)-1\right]-\frac{1}{4}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{B_1}{1.2.3}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3-\frac{1}{4}\frac{B_3}{1.2...5}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^5+\dots$$
$$1 \geqq x > 0{,}00186745$$

b. Hinsichtlich der Funktion $\psi(x)$, welche für alle positiven x reell bleibt, sind die Fälle $x \leqq 1$ und $x > 1$ zu unterscheiden. Unter der ersten Voraussetzung hat man

$$6)\qquad \psi(x)=\frac{x}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\dots$$

oder auch, wie man sogleich bemerkt,

$$7)\qquad \psi(x)=\varphi(x)-\frac{1}{2}\varphi(x^2),$$

man kann demnach die Tafel für $\psi(x)$ leicht aus der für $\varphi(x)$ berechneten ableiten. Hat man diese nicht, so benutzt man von $x=0$ bis $x=\frac{1}{2}$ die Formel 6) und nachher die Formel 7) indem man gemäss Nr. 3) erst

$$\psi(x)=\frac{1}{6}\pi^2-lx\,.\,l(1-x)-\varphi(1-x)$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\pi^2-l(x^2)\,l(1-x^2)-\varphi(1-x^2)\right]$$

und nachher für $\varphi(1-x)$ und $\varphi(1-x^2)$ die gleichgeltenden Reihen setzt, nämlich

$$8)\qquad \psi(x)=\frac{1}{12}\pi^2+lx\,.\,l(1+x)$$
$$-\left[\frac{1-x}{1^2}+\frac{(1-x)^2}{2^2}+\frac{(1-x)^3}{3^2}+\dots\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2}{1^2}+\frac{(1-x^2)^2}{2^2}+\frac{(1-x^2)^3}{3^2}+\dots\right].$$

Um zu einer Reihe zu gelangen, welche dem x einen grösseren Spielraum gewährt, gehen wir von der bekannten Gleichung aus

$$\frac{e^\omega}{1+e^\omega}=\frac{1}{2}+\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}\omega-\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}\omega^3+\dots$$
$$\pi>\omega>-\pi,$$

multipliciren dieselbe mit $d\omega$ und integriren zwischen den Grenzen $\omega=\omega$ und $\omega=0$; dies giebt

$$l(1+e^\omega)=l2+\frac{1}{2}\omega$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}\omega^2-\frac{1}{4}\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}\omega^4+\dots;$$

weiter folgt hieraus

$$\int\limits_0^z l(1+\text{[illegible]})\,d\omega = z\,l2 + \tfrac{1}{4}z^2$$

$$+\tfrac{1}{2}\frac{(2^2-1)B_1}{1.2.3}z^3 - \tfrac{1}{4}\frac{(2^4-1)B_3}{1.2\ldots 5}z^5 + \ldots.$$

$$\pi > z > -\pi.$$

ir $e^\omega = \xi$, $e^z = x$ geht die linke Seite in

$$\int\limits_1^x \frac{l(1+\xi)}{\xi}\,d\xi = \psi(x) - \psi(1) = \psi(x) - \tfrac{1}{12}\pi^2$$

über und es wird überhaupt

$$9)\qquad \psi(x) = \tfrac{1}{12}\pi^2 + l2\,.\,lx + \tfrac{1}{4}(lx)^2$$

$$+\tfrac{1}{2}\frac{(2^2-1)B_1}{1.2.3}(lx)^3 - \tfrac{1}{4}\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4.5}(lx)^5 + \ldots.$$

$$23{,}14067 > x > 0{,}04321.$$

Eine dritte Entwickelung von $\psi(x)$ ergiebt sich auf folgendem Weg
an hat bei theilweiser Integration

$$\int\limits_0^x \frac{l(1+\xi)}{\xi}\,d\xi = l(1+x)\,lx - \int\limits_0^x \frac{l\xi}{1+\xi}\,d\xi$$

und wenn man rechter Hand $\xi = x\eta$ substituirt

$$\psi(x) = l(1+x)\,lx - \int\limits_0^1 \frac{lx + l\eta}{1+x\eta}\,x\,d\eta$$

oder kürzer

$$10)\qquad \psi(x) = \int\limits_0^1 l\left(\frac{1}{\eta}\right)\frac{x\,d\eta}{1+x\eta}.$$

Entwickelt man den Bruch $\frac{x}{1+x\eta}$ nach Potenzen von x, was nur für ächt gebrochene x angeht, so kommt man auf die Gleichung 6) zurück; setzt man dagegen

$$\frac{x}{1+x\eta} = \frac{x}{1+x}\,\frac{1}{1-\dfrac{x(1-\eta)}{1+x}},$$

so kann man für jedes positive x nach Potenzen von $\frac{x}{1+x}$ entwickeln und erhält

$$\psi(x) = \int\limits_0^1 l\left(\frac{1}{\eta}\right)\left[\frac{x}{1+x} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2(1-\eta) + \ldots\right]d\eta.$$

Condensator eine dauerhaftere Einrichtung zu geben und hat zu dem Ende dünnes Tafelglas anstatt des Wachstaffet angewendet. Acht dünne Glastafeln, 18 Zoll lang und 10 Zoll breit, bis auf einen Zoll am Rande mit Stanniol belegt, sind in einem flachen Holzkasten über einander geschichtet, der inwendig mit $\frac{1}{8}$ Zoll auseinander stehenden Nuthen versehen ist, in denen die Glastafeln eine sichere Lage haben. An einer Längsseite sind die beiden Ecken der Glastafeln abgeschnitten und hier ein dünner Kupferdraht mit Siegellack auf dem freien Glasrande festgelackt und mittels leichtflüssigen Metalls an das Stanniolblatt festgelöthet. So treten an je einem Ende der Längsseite des Kastens 8 Kupferdrähte hervor, die zusammen und an eine am Kasten wohl isolirt befestigte Klemmschraube gelöthet sind. Die sich gegenüber liegenden Stanniolflächen zweier Tafeln sind immer mit ein und derselben Klemmschraube verbunden, so dass wenn die eine Klemmschraube mit der Zunge, die andere mit der Platinspitze des Stromunterbrechers verbunden ist, jenen gegen einander überliegenden Stanniolflächen gleichnamige Elektricität zugeführt wird. Von solchergestalt eingerichteten Condensatoren hat Sinsteden zwei, jeden mit 20 □Fuss Stanniolbelegung, angewendet und dabei gefunden, dass immer zwei zugleich benutzt eine grössere Wirkung gaben, als einer allein; ein Beweis, dass die Grösse der belegten Glasfläche mit den angegebenen Dimensionen noch nicht überschritten war.

Die Wirkungen des in solcher Weise von Sinsteden hergerichteten Inductionsapparates sind seinen Versicherungen zufolge allerdings sehr bedeutend. Der Apparat, dessen wesentliche von ihm hinzugefügte Zuthaten die Fortsetzung und Erweiterung des Inductionsdrahtes in eine grössere aufgewickelte Stanniolfläche, die Verwendung zweier Eisendrahtbündel und die Anlegung eines Stahlmagneten an die Pole derselben, die eigenthümliche Einrichtung des Stromunterbrechers sowie des Condensators sind, giebt mit zwei Zinkkohlenelementen ohne Thonbecher, nur mit verdünnter Schwefelsäure, der etwas saurés chromsaures Kali zugesetzt worden ist, geladen 9 paris. Linien lange, einzelne breite Inductionsfunken; bei 7 Linien Abstand der Pole fährt ein ununterbrochener dichter Feuerstrahl anhaltend über, und sind zwei Leidner Flaschen, jede von $1\frac{1}{2}$ □Fuss innerer Belegung, in einer unten näher angegebenen Weise mit in den Stromkreis eingeschaltet, so schlagen bei 6 Linien Abstand der Pole rasch hinter einander einzelne breite, lautknallende Funken über, die bei 5 Linien Abstand continuirlich werden, und ein betäubendes, dicht an einander gereihtes Knallen verursachen. Eine $\frac{1}{2}$ Fuss lange Blitztafel mit 25 Unterbrechungsstellen zeigt ein schönes Funkenspiel. Die Fünkchen der vielen Unterbrechungsstellen sind ungemein klein gegen den Funken einer einzigen Unterbrechungsstelle. — Wird ein Hühnerei zwischen die Polspitzen gelegt, so erglüht das Ei, so lange der Strom hindurchgeht, in einem so intensiven Lichte, dass es selbst bei Tage gut zu sehen ist. Zerschlägt man das Ei, so findet man da, wo der negative Poldraht angelegen hat, dicke Klumpen hartgeronnenen Eiweisses. — Fahren die Funken über ein zwischen die Pole gebrachtes Stückchen Kreide hin, so färben sie sich schön roth, ohne dass die Kreide leuchtend wird; Zucker wird durch und durch schneeweiss leuchtend. — Geht der Strom zwischen zwei Stahl- oder Platinspitzen über, so bildet sich in der Mitte zwischen ihnen, wo die beiderseitigen Feuerstrahlen sich begegnen, unter heftigem Sausen eine röthliche Flammenscheibe, an der sich Spiritus, Baumwolle, ein Schwefelholz, Schiesspulver, Papier, ein Talg-

$$12)\qquad \psi(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 + \tfrac{1}{2}(lx)^2 - \psi\left(\frac{1}{x}\right)$$

womit $\psi(x)$ auf $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ zurückgeführt ist. Nach den Formeln 6), 8) und 12) dürfte die Berechnung einer Tafel für $\psi(x)$ keine schwierige Arbeit sein.

SCHLÖMILCH.

XXXIV. Ueber Linien von gleicher Steigung auf gegebenen Flächen. Wenn eine Chaussee oder Eisenbahn einen Berg hinauf geführt werden soll, so liegt die Frage nahe, ob es nicht möglich sein würde, dem Strassenzuge eine constante Steigung zu geben, wie sie z. B. die Schraubenlinie auf dem geraden Kreiscylinder besitzt; in wissenschaftlicher Form ausgedrückt lautet dieses Problem: „auf einer gegebenen Fläche von einem ihrer Punkte aus eine Curve zu ziehen, von welcher jedes Element unter einem und demselben Winkel gegen eine feste Ebene geneigt ist.“ Die Lösung dieser übrigens nichts weniger als schweren Aufgabe mag hier Platz finden theils wegen ihrer oft interessanten Ergebnisse, theils wegen der passenden Beispiele, die sie zur Uebung in der Integralrechnung darbietet.

Die feste Ebene denken wir uns horizontal als Ebene der zu einander senkrechten Achsen der x und der y, die Achse der z sei vertikal gerichtet, $z = f(x, y)$ die Gleichung der gegebenen Fläche, v der constante Neigungswinkel jedes Curvenelementes gegen den Horizont und $x_0 y_0 z_0$ der auf der Fläche liegende Anfangspunkt der Curve. Geht man von einem beliebigen Flächenpunkte xyz zu einem anderen über, dessen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, so ist man in horizontaler Richtung um $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ fortgeschritten und in vertikaler Richtung um dz gestiegen; das Verhältniss der zweiten zur ersten Strecke giebt die Steigung und es ist daher

$$1)\qquad \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \tan v.$$

Setzt man für dz seinen Werth durch x und y ausgedrückt, so hat man unmittelbar die Differentialgleichung der Horizontalprojection der gesuchten Curve; nach Integration der Gleichung 1) bestimmt sich die willkürliche Constante durch die Bedingung, dass die endliche Gleichung der Linie für $x = x_0$ und $y = y_0$ richtig bleiben muss.

Bemerkenswerth ist die Rectificabilität der Horizontalprojection der Curve; man hat nämlich aus Nr. 1), wenn ds das Bogenelement der Horizontalprojection bezeichnet,

$$\frac{dz}{ds} = \tan v \text{ oder } ds = dz \cot v,$$

$$s = z \cot v + Const.$$

und wenn der Bogen s vom Punkte $x_0 y_0$ aus gerechnet wird

$$2)\qquad s = [f(x, y) - f(x_0, y_0)] \cot v.$$

Setzt man in Nr. 1) zur Abkürzung $\tan v = n$ und beachtet, dass die aus der gleichzeitigen Aenderung von x und y hervorgehende totale Aenderung des z aus den partiellen Aenderungen $\left(\frac{dz}{dx}\right) dx$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) dy$ besteht, so hat man

$$3)\qquad \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy = n\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

oder für $\frac{dy}{dx} = y'$

$$4)\qquad n\sqrt{1 + y'^2} = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)y'.$$

Im Allgemeinen ist diese Differentialgleichung wegen ihrer irrationalen Form nicht leicht zu integriren, wohl aber lassen sich einige specielle Fälle angeben, in denen die vollständige Auflösung ohne Mühe entwickelt werden kann.

a. Wenn die gegebene Fläche eine gerade, auf der xy-Ebene senkrechte Cylinderfläche ist, hängt z nicht von x und y ab; die Horizontalprojection der gesuchten Curve fällt dann mit der Horizontalspur der gegebenen Fläche zusammen und ist daher unmittelbar bekannt. Die Verticalprojection der Curve ergiebt sich aus der früheren Bemerkung $s = z \cot v + Const.$ nämlich

$$5)\qquad z = n(s + C) = n\int dx\sqrt{1 + y'^2}.$$

Für $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ d. h. für den geraden Kreiscylinder erhält man mit $x = 0$ und $z = 0$ anfangend

$$z = n\int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = na\,Arcsin\,\frac{x}{a},$$

was die bekannte Gleichung der Vertikalprojection der Schraubenlinie ist.

b. Gehört die gegebene Fläche zu den Umdrehungsflächen, so steht ihre Gleichung unter der Form

$$6)\qquad z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(r),$$

und dann wird die Gleichung 3) zur folgenden

$$f'(r)\left(\frac{dr}{dx}\right)dx + f'(r)\left(\frac{dr}{dy}\right)dy = n\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

d. i., wenn man das rechter Hand vorkommende Bogenelement durch die Polarcoordinaten r und ϑ ausdrückt,

$$f'(r)\,dr = n\sqrt{dr^2 + (r\,d\vartheta)^2}.$$

Diese Differentialgleichung gestattet die Trennung der Variabelen nämlich

$$\frac{\sqrt{f'(r)^2 - n^2}}{r}\,dr = n\,d\vartheta;$$

die Polargleichung der Horizontalprojection der gesuchten Curve lautet demnach

$$7)\qquad n\vartheta = \int\frac{\sqrt{f'(r)^2 - n^2}}{r}\,dr.$$

Ein paar interessante Beispiele hierzu sind folgende. Für einen Rotationskegel hat man

Werden die Pole der Inductionsrolle soweit einander genähert, dass Funken zwischen ihnen überschlagen, so kann man die Kette als geschlossen betrachten, mit dem Unterschiede jedoch von der durch einen guten Leiter vermittelten Schliessung, dass dabei nur der Oeffnungsstrom circulirt. Man erhält somit einen Strom von constanter Richtung, der mit Ausnahme der Discontinuität alle Eigenschaften eines galvanischen Stromes von hoher Intensität, ähnlich dem durch eine grosse Anzahl kleiner Plattenpaare erregten, besitzt; die Unterbrechung kann hierbei so klein wie nur immer sein. Ein Stück trocknes Fliesspapier zwischen Platten, in welche die Pole auslaufen, gebracht, bewirkt die beabsichtigte Unterbrechung ganz vollkommen und lässt nur den Oeffnungsstrom circuliren. Man bekommt durch diesen Strom eine Ablenkung der Magnetnadel in einem bestimmten Sinne, die Ladung einer Thermokette ganz in der Weise wie von einem galvanischen Strome, entgegengesetzt der Richtung desselben; auch eine thermische Wirkung im Drahte ist den Beobachtungen von Riess zufolge vorhanden, nur eine äusserst schwache. Dagegen üben die Funken an der Unterbrechungsstelle, wie schon oben bemerkt (vergl. auch Annal. Bd. 94, S. 632), eine viel stärkere thermische Wirkung aus. Die chemischen Zersetzungen des Wassers, Jodkaliums u. s. w. erfolgen ganz wie bei einem gewöhnlichen galvanischen Strom, indem an jedem Pole nur einer der Elektrolyte ausgeschieden wird. — Besonders bemerkenswerthe Lichterscheinungen entstehen, wenn die Unterbrechung des Stromes an der Flüssigkeit selbst geschieht, indem die Poldrähte entweder beide in vertikaler Richtung, in angemessener Entfernung über die Oberfläche der Flüssigkeit gestellt werden, wobei die Funken aus beiden auf die Flüssigkeit schlagen, oder indem nur einer derselben in die Flüssigkeit eingetaucht wird, während der andere über derselben steht, aus welchem die Funken in die Flüssigkeit überschlagen. Der Funkenstrom des positiven Pols erhält oben an der Spitze des Drahts eine gelbe oder rothgelbe Farbe und bildet unten auf der Flüssigkeit eine blaue Scheibe, umgekehrt ist der Funkenstrom am negativen Pol blau, während auf der Flüssigkeit ein gelber Schein liegt. Bei grösserer Nähe der Flüssigkeit an den Drähten reducirt sich das Phänomen auf einen blauen Funken am negativen Pol und einen gelben am positiven. Verschiedene Flüssigkeiten zeigen es übrigens verschieden; nicht leitende, wie Terpenthinöl lassen es gar nicht erscheinen, destillirtes Wasser nur unbedeutend, besser mit Schwefelsäure, Salzsäure, Salpetersäure angesäuertes, am besten die concentrirte Schwefelsäure. Diese Erscheinungen werden in einer mässig (bis etwa auf 8 Zoll Quecksilberdruck) verdünnten Luft noch schöner entwickelt. Von einer chemischen Zersetzung ist dabei, wenn die beiden Pole Funken auf die Flüssigkeit senden, nichts zu sehen; ist aber einer der Poldrähte, gleichgültig welcher, in die Flüssigkeit eingetaucht, so erfolgt an diesem eine Gasentwickelung.

Bei dem durch Luft oder Gas unterbrochenen Inductionsstrom spielt nun der Condensator eine sehr eingreifende Rolle. Bemerkenswerth sind dabei auch die Unterbrechungsfunken am Neef'schen Hammer, auf dessen Spiel sowohl der Condensator als auch der Inductionsstrom wirksam ist. Poggendorff hat zum Theil auch zu dem Zwecke den Einfluss des Condensators und des Extrastromes mehr festzustellen, die Unterbrechungen am Hammer innerhalb verschiedener Flüssigkeiten, später auch im luftverdünnten Raume (Annal. Bd. 95, S. 156, Monatsber. der Berliner Akad. 1855, S. 208) vor sich gehen lassen und dabei gefunden, dass namentlich die

$$n\vartheta = \int \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{m^2 r^2 - n^2 a^2}{a^2 - r^2}}$$

oder mittelst der Substitution $\sqrt{a^2 - r^2} = u$

$$n\vartheta = \int \frac{du}{a^2 - u^2}\sqrt{c^2 - m^2 u^2}.$$

Die Ausführung dieser Integration hat keine Schwierigkeit, giebt aber einen etwas complicirten Ausdruck.

Lässt man $-c^2$ an die Stelle von c^2 treten, so erhält man die entsprechende für das einfache Rotationshyperboloid geltende Formel

$$n\vartheta = \int \frac{du}{a^2 - u^2}\sqrt{-c^2 - m^2 u^2}, \quad m^2 = n^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^2;$$

sie liefert bei positiven m^2, d. h. für $n > \frac{c}{a}$, ein imaginäres Resultat.

c. Die Integration der Gleichung 4) gelingt endlich noch, sobald $z = f(x, y)$ eine homogene Funktion von x und y ist, in welchem Falle jene Gleichung die Form

$$n\sqrt{1 + y'^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)y'$$

annimmt. Setzt man nämlich $\frac{y}{x} = t$ und schreibt kurz φ und ψ statt $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, so giebt die Auflösung der vorigen Gleichung

$$y' = \frac{\varphi.\psi \pm n\sqrt{\varphi^2 + \psi^2 - n^2}}{n^2 - \psi^2};$$

andererseits hat man

$$y = xt, \qquad y' = x\frac{dt}{dx} + t,$$

und aus der letzteren Gleichung

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{y' - t}, \qquad l\left(\frac{x}{c}\right) = \int \frac{dt}{y' - t}$$

d. i. vermöge des Werthes von y'

$$8) \qquad l\left(\frac{x}{c}\right) = \int \frac{(n^2 - \psi^2)\,dt}{\varphi.\psi - (n^2 - \psi^2)\,t \pm n\sqrt{\varphi^2 + \psi^2 - n^2}},$$

worin c die willkürliche Constante der Integration bedeutet. Führt man die angedeutete Integration aus und setzt nachher $t = \frac{y}{x}$, so hat man in rechtwinkligen Coordinaten die Gleichung der Horizontalprojection der gesuchten Curve. Es scheint indessen wenig Fälle zu geben, in denen die Formel 8) zu einer Gleichung von geschlossener Form führt, denn schon bei der einfachsten Annahme

$$z = \sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2},$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2}}, \qquad \varphi(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}},$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{\beta y}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2}}, \qquad \psi(t) = \frac{\beta t}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}},$$

erhält das in Nr. 8) vorkommende Integral eine ziemlich complicirte Gestalt.

Schlömilch.

XXXV. Ueber die Wellenlängen des ultravioletten Lichts sind der Königl. Akademie in Berlin (Monatsber. Decbr. 1855. S. 757) durch Herrn Magnus folgende Mittheilungen des Herrn E. Esselbach in Bonn nebst einigen begleitenden Bemerkungen des Herrn Helmholtz zugekommen: „Da die bisher angewendeten Methoden zur Messung von Wellenlängen, auch die von Fraunhofer, welcher Gitterspectra dazu gebrauchte, wegen Lichtschwäche beim ultravioletten Lichte sich nicht als brauchbar erwiesen, musste eine andere Methode gewählt werden, welche auf ein von Talbot beobachtetes Phänomen gegründet ist.

Betrachtet man ein reines Spectrum im Fernrohr, während man von der Seite des Violett her mit einem dünnen Blättchen durchsichtiger Substanz die halbe Pupille bedeckt, so erscheint das Spectrum in helle und dunkle Streifen gleichmässig getheilt, welche abgesehen von ihrer regelmässigen Anordnung den Fraunhofer'schen Linien parallel und ähnlich sind. Mit der Dicke des Blättchens wächst ihre Zahl und ihre Feinheit. Sie entstehen durch Interferenz desjenigen Theils des Strahlenbündels, welcher durch die dünne Platte gegangen ist, mit dem andern Theile desselben Bündels, welcher daran vorbeigegangen ist.

Zu den Versuchen wurde ein aus Bergkrystalllinsen zusammengesetztes Fernrohr benutzt und zwei Prismen von demselben Material. Das Ultraviolett war dem Auge unmittelbar sichtbar, wenn man nach der von Helmholtz vorgeschlagenen Methode (vergl. die Zeitschr. 3. Heft S. 166) durch das Fernrohr und ein davorgesetztes Prisma einen Spalt betrachtet, durch den schon ultraviolettes Licht, isolirt durch das andere Prisma, hindurchdrang. Die Helligkeit war sogar für das blosse Auge grösser, als wenn in die Blendung des Oculars eine zwischen Quarzplatten eingeschlossene Schicht von Chininlösung als fluorescirender Schirm eingefügt wurde.

Ist a die Dicke der Platte, sind ferner λ_1 und λ_2 die Wellenlängen zweier Farben in Luft, n_1 und n_2 die Brechungsverhältnisse in der dünnen Platte und m der Gangunterschied der durch die Platte und neben ihr vorbeigegangenen Strahlen von der Wellenlänge λ_1, so ist

$$\frac{a}{\lambda_1} - \frac{a}{n_1 \lambda_1} = m$$

für jeden hellen Streifen im Spectrum muss m eine ganze Zahl sein, für den nächst benachbarten hellen Streifen um eine Einheit grösser oder kleiner. Ist also zwischen den Farben von der Wellenlänge λ_1 und λ_2 die Zahl der dunklen Streifen gleich p, so ist

$$\frac{a}{\lambda_2} - \frac{a}{n_2 \lambda_2} = m + p.$$

Wählt man zuerst zwei Farben, deren Wellenlängen und Brechungsverhältnisse bekannt sind (es wurden genommen Fraunhofers Wellenlänge für C und H), so kann man aus diesen beiden Gleichungen die Constanten a und m berechnen. Stellt man dann dieselbe Gleichung für eine Farbe von unbekannter Wellenlänge auf und zählt die Streifen zwischen ihr und λ_1, so giebt die Gleichung den Werth ihrer Wellenlänge, vorausgesetzt, dass man ihr Brechungsverhältniss an der Platte kennt.

Weil dem Autor keine Methode bekannt war, den Brechungsindex eines Strahles in einem dünnen Blättchen zu bestimmen, ohne dass die Wellenlängen gegeben waren, so wurde ein Bergkrystallplättchen genommen, welches senkrecht gegen die Axe geschnitten war, da ja doch die Brechungs-

verhältnisse der betreffenden Strahlen im Bergkrystall gleichzeitig gemessen werden sollten. Mit dem vorhandenen Apparate war nur die 4te Decimale zu erreichen, was aber für die Bestimmung der Wellenlängen hier genügt. Die Werthe der Brechungscoefficienten des ordentlichen Strahls im Bergkrystall, welche in der folgenden Tabelle unter n angegeben sind, sind Mittelwerthe aus Bestimmungen an den drei Winkeln desselben Prisma angestellt. Sie sind constant 0,0004 höher als Rudbergs, welche zur Vergleichung daneben stehen. Die festen Linien bis P sind nach Stokes benannt, mit Q und R habe ich zwei der stärksten Linien des nur durch Quarzapparate sichtbaren Theils des Ultraviolett bezeichnet. Mit p ist die Zahl der Talbot'schen Streifen zwischen je zwei aufeinander folgenden Fraunhofer'schen Linien bezeichnet, wobei die Resultate mehrerer Zählungen angegeben sind. Neben die von mir berechneten Wellenlängen habe ich zum Vergleiche die von Fraunhofer für das sichtbare Spectrum gestellt, von denen die für C und H zur Bestimmung der Constanten in der Rechnung benutzt sind. Man sieht, dass die Uebereinstimmung beider Reihen sehr gross ist. In der letzten Columne sind die Wellenlängen nach der Annäherungsformel von Cauchy

$$n_{\prime\prime} - n_{\prime} = c\left(\frac{1}{\lambda_{\prime}^2} - \frac{1}{\lambda_{\prime\prime}^2}\right)$$

berechnet, wobei die Constanten c und $\lambda_{\prime}$ aus den Werthen von Fraunhofer für C und H berechnet wurden. Man sieht, dass diese Formel im ultravioletten Spectrum ziemlich ebenso gut mit den Messungen stimmt, wie im sichtbaren.

Namen der Linien.	Brechungsverhältniss n nach meinen Messungen.	Brechungsverhältniss n nach Rudberg.	p.	Wellenlängen nach meinen Messungen in Millimetern.	Fraunhofers Werthe der Wellenlängen.	Wellenlängen nach Cauchys Formel.
B	1,5414	1,5409		0,0006874	0,0006878	0,0006960
			7,5 — 7			
C	1,5424	1,5418		.	6564	.
			20 — 19 — 19,5			
D	1,5446	1,5442		5886	5888	5819
			22,5 — 22 — 23			
E	1,5476	1,5471		5260	5260	5233
			18,5 — 18,5			
F	1,5500	1,5496		4845	4843	4830
			31 — 31 — 31			
G	1,5546	1,5542		4287	4291	4278
			24,5 — 25 — 25			
H	1,5586	1,5582		.	3929	.
			11 — 11			
L	1,5605	. . . .		3791	. . . . . .	3824
			11,5 — 11,5			
M	1,5621	. . . .		3657	. . . . . .	3741
			14,5 — 15,5 — 15			
N	1,5646	. . . .		3498	. . . . . .	3532
			14,5 — 14,5			
O	1,5674	. . . .		3360	. . . . . .	3383
			8 — 7,5 — 8			
P	1,5690	. . . .		3290	. . . . . .	3307
			7 — 7			
Q	1,5702	. . . .		3232	. . . . . .	3243
			18			
R	1,5737	. . . .		3091	. . . . . .	3108

Man sieht, dass in Bezug auf die Wellenlängen das Intervall, welches durch das Ultraviolett zum Spectrum hinzukommt, allerdings kleiner ist, als die Ausbreitung im Quarzspectrum es erwarten liess. Das 6 bis 8 mal so lange Ultraviolett des elektrischen Kohlenlichts wird dem bisher gewonnenen aber, wenn Cauchy's Formel auch dafür gilt, etwa noch eine Octave hinzufügen.

Die Methode der Linienzählung wird sich in gewissen Fällen mit Vortheil zur Bestimmung der Brechungsindices und Dispersionsconstanten anwenden lassen, wenn man die Wellenlängen als bekannt voraussetzt, na-

mentlich wo man nicht mehr Material hat, als um eine dünne Platte zu bilden, die die halbe Pupille bedeckt und zweitens bei stark absorbirenden Mitteln. Stokes hat ausserdem darauf aufmerksam gemacht, dass man den ersten Brechungsindex erhält, wenn man die Plattendicke durch Neigung verändert."

Diese Resultate der Messungen des Herrn Esselbach hat Herr Helmholtz mit folgenden Bemerkungen begleitet. „Vorstehende Messungen machen es möglich, eine ausgedehntere Vergleichung der Verhältnisse der Lichtwellenlängen mit denen der Tonintervalle anzustellen, als es bisher möglich war. Ich bemerke, dass ich selbst vor einiger Zeit die Wellenlänge der Linie *A* im äussersten Roth nach Fraunhofers Methode an einem Spectrum bestimmt habe, von dem alles Licht, mit Ausnahme des äussersten Roth durch Anwendung von zwei Prismen und zwei Schirmen abgeblendet war. Ich fand diese Wellenlänge gleich 0,0007617 *mm*. Es war aber jenseits *A* noch ein Streifen rothen Lichts mit einigen Linien darin sichtbar, der dem Zwischenraume von *A* und *B* an Breite etwa gleich kam.

In der folgenden Tabelle habe ich das Licht der Linie *A* dem Tone *G* entsprechend gesetzt und die den einzelnen halben Tönen entsprechenden Farben daneben gestellt. In der letzten Rubrik sind die Fraunhoferschen Linien bei den ihnen zunächst liegenden Tönen aufgeführt.

In dieser Tabelle stellt sich sehr deutlich heraus, wie wenig Analogie zwischen der Tonempfindung und Farbenempfindung besteht. In der Gegend des Gelb und Grün sind die Farbenübergänge ausserordentlich schnell, an den Enden des Spectrum ausserordentlich langsam. Dort sind sämmtliche Uebergangsstufen zwischen Gelb und Grün in die Breite eines kleinen halben Tons zusammengedrängt, hier befinden sich Intervalle von der Grösse einer kleinen oder grossen Terz, in denen das Auge gar keine Veränderung des Farbentones wahrnimmt. Der ganze sichtbare Theil des Sonnenspectrums umfasst etwa eine Octave und eine Quarte.

Ton.	Wellenlänge.		Entsprechende Farbe.	Frauenhofersche Linien mit ihrer Wellenlänge.
	$c=1$	$G=7617$		
Fis	$\frac{64}{45}$	8124	Ende des Roth	
G	$\frac{4}{3}$	7617	Roth	*A* 7617
Gis	$\frac{32}{25}$	7312	Roth	
A	$\frac{6}{5}$	6771	Roth	*B* 6878
B	$\frac{10}{9}$	6347	Rothorange	*C* 6564
H	$\frac{16}{15}$	6094	Orange	
c	1	5713	Gelb	*D* 5888
cis	$\frac{24}{25}$	5217	Grün	*E* 5260
d	$\frac{8}{9}$	5078	Grünblau	
es	$\frac{5}{6}$	4761	Cyanblau	*F* 4843
e	$\frac{4}{5}$	4570	Indigoblau	
F	$\frac{3}{4}$	4285	Violett	*G* 4291
Fis	$\frac{32}{45}$	4062	Violett	
g	$\frac{2}{3}$	3808	Ueberviolett	*H* 3929
gis	$\frac{16}{25}$	3656	Ueberviolett	*M* 3657
a	$\frac{3}{5}$	3385	Ueberviolett	
b	$\frac{5}{9}$	3173	Ueberviolett	*R* 3091
h	$\frac{8}{15}$	3047	Ende des Sonnenspectrums.	

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

XV.

Ueber die Reduction eines sphärischen Dreiecks von geringer Krümmung auf sein Sehnendreieck.

Von A. Nagel,

Lehrer der höheren Geodäsie an der polytechnischen Schule zu Dresden.

Einige Bemerkungen, welche Herr Riedl v. Leuenstern in Wien bei Gelegenheit der Recension des Handbuches der höhern und niedern Messkunde von Barfuss in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins, 1854 Juni Nr. 11. u. 12. in Bezug auf die Reduction eines an der Erdoberfläche gemessenen sphärischen Dreiecks auf sein Sehnendreieck anbrachte, sind für die Redaction gegenwärtiger Zeitschrift Veranlassung gewesen, genannten Herrn um Mittheilung des in Oesterreich gebräuchlichen und von dem als Erfinder einer Sprechmaschine bekannten Faber herrührenden Verfahrens zu bitten. Dieser Bitte ist derselbe mit anerkennungswerther Bereitwilligkeit durch Zusendung der von ihm unter dem Titel „Beiträge zur Theorie der Sehnenwinkel, Wien 1827" herausgegebenen Abhandlung und eines für die gegenwärtige Zeitschrift bestimmten Anhanges dazu, die erwähnte Reduction betreffend, nachgekommen. Da jedoch dieser Nachtrag, auf obige Theorie Bezug nehmend, den Inhalt jener Schrift als bekannt voraussetzt, die letztere selbst aber, nach dem eigenen Zugeständnisse des Herrn Verfassers in erwähnter Recension, in weiteren Kreisen nicht so bekannt sein dürfte, als sie es eigentlich verdient, so hat genannte Redaction nach vorhergegangener Einwilligung des Herrn Verfassers den Unterzeichneten mit einer gedrängten Darstellung der v. Leuenstern-schen Herleitung der Faber'schen Reductionsmethode beauftragt. Dieser Arbeit unterzog sich derselbe um so lieber, als einige von Herrn v. Leuenstern in seiner Theorie der Sehnenwinkel bewiesenen Sätze ein Mittel an die Hand geben, um auf sehr einfache Weise zu den inzwischen von Herrn Prof. Grunert in seinem Archive für Mathematik und Physik 25. Thl., S. 197 u. f. entwickelten bequemen Reductionsformeln und zu dem daselbst schliesslich aufgestellten Satze zu gelangen, der dem berühmten Legendre'schen Theoreme zur Seite gestellt zu werden verdient.

Es sollen daher im Folgenden zunächst die v. Leuenstern'schen Sätze entwickelt, dann aber aus diesen die Faber'schen und Grunert-

schen Reductionsformeln abgeleitet und endlich von diesen zu jenem, dem Legendre'schen analogen Satze übergegangen werden.

Die Sätze von Riedl v. Leuenstern.

Legt man durch die drei Eckpunkte A, B, C (Fig. 44) eines sphärischen Dreiecks eine Ebene, so schneidet dieselbe die Kugelfläche in einem durch diese Punkte gehenden Kugelkreise, dessen Pol P bekanntlich zugleich Pol des sphärischen Dreiecks ABC und dessen Mittelpunkt P_1, als Projection des Poles P auf diese Ebene, zugleich Mittelpunkt des in letzterer liegenden und von den Sehnen AB, BC, CA gebildeten Sehnendreiecks ist.

Verbindet man ferner die Eckpunkte A, B, C, sowie die Halbirungspunkte D, E, F der Dreieckseiten mit dem Pole P durch Bögen grösster Kreise, so sind bekanntlich PD, PE, PF beziehendlich normal auf den Dreieckseiten BC, CA, AB und das ganze Dreieck wird durch diese sechs Bögen in ebenso viel rechtwinklige Poldreiecke APE, APF, BPF, BPD, CPD und CPE zerlegt, von denen je zwei an einerlei Dreieckseite anliegende einander symmetrisch gleich sind, je zwei an einerlei Ecke des sphärischen Dreiecks zusammentreffende aber ein Polviereck mit zwei einander diagonal gegenüberliegenden rechten Winkeln bilden.

Die Ebenen dieser grössten Kreise gehen zugleich durch den Mittelpunkt P_1 des Sehnendreiecks, schneiden die Ebene des letztern normal und hinterlassen in derselben Spuren, von denen P_1D_1, P_1E_1 und P_1F_1 beziehendlich rechtwinklig auf den Seiten BC, CA und AB des Sehnendreiecks sind, und die dasselbe ebenfalls in sechs rechtwinklige Mittelpunktsdreiecke AP_1E_1, AP_1F_1 etc. zerlegen, von denen dasselbe gilt, was bereits von den zum sphärischen Dreiecke gehörenden Poldreiecken angeführt wurde.

Da sämmtliche sphärischen Winkel am Pole in der die Kugelfläche in diesem Punkte berührenden Ebene liegen, letztere aber parallell mit der Ebene des Sehnendreiecks ist, so sind auch die sphärischen Winkel am Pole der einzelnen Poldreiecke ihren Projectionen auf die Ebene des Sehnendreiecks, d. i. den entsprechenden Mittelpunktswinkeln des letztern gleich. Es ist demnach:

$$\angle APF = \angle AP_1F_1 = \angle BP_1F_1 = \angle BPF,$$
u. s. w.

Bezeichnet man die Winkel des sphärischen Dreiecks mit A, B, C, die entsprechenden Winkel des zugehörenden Sehnendreiecks mit A_1, B_1, C_1, den sphärischen Excess des ganzen Dreiecks mit E und den zu jedem der Winkel A, B, C gehörenden Excessantheil beziehendlich mit E_a, E_b, E_c, so ist:

$$1)\qquad E_a = A - A_1,\ E_b = B - B_1,\ E_c = C - C_1,$$

und

$$E = E_a + E_b + E_c = A + B + C - 180^0.$$

Ferner mögen respective E_A, E_B, E_C die sphärischen Excesse der von den Winkeln A, B, C eingeschlossenen Polvierecke bedeuten.

Wegen $\angle AEP = \angle AFP = 90^0$ ist der sphärische Excess des Polvierecks $AEPF$:

$$E_A = A + \angle EPF - 180^0,$$

oder, weil $\angle EPF = \angle EPA + \angle APF = \angle E_1P_1A_1 + \angle AP_1F_1 = B_1 + C_1$ ist:

$$E'_A = A + B_1 + C_1 - 180^0$$

und, wenn man für A seinen aus 1) folgenden Werth substituirt:

$$E_A = E_a + A_1 + B_1 + C_1 - 180^0.$$

Da nun A_1, B_1, C_1 die Winkel eines ebenen Dreiecks sind, deren Summe $= 180^0$ ist, so folgt unter gleichzeitiger Verwechselung der beiden Seiten der Gleichung:

$$\text{I.} \begin{cases} E_a = E_A; \text{ analog findet sich:} \\ E_b = E_B, \\ E_c = E_C, \end{cases}$$

d. h. der zu jedem Winkel eines sphärischen Dreiecks in Bezug auf sein Sehnendreieck gehörende Excessantheil ist gleich dem sphärischen Excesse des von diesem Winkel eingeschlossenen Polvierecks.

Bekanntlich verhält sich der Excess eines sphärischen Polygones zu vier rechten Winkeln wie der Flächeninhalt desselben zur Halbkugelfläche. Wendet man diesen Satz zur Bestimmung von E_A an, indem man die Fläche des Polvierecks $AEPF = F_a$ setzt, so ergiebt sich:

$$E_A = \frac{4 \cdot 90^0 \cdot F_a}{2 R^2 \pi} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{F_a}{R^2},$$

oder, wenn man den constanten Factor $\frac{180^0}{\pi}$, wie es im Folgenden immer geschehen soll, kurz durch μ bezeichnet und nach I. E_a für E_A setzt:

$$E_a = \mu \frac{F_a}{R^2}.$$

Auf ähnliche Weise bestimmen sich die Excessantheile E_b und E_c aus den Flächeninhalten F_b und F_c der von den Winkeln B und C eingeschlossenen Polvierecke, so dass man in der Zusammenstellung für sämmtliche drei Excessantheile hat:

$$\text{II.} \begin{cases} E_a = \mu \frac{F_a}{R^2}, \\ E_b = \mu \frac{F_b}{R^2}, \\ E_c = \mu \frac{F_c}{R^2}. \end{cases}$$

Da der Flächeninhalt F des ganzen Dreiecks als die Summe der Flächeninhalte F_a, F_b, F_c der einzelnen Polvierecke zu betrachten ist, so ergiebt sich durch Summirung der Gleichungen II. mit Leichtigkeit der bekannte Ausdruck für den Excess des ganzen Dreiecks:

$$2) \qquad E = \mu \frac{F}{R^2},$$

der mit jeder der Gleichungen II. verbunden, folgende drei Proportionen liefert:

$$\text{III.} \quad \frac{E_a}{E} = \frac{F_a}{F}; \quad \frac{E_b}{E} = \frac{F_b}{F}; \quad \frac{E_c}{E} = \frac{F_c}{F},$$

d. h. der zu einem Winkel des sphärischen Dreiecks in Bezug auf sein Sehnendreieck gehörende Excessantheil verhält

sich zum ganzen Excess, wie der Flächeninhalt des von diesem Winkel eingeschlossenen Polvierecks zum Flächeninhalte des ganzen Dreiecks.

Was die allgemeine Gültigkeit der unter I., II. und III. aufgestellten Sätze anlangt, so ist zu bemerken, dass selbige bis jetzt nur unter der Voraussetzung, dass der Pol innerhalb des sphärischen Dreiecks liegt, nachgewiesen sind; es sind aber noch zwei andere Fälle möglich, in welchen nämlich der Pol in einer Dreieckseite oder ausserhalb des Dreiecks sich befindet. Um die Anwendbarkeit der genannten Sätze auch auf diese beiden Fälle einzusehen, braucht es offenbar nur untersucht zu werden, was für eine sphärische Figur als das von dem betreffenden Winkel eingeschlossene Polviereck zu betrachten ist, und ob der dem Flächeninhalte derselben entsprechende Excess dem Excessantheile dieses Winkels gleichkommt.

Erinnert man sich, dass jedes Polviereck in Fig. 44 aus den beiden, an der entsprechenden Ecke des Dreiecks zusammenstossenden, rechtwinkligen Poldreiecken besteht, so ersieht man sofort, dass, wenn der Pol in der Dreieckseite AB (Fig. 45) liegt, die frühere Normale RF (Fig. 44) in Null, mithin auch das als Bestandtheil des Polvierecks $AEPF$ (Fig. 44) aufgetretenen Poldreieck APF in Null, das Polviereck selbst aber in das Poldreieck APE (Fig. 45) übergegangen ist. Ist daher für F_a der Flächeninhalt dieses Poldreiecks und für E_A der sphärische Excess desselben anzusehen, so bleibt nur noch nachzuweisen übrig, dass dieser letztere mit dem Excessantheile E_a des Winkels A identisch ist.

Im rechtwinkligen sphärischen Dreiecke APE ist

$$E_A = A + \angle APE - 90^0,$$

oder, wegen $A = A_1 + E_a$ und $\angle APE = \angle AP_1E_1 = B_1$:

$$E_A = E_a + A_1 + B_1 - 90^0.$$

Liegt aber der Pol P in der Dreieckseite AB, so liegt auch dessen Projection P_1 in der Sehne BA, das Sehnendreieck ABC ist in diesem Falle in C rechtwinklig und $A_1 + B_1 = 90^0$. Daher ergiebt sich wie im vorigen Falle

$$E_A = E_a.$$

Für den andern an der durch den Pol gehenden Seite AB liegenden Winkel B stellt sich ganz dasselbe heraus, während für den Winkel C die früheren Verhältnisse dieselben bleiben. Die unter I., II. und III. aufgeführten Sätze finden also auch für den Fall, wo die eine Dreieckseite durch den Pol geht, Anwendung, indem die an dieser Seite anliegenden Poldreiecke die zu den daselbst befindlichen Dreieckswinkeln gehörenden Polvierecke vertreten.

Liegt der Pol P ausserhalb des Dreiecks ABC (Fig. 46), so liegt auch die zu P gehörende Projection P_1 ausserhalb des Sehnendreiecks und letzteres ist in dem den Mittelpunkt einschliessenden Winkel C_1 stumpfwinklig. Durch den Uebergang von einem Dreiecke mit eingeschlossenem Pole (Fig. 44) zu einem solchen mit ausgeschlossenem Pole (Fig. 46) hat der von P nach der Mitte der Seite AB gezogene Bogen PF eine der früheren entgegengesetzte Lage angenommen; das zu demselben gehörende ganz ausserhalb des Dreiecks ABC (Fig. 46) liegende Poldreieck APF ist

daher bei der Bestimmung von F_a mit entgegengesetzten Zeichen aufzuführen, d. h. es muss sein:

$$F_a = APE - APF.$$

Da bei dieser Subtraction das beiden Dreiecken gemeinschaftliche Dreieck ASP wegfällt, so ergiebt sich daraus

$$F_a = AES - SPE,$$

was der Flächeninhalt des überschlagenen Polvierecks $AEPF$ ist, bei welchem der ausserhalb des Dreiecks ABC liegende Theil SPF desselben negativ auftritt. Der zu F_a gehörende Excess E_A besteht aber in diesem Falle offenbar aus der Differenz der Excesse der beiden rechtwinkligen Dreiecke AES und PSF, also:

$$E_A = (A + \angle ASE - 90^0) - (\angle PSF + \angle SPF - 90^0)$$

und wegen der Gleichheit der Scheitelwinkel ASE und PSF:

$$E_A = A - \angle SPF.$$

Es ist aber $\angle SPF = 180^0 - (\angle JPA + \angle APE) = 180^0 - B_1 - C_1$, folglich, wenn man hiermit zugleich auch $A = E_a + A_1$ einsetzt:

$$E_A = E_a + A_1 + B_1 + C_1 - 90^0$$

d. i.

$$E_A = E_a.$$

Was für den einen der beiden den Pol ausschliessenden Winkel gilt, gilt auch für den andern (B), dagegen bleiben für den, den Pol einschliessenden, Winkel (C) die früheren Verhältnisse dieselben. Es ist demnach die Giltigkeit der Sätze I., II. und III. auch auf den Fall auszudehnen, wenn der Pol ausserhalb des Dreiecks liegt, man darf nur die von den Schenkeln der den Pol ausschliessenden Winkel und den von dem Pole auf dieselben gezogenen Normalen gebildeten überschlagenen Vierecke als die zu diesen Winkeln gehörenden Polvierecke betrachten; wobei jedoch berücksichtigt werden muss, dass die ausserhalb des sphärischen Dreiecks liegenden Theile derselben negativ zu nehmen sind.

Sofort aus der Fig. 46 wird klar, dass auch in diesem Falle, wie in den beiden andern, die Summe von F_a, F_b, F_c den Flächeninhalt F des ganzen Dreiecks giebt, weil die in den Inhalten F_a und F_b auftretenden negativen Theile SPF und TPF bereits mit in F_c positiv enthalten sind. Eben so ersichtlich ist, dass in einem oder dem andern der beiden überschlagenen Vierecke, oder auch in beiden zugleich, der negative Theil desselben eben so gross oder grösser auftreten kann als der positive und dass dann nothwendig der Excessantheil des einen oder des andern den Pol ausschliessenden Winkels, oder auch beide Excessantheile zugleich gleich Null oder kleiner als Null sein müssen.

Durch fortgesetze Betrachtung sind nun in der angeführten „Theorie etc." noch viele andere interessante Sätze auf elementare Weise abgeleitet, z. B. dass ein rechter Winkel den halben summarischen Excess erhält, dass von 120^0 an der stumpfe Winkel den ganzen Excess und noch mehr allein trägt, die beiden andern Excessantheile aber zusammen Null oder kleiner als Null werden etc., hinsichtlich derer ich jedoch auf die genannte Schrift verweisen muss.

Die Faber'schen Reductionsformeln.

Wenn man unter einem geodätischen Dreiecke überhaupt ein auf der Erdoberfläche mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln direct messbares versteht, so kann man dasselbe als ein solches betrachten, dessen Seiten in Bezug auf den Krümmungshalbmesser der Kugel sehr klein sind. In diesem Falle kann man aber mit Hilfe eines der obigen Sätze einfache Reductionsformeln zur Bestimmung des zum geodätischen Dreiecke gehörenden Sehnendreiecks ableiten. Herr Riedl v. Leuenstern hat die Ableitung der Faber'schen Reductionsformeln ganz einfach dadurch ermöglicht, dass er den Flächeninhalt des geodätischen Dreiecks gleich dem Flächeninhalte des entsprechenden Sehnendreiecks annahm, woraus sofort folgte, dass auch der Flächeninhalt eines in demselben liegenden Polvierecks gleich dem Inhalte der (perspectivischen) Projection desselben auf das Sehnendreieck anzunehmen sei. Der letztere lässt sich aber sehr einfach aus zwei Seiten und den Gegenwinkeln des Sehnendreiecks bestimmen und in II. einführen, wodurch sofort die gewünschte Reductionsformel erhalten wird.

So einfach die Art und Weise dieser Ableitung erscheint, so gestattet sie doch nicht sofort die nöthige Einsicht, welchem Genauigkeitsgrade die erhaltene Formel entspricht, wenn man nicht im Voraus weiss, dass der Inhalt eines Polvierecks dem Inhalte seiner Projection mit einem Genauigkeitsgrade gleichgesetzt werden kann, bei welchem erst Glieder die in Bezug auf die Dreieckseiten von der 4. Ordnung sind, vernachlässigt werden. Ich gestatte mir daher einen anderen, deshalb nicht viel umständlichern Weg zur Ableitung der Faber'schen Reductionsformeln einzuschlagen, zu welchem Zwecke ich jedoch vorher im Allgememeinen den sphärischen Excess eines rechtwinkligen Dreiecks in einer Kathete und dem Gegenwinkel auszudrücken suchen muss.

In einem bei C rechtwinkligen Dreiecke ABC, dessen Seiten und Winkel auf die gewohnte Weise benannt werden mögen, ist bekanntlich

$$\cos A = \cos a \sin B,$$

also

$$\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}. \tag{3}$$

Ferner ist der sphärische Excess desselben

$$E = A + B - 90^0,$$

woraus folgt:

$$B = 90^0 - (A - E)$$

und demnach auch

$$\sin B = \cos (A - E). \tag{4}$$

Aus 3) und 4) ergiebt sich

$$\cos (A - E) = \frac{\cos A}{\cos a}. \tag{5}$$

Obwohl der hiernach sich ergebende Werth für E im Allgemeinen zweideutig ist, indem der aus dieser Gleichung folgende Cosinuswerth ebensowohl einem positiven als negativen Winkel angehören kann, so verschwindet doch diese Zweideutigkeit bei Anwendung der Gleichung 5) auf ein geodätisches Dreieck, wenn man gleichzeitig zur bessern Vereinfachung

den $cos\,(A - E)$ nach A und E auflöst und sodann $cos\,E = 1$ und $sin\,E = E$ setzt. Berücksichtiget man nämlich, dass E dem Flächeninhalte des betreffenden Dreiecks proportional folglich in Bezug auf die Dreieckseiten eine Grösse zweiter Ordnung ist, so werden bei obiger Annahme erst Glieder vernachlässiget, die in Bezug auf die Dreieckseiten von der vierten Ordnung sind. Nach Ausführung der hier angedeuteten Operationen ergiebt sich aus 5)

$$cos\,A + E\,sin\,A = \frac{cos\,A}{cos\,a}$$

oder

$$E = (sec\,a - 1)\,cot\,A.$$

Entwickelt man $sec\,a$ nach der entsprechenden Reihe:

$$sec\,a = 1 + \frac{1\,.\,a^2}{1\,.\,2} + \frac{5\,.\,a^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots$$

und vernachlässiget in derselben alle Glieder von der vierten Ordnung an, so erhält man

$$E = \frac{a^2\,cot\,A}{2}.$$

Da hierin sowohl E als a Bogenlängen für den Radius 1 bedeuten, so ist, um E in Secunden zu erhalten,

$$E = \left(\frac{\pi}{180^0}\right)''.\,E'' = \frac{E''}{\mu''}$$

zu setzen, wodurch sich ergiebt:

$$6)\qquad E'' = \mu''\,.\,\frac{a^2\,cot\,A}{2},$$

welcher Ausdruck, mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf die Dreieckseiten erst von der vierten Ordnung sind, den Excess eines rechtwinkligen geodätischen Dreiecks aus einer Kathete und dem Gegenwinkel giebt.

Um nun denselben auf die Bestimmung der Excessantheile der einzelnen Winkel eines geodätischen Dreiecks anzuwenden, bezeichnen wir die Längen der den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c, mithin sind, wenn R der Halbmesser der Erde ist, $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ diese Seiten für den Radius 1. Es besteht aber der Excess des z. B. zu A gehörenden Polviereck (Fig. 44 und 46) aus der Summe oder Differenz der einstweilen beziehendlich mit β und γ bezeichneten Excesse der Poldreiecke APE und APF, folglich zugleich mit Rücksicht auf I.:

$$7)\qquad E_a = E_A = \beta \pm \gamma,$$

worin das obere Zeichen für den durch Fig. 44 und das untere Zeichen für den durch Fig. 46 dargestellten Fall gilt. Unter Anwendung von 6) ist aber

$$\beta = \mu\,.\,\frac{\overline{AE}^2\,cot\,APE}{2} = \mu\,\frac{b^2\,cot\,B_1}{8R^2}$$

für beide Fälle, ferner

$$\gamma = \mu\,\frac{\overline{AF}^2\,cot\,APF}{2} = \mu\,\frac{c^2\,cot\,C_1}{8R^2}.$$

für Fig. 44, und, weil in Fig. 46

$$\angle APF = 180^\circ - JPA = 180 - C_1 \text{ ist},$$

$$\gamma = -\mu \frac{c^2 \cot C_1}{8R^2}$$

für den durch Fig. 46 repräsentirten Fall, mithin für beide Fälle zugleich:

$$\gamma = \pm \mu \frac{c^2 \cot C_1}{8R^2}.$$

Durch Einführung dieser Werthe für β und γ in 7) erhält man:

$$8) \qquad E_a = \mu \frac{b^2 \cot B_1 + c^2 \cot C_1}{8R^2}.$$

Dieser Ausdruck ist insofern allgemein, als er auch den Fall in sich schliesst, in welchem der Pol in einer Dreieckseite, z. B. in AB (Fig. 45), liegt, denn dann ist $C_1 = 90^\circ$, folglich geht 8) über in

$$E_a = \mu \frac{b^2 \cot B_1}{8R^2},$$

worin die Seite rechts den Excess des rechtwinkligen Poldreiecks APE Fig. 45 bedeutet, was bekanntlich in diesem Falle das betreffende Polviereck vertritt.

In der Gleichung 8) kann man noch die Cotangenten der Sehnenwinkel mit den Cotangenten der zugehörenden sphärischen Winkel vertauschen. Denn nach dem Taylor'schen Satze ist z. B.

$$\cot B_1 = \cot (B - E_b) = \cot B + \frac{E_b}{\sin^2 B} + \frac{E_b^2 \cos B}{\sin^3 B} + \ldots.$$

folglich mit dem bisher innegehaltenen Genauigkeitsgrade:

$$\frac{b^2}{R^2} \cot B_1 = \frac{b^2}{R^2} \cot B$$

und ebenso

$$\frac{c^2}{R^2} \cot C_1 = \frac{c^2}{R^2} \cot C.$$

Daher geht 8) über in:

$$E_a = \mu \frac{b^2 \cot B + c^2 \cot C}{8R^2}.$$

Dass für E_b und E_c sich analoge Werthe finden lassen, ist für sich klar und man hat daher folgende drei Gleichungen

$$\text{IV.} \quad \begin{cases} E_a = \mu \dfrac{b^2 \cot B + c^2 \cot C}{8R^2}, \\ E_b = \mu \dfrac{c^2 \cot C + a^2 \cot A}{8R^2}, \\ E_c = \mu \dfrac{a^2 \cot A + b^2 \cot B}{8R^2}, \end{cases}$$

welche die Excessantheile der einzelnen Winkel mit einer Genauigkeit geben, bei welcher erst Grössen Vernachlässigung finden, die in Bezug auf die Dreieckseiten von der 4ten Dimension sind.

Diese Formeln sind es, welche Faber, in Folge des Auftrages, den Derselbe von dem Leiter der österreichischen Messungen, General Fallon, erhielt, zur Reduction eines geodätischen Dreiecks auf sein Sehnendreieck auffand und die bisher bei den ebenerwähnten Messungen mit grossem Vortheile angewendet wurden.

Sie bestimmen die Excessantheile aus den Seiten und Winkeln des geodätischen Dreiecks, sie können aber auch noch so umgewandelt werden, dass sie die fraglichen Grössen mit Hilfe der betreffenden Bestandtheile des Sehnendreiecks geben.

Bezeichnen a_1, b_1, c_1 die den sphärischen Dreieckseiten a, b, c entsprechenden Sehnen, so ist bekanntlich

$$2R \sin\left(\frac{1}{2}\,\frac{a}{R}\right) = a_1, \text{ oder}$$

$$\sin\frac{a}{2R} = \frac{a_1}{2R},$$

also

$$\frac{a}{2R} = Arc \sin\frac{a_1}{2R},$$

und nach der betreffenden Reihe:

$$\frac{a}{2R} = \frac{a_1}{2R} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{a_1}{2R}\right)^3}{3} + \ldots$$

oder

$$\frac{a}{R} = \frac{a_1}{R} + \frac{a_1^3}{24R^2} + \ldots.$$

Quadrirt man und vernachlässiget dabei alle Glieder von der 4ten Ordnung an, so hat man

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{R}\right)^2 \text{ und analog}$$

$$\left(\frac{b}{R}\right)^2 = \left(\frac{b_1}{R}\right)^2,$$

welche Werthe in die Gleichung 8) eingeführt geben:

$$9)\quad \begin{cases} E_a = \mu\,\dfrac{b_1^2 \cot B_1 + c_1^2 \cot C_1}{8R^2}; \text{ entsprechend erhält man:} \\ E_b = \mu\,\dfrac{c_1^2 \cot C_1 + a_1^2 \cot A_1}{8R^2}, \\ E_c = \mu\,\dfrac{a_1^2 \cot A_1 + b_1^2 \cot B_1}{8R^2}. \end{cases}$$

Aus der Vergleichung dieser Ausdrücke mit denen unter IV. lässt sich sofort schliessen, dass man die Excessantheile immer mit demselben Genauigkeitsgrade erhält, man mag die Seiten und Winkel des geodätischen oder die des entsprechenden Sehnendreiecks zur Berechnung desselben benutzen. Daher wird es auch gestattet sein, mit Hilfe der einen gegebenen Seite des Sehnendreiecks und der auf 180° ausgeglichenen sphärischen Winkel die beiden andern in die Rechnung einzuführenden Seiten annäherungs-

weise zu bestimmen, ohne deshalb an dem oben angegebenen Genauigkeitsgrade zu verlieren.

Addirt man die Gleichungen 9), so findet sich der gesammte Excess zu:

$$10) \qquad E'' = \mu'' \frac{a_1^2 \cot A_1 + b_1^2 \cot B_1 + c_1^2 \cot C_1}{4R^2}.$$

Darin bedeuten aber, wie leicht zu ersehen,

$$\frac{a_1^2 \cot A_1}{4}, \quad \frac{b_1^2 \cot B_1}{4} \text{ und } \frac{c_1^2 \cot C_1}{4}$$

respective die Flächeninhalte der Dreiecke BP_1C, AP_1C und AP_1B (Fig. 44, 45 und 46), daher ist

$$\frac{a_1^2 \cot A_1 + b_1^2 \cot B_1 + c_1^2 \cot C_1}{4} = F_1$$

der Flächeninhalt des ganzen Sehnendreiecks. Nach Einführung desselben in Gleichung 10) ergiebt sich:

$$11) \qquad E = \mu \cdot \frac{F_1}{R^2},$$

woraus im Hinblick auf 2) folgt, dass man zur Berechnung des sphärischen Excesses E des ganzen Dreiecks, anstatt des Flächeninhaltes des wenig gekrümmten sphärischen Dreiecks, den des zugehörenden Sehnendreiecks substituiren kann, wobei erst Glieder, die in Bezug auf die Seiten des Dreiecks von der 4ten Ordnung sind, vernachlässiget werden.

Die Grunert'schen Reductionsformeln.

Um nun auch zu den im Eingange erwähnten Formeln des Herrn Prof. Grunert zu gelangen, schreibe man die Gleichung 9) folgendermaassen:

$$E_a = \mu \cdot \frac{b_1 \cdot \frac{b_1}{\sin B_1} \cdot \cos B_1 + c_1 \frac{c_1}{\sin C_1} \cos C_1}{8R^2},$$

und berücksichtige, dass wegen der Gleichheit der Faktoren

$$\frac{b_1}{\sin B_1} \text{ und } \frac{c_1}{\sin C_1}$$

dieselben vertauscht werden können. Es ist dann, wenn man gleichzeitig $b_1 c_1$ als Faktoren zieht und die dadurch entstehende Parenthese auf gleiche Benennung bringt:

$$E_a = \mu \cdot \frac{b_1 c_1}{8R^2} \cdot \frac{\cos B_1 \sin B_1 + \cos C_1 \sin C_1}{\sin B_1 \sin C_1}$$

$$= \mu \cdot \frac{b_1 c_1}{8R^2} \cdot \frac{\sin 2B_1 + \sin 2C_1}{2 \sin B_1 \sin C_1}.$$

Weil nun aber bekanntlich

$$\sin 2B_1 + \sin 2C_1 = 2 \sin (B_1 + C_1) \cos (B_1 - C_1)$$

$$= 2 \sin A_1 \cos (B_1 - C_1)$$

ist, so geht diese Gleichung über in:

$$E_a = \mu \cdot \frac{b_1 c_1 \sin A_1 \cos (B_1 - C_1)}{8 R^2 \sin B_1 \sin C_1},$$

oder, da man nach 11) mit demselben Genauigkeitsgrade

$$\mu \frac{b_1 c_1 \sin A_1}{2 R^2} = \mu \frac{F_1}{R^2} = E$$

setzen kann,

$$E_a = \frac{\cos (B_1 - C_1)}{4 \sin B_1 \sin C_1} . E = \frac{1 + \cot B_1 \cot C_1}{4} . E.$$

Mit Hilfe des Taylor'schen Satzes ist aber

$$\cot B_1 . \cot C_1 = \left(\cot B + \frac{E_b}{\sin^2 B} + \dots\right)\left(\cot C + \frac{E_c}{\sin^2 C} + \dots\right)$$

$$= \cot B . \cot C + \frac{E_b \cot C}{\sin^2 B} + \frac{E_c \cot B}{\sin^2 C} + \dots.$$

Wir erhalten daher mit einer Genauigkeit, bei der erst Grössen, die in Bezug auf die Dreieckseiten von der vierten Ordnung sind, vernachlässiget werden, unter gleichzeitiger Beifügung der für E_b und E_c auf ähnliche Weise sich ergebenden Ausdrücke:

$$\text{V.} \begin{cases} E_a = \dfrac{1 + \cot B \cot C}{4} . E = \dfrac{\cos (B - C)}{4 \sin B \sin C} . E \\ E_b = \dfrac{1 + \cot C \cot A}{4} . E = \dfrac{\cos (C - A)}{4 \sin C \sin A} . E \\ E_c = \dfrac{1 + \cot A \cot B}{4} . E = \dfrac{\cos (A - B)}{4 \sin A \sin B} . E. \end{cases}$$

Diese eleganten Reductionsformeln sind von dem Herrn Prof. Grunert bei Gelegenheit der Entwickelung seines dem Legendre'schen Theoreme analogen Satzes an dem im Eingange angegebenen Orte gefunden, von demselben aber nicht so hervorgehoben worden, als sie es eigentlich verdienen. Wahrscheinlich hat er dabei mehr das noch elegantere Endresultat seiner Untersuchung ins Auge gefasst und dadurch alle sonstigen Reductionsformeln für überflüssig erachtet. Dass letztere aber durch dieses nicht in allen Fällen vertreten werden können, davon wird man sich überzeugen, nachdem der mehrerwähnte Satz selbst noch abgeleitet sein wird.

Ehe wir jedoch zu demselben übergehen, sei noch bemerkt, dass oben die Grunert'schen Reductionsformeln (V.) aus den Faber'schen (IV.) abgeleitet wurden, weil, nachdem einmal letztere aufgestellt waren, von diesen am bequemsten zu den ersteren zu gelangen war. Diesen Umweg wird man jedoch nicht einschlagen, wenn es sich um alleinige Aufstellung der Formeln V. handelt, indem man selbige auch direkt mit Hilfe des Excesses des Polvierecks herleiten kann. Um diese Entwickelungsweise noch kurz anzudeuten, gehen wir wieder von dem Excesse des rechtwinkligen Dreiecks aus, indem wir denselben durch die Hypothenuse und den einen anliegenden Winkel zu bestimmen suchen. Unter der bekannten Bezeichnung der Seiten und Winkel des in C rechtwinkligen Dreiecks ist

$$E = A + B - 90^0,$$

folglich

$$A - E = 90^0 - B$$

und daher

$$tan\,(A - E) = cot\,B.$$

Weil nun aber im rechtwinkligen Dreiecke

$$cot\,B = cos\,c\,tan\,A$$

ist, so geht dieser Ausdruck über in

$$12) \qquad tan\,(A - E) = cos\,c\,.\,tan\,A.$$

ne weiter [illegible] lie Discussion dieser Gleichung wegen der Bestimmung E für die [illegible]lnen Fälle einzugehen, wenden wir diesen Ausdruck so- [illegible] auf ein [illegible]isches Dreieck an, in welchem $A - E$ immer ein positi- ver spitzer [illegible] ist. Mit dem früher innegehaltenen Genauigkeitsgrade ist dann nach d[illegible]

[illegible] $\frac{E}{cos^2 A}$

[illegible] so kann [illegible]

[illegible]lich durch S[illegible] Gleichung 12):

$$tan\,A - [illegible] \frac{c^2}{2}\,tan\,A,$$

oder

$$E = \frac{c^2}{4}\,sin\,2A,$$

und, da hier E die Bogenlänge für den Radius 1 bedeutet:

$$13) \qquad E'' = \mu''\,.\,\frac{c^2}{4}\,sin\,2A.$$

Diesen Ausdruck auf die Bestimmung des Excesses des von A eingeschlossenen Polvierecks (Fig. 44 und 46) angewendet, indem darin die sphärischen Entfernungen $AP = BP = CP = \frac{r}{R}$ gesetzt werden, giebt:

$$14) \quad \begin{cases} E_a = \frac{\mu\,.\,r^2}{4R^2}\,(sin\,2B_1 + sin\,2C_1) \text{ und entsprechend:} \\ E_b = \frac{\mu\,.\,r^2}{4R^2}\,(sin\,2C_1 + sin\,2A_1), \\ E_c = \frac{\mu\,.\,r^2}{4R^2}\,(sin\,2A_1 + sin\,2B_1). \end{cases}$$

Durch Summirung dieser drei Werthe erhält man den Excess des ganzen Dreiecks:

$$E = \frac{\mu r^2}{2R^2}\,(sin\,2A_1 + sin\,2B_1 + sin\,2C_1),$$

mithin, in Verbindung desselben mit 14)

$$E_a = \frac{sin\,2B_1 + sin\,2C_1}{2\,(sin\,2A_1 + sin\,2B_1 + sin\,2C_1)}\,.\,E.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\sin 2B_1 + \sin 2C_1 = 2\sin(B_1 + C_1)\cos(B_1 - C_1) = 2\sin A_1 \cos(B_1 - C_1)$$

und, wegen $2A_1 + 2B_1 + 2C_1 = 360^0$, wie man leicht findet:

$$\sin 2A_1 + \sin 2B_1 + \sin 2C_1 = 4\sin A_1 \sin B_1 \sin C_1,$$

folglich

$$E_a = \frac{\cos(B_1 - C_1)}{4\sin B_1 \sin C_1} \cdot E = \frac{1 + \cot B_1 \cot C_1}{4} \cdot E,$$

wovon man nun in gleicher Weise wie früher übergeht zu

$$E_a = \frac{1 + \cot B \cot C}{4} \cdot E,$$

Der dem Legendre'schen Theoreme analoge Satz von Grunert.

Im Sehnendreieck ist:

$$15)\qquad \frac{a_1}{b_1} = \frac{\sin A_1}{\sin B_1} = \frac{\sin(A - E_a)}{\sin(B - E_b)}$$

und nach V.:

$$E_a = \frac{E}{4} + \frac{E}{4}\cot B \cot C,$$

worin das zweite Glied rechts unter der früheren Voraussetzung eines geodätischen Dreiecks ebenfalls eine verhältnissmässig nur kleine Grösse ist, selbst wenn B und C sehr spitze Winkel sind*). Also ist

$$\sin(A - E_a) = \sin\left\{\left(A - \frac{E}{4}\right) - \frac{E}{4}\cot B \cot C\right\}$$

$$= \sin\left(A - \frac{E}{4}\right) - \frac{E}{4}\cot B \cot C \cos\left(A - \frac{E}{4}\right)$$

$$= \sin\left(A - \frac{E}{4}\right) \cdot \left\{1 - \frac{E}{4}\cot B \cot C \cot\left(A - \frac{E}{4}\right)\right\},$$

und da man hierin, ohne denselben Genauigkeitsgrad zu beeinträchtigen, wie man leicht einsieht,

$$\cot\left(A - \frac{E}{4}\right) \text{ mit } \cot A$$

vertauschen kann,

$$\sin(A - E_a) = \sin\left(A - \frac{E}{4}\right)\left\{1 - \frac{E}{4}\cot A \cot B \cot C\right\}.$$

Analog findet sich

$$\sin(B - E_b) = \sin\left(B - \frac{E}{4}\right)\left\{1 - \frac{E}{4}\cot A \cot B \cot C\right\}$$

---

*) In einem Dreiecke, wie es wohl nie bei einer irdischen Messung vorkommen kann, seien B und C übertrieben klein, nämlich $= 57\frac{1}{4}'$, also $\cot B = \cot C = 60$, und BC etwa $= 43$ Meilen; dann ist der Excess E desselben $= 1''$ mithin $\frac{E}{4}\cot B \cot C = 900'' = 15'$.

und nach Einführung dieser beiden Werthe in die Proportion 15):

$$16)\qquad \frac{a_1}{b_1}=\frac{\sin\left(A-\frac{E}{4}\right)}{\sin\left(B-\frac{E}{4}\right)},$$

mit einem Genauigkeitsgrade, bei dem erst Grössen von der 4ten Ordnung an vernachlässiget sind.

Hierbei sind offenbar die Seiten a_1 und b_1 als einem Dreiecke angehörend zu betrachten, worin die diesen Seiten entsprechenden Gegenwinkel durch $A-\frac{E}{4}$ und $B-\frac{E}{4}$ vertreten sind. Findet sich nun durch eine der obigen ähnliche Bettrachtung

$$17)\qquad \frac{a_1}{c_1}=\frac{\sin\left(A-\frac{E}{4}\right)}{\sin\left(C-\frac{E}{4}\right)},$$

so liegen a_1 und c_1 ebenfalls in einem Dreiecke mit den zu denselben gehörenden Gegenwinkeln $A-\frac{E}{4}$ und $C-\frac{E}{4}$. Da nun die Summe der drei Winkel

$$\left(A-\frac{E}{4}\right)+\left(B-\frac{E}{4}\right)+\left(C-\frac{E}{4}\right)=A+B+C-\tfrac{3}{4}E$$

keineswegs 180° giebt, so können auch beide Dreiecke nicht als identisch und am allerwenigsten das eine oder das andere als das fragliche Sehnendreieck betrachtet werden, weil im letzteren Falle doch auch

$$\tfrac{1}{4}E=\frac{1+\cot B\cot C}{4}E=\frac{1+\cot A\cot B}{4}E$$

sein müsste, was nur stattfinden kann, wenn

$$B=90^\circ \text{ ist.}$$

Setzt man nun die Seite a_1 als bekannt voraus, so finden sich aus 16) und 17) die beiden andern Seiten:

$$\text{VI.}\quad\begin{cases} b_1=a_1\dfrac{\sin\left(B-\frac{E}{4}\right)}{\sin\left(A-\frac{E}{4}\right)},\\[2ex] c_1=a_1\dfrac{\sin\left(C-\frac{E}{4}\right)}{\sin\left(A-\frac{E}{4}\right)}.\end{cases}$$

Diess giebt folgenden wichtigen Satz:

Ist die eine Seite des zu einem wenig gekrümmten Kugeldreiecke gehörenden Sehnendreiecks gegeben, so findet man die beiden anderen Seiten desselben unter Anwendung des Sinussatzes der ebenen Trigonometrie, wenn jede der gesuch-

ten Seiten mit der gegebenen als einem Dreiecke angehörend betrachtet werden, worin die Gegenwinkel dadurch gebildet sind, dass jeder entsprechende sphärische Winkel um ein Viertheil des sphärischen Excesses vermindert worden ist.

Dieser von Herrn Prof. Grunert in dem 25. Theile seines Archivs S. 209 zuerst aufgestellte Satz ist jedoch daselbst in einer Weise ausgesprochen, wodurch man zu der Meinung gelangen kann, als bekomme man die Winkel des Sehnendreiecks einfach durch Verminderung der sphärischen Winkel um ein Viertheil des sphärischen Excesses. Wohl macht der Herr Verfasser schliesslich darauf aufmerksam, dass die Summe der drei so erhaltenen Winkel nicht genau 180° giebt, scheint aber die dabei stattfindende Differenz von $\frac{1}{4}E$ als bedingt durch die Vernachlässigungen bei der Entwickelung zu halten. Dieser Auffassung kann ich mich aber um so weniger anschliessen, als, wenn nach der Entwickelung

$$\frac{\sin(A-\frac{1}{4}E)}{\sin(B-\frac{1}{4}E)}=\frac{\sin\left(A-\frac{1+\cot B\cot C}{4}E\right)}{\sin\left(B-\frac{1+\cot C\cot A}{4}E\right)}$$

mit einem gewissen Genauigkeitsgrade ist, daraus noch nicht folgt, dass auch

$$A-\tfrac{1}{4}E=A-\frac{1+\cot B\cot C}{4}E$$

und

$$B-\tfrac{1}{4}E=B-\frac{1+\cot C\cot A}{4}E$$

mit demselben Genauigkeitsgrade stattfindet, sondern es werden eben nur anstatt der Sehnenwinkel

$$A-\frac{1+\cot B\cot C}{4}E \text{ und } B-\frac{1+\cot C\cot A}{4}E$$

andere Winkel

$$A-\tfrac{1}{4}E \text{ und } B-\tfrac{1}{4}E$$

substituirt, deren Sinusverhältniss mit dem Sinusverhältniss der erstern bis auf denselben Genauigkeitsgrad identisch ist.

Daher halte ich die oben angegebene Fassung dieses Satzes für die richtigere, wodurch auch die Analogie desselben mit dem Legendre'schen Theoreme keineswegs gestört wird. Der Unterschied ist nur, dass man zur Berechnung der zwei Seiten des Sehnendreiecks aus der einen gegebenen zwei andere Dreiecke statt des Sehnendreiecks substituirt, während beim Legendre'schen Theoreme ein und dasselbe ebene Dreieck die drei Seiten des sphärischen Dreiecks enthält.

Gestaltet sich nun auch die Berechnung der Seiten des Sehnendreiecks nach dem eleganten Satze VI. ausserordentlich bequem, so wird man doch in solchen Fällen nicht Gebrauch davon machen können, in denen es sich nicht allein um die Seiten des Sehnendreiecks, sondern auch um die Winkel desselben handelt. Ich erinnere nur an die anderweiten Berechnungen des Dreiecksnetzes, die z. B. durch die Verbindnng der Dreiecke zweiter Ordnung mit denen der ersten Ordnung, durch die Coordinatenbestimmung etc. bedingt werden. Dann wird man allerdings die Reduction

der sphärischen Winkel auf ihre Sehnenwinkel mit Hilfe der Formeln IV. oder V. vorzunehmen haben.

Was nun den Vorzug der einen vor der anderen derselben anlangt, so ist zu bemerken, dass man zwar nach den Faber'schen Formeln (IV.) eine vorhergehende Berechnung des Excesses nicht nothwendig hat, weil man denselben später durch Addition der gefundenen Excessantheile erhalten kann. Jedoch wird man nie unterlassen, den Excess zur Prüfung der Richtigkeit der gefundenen drei Excessantheile zu ermitteln*), und dann erscheint die Anwendung der Faber'schen Formeln (IV.) wegen der vorläufigen Bestimmung zweier Dreieckseiten etwas umständlicher als die der Grunert'schen (V).

Rechnungsbeispiel.

Zur besseren Vergleichung folge hier ein Beispiel, welches aus dem in den Jahren 1828 und 1829 durch Herrn Riedl v. Leuenstern ausgeführten Netze an der Grenze zwischen Oesterreich und Preussen zur Verbindung der österreichischen mit den preussischen Messungen entnommen ist, und das sich unter anderen in dem im Eingange gedachten Nachtrage v. Leuenstern's vorfand.

Die gegebene Seite ist (Fig. 47):

$$a_1 = 51766{,}347 \text{ Wiener Klaftern.}$$

Die beobachteten, also mit den Beobachtungsfehlern noch behafteten**), Winkel sind:

$$\begin{aligned} A &= 141^\circ\ 13'\ 52''8, \\ B &= 24^\circ\ 19'\ 23''0, \\ C &= 14^\circ\ 26'\ 48''9, \\ \hline A+B+C &= 180^\circ\ 0'\ 4''7, \end{aligned}$$

mithin der Excess incl. der Beobachtungsfehler

$$E + \Sigma(v) = 4''7.$$

Für beide Reductionsmethoden würde zunächst E aus der gegebenen Seite und den auf 180° ausgeglichenen Winkeln nach der bekannten Formel

$$E = \mu \frac{a_1^2 \sin B \sin C}{2 R^2 \sin A}$$

zu berechnen sein. Die auf 180° ausgeglichenen und bis auf Secunden abgerundeten Winkel sind

$$\begin{aligned} A &= 141^\circ\ 13'\ 51'' \\ B &= 24^\circ\ 19'\ 22'' \\ C &= 14^\circ\ 26'\ 47'' \\ \hline A+B+C &= 180^\circ\ 0'\ 0''. \end{aligned}$$

Zur Rechnung wird für R der Krümmungshalbmesser der Erde für 45° geograph. Breite genommen, nämlich

$$R = 3366860 \text{ Wiener Klaftern;}$$

---

*) In der That scheint man auch diese Proberechnung in Oesterreich angewendet zu haben.

**) Da im Originalbeispiele die bereits ausgeglichenen sphärischen Winkel enthalten waren, so sind hier die Beobachtungsfehler fingirt.

diese selbst aber mit 5stelligen Logarithmen geführt, indem letztere für die grössten Dreiecke ausreichen.

Es ist nun

$$\begin{aligned}
\log \frac{\mu}{2} &= 5,01340 \\
\log R^2 &= 13,05187 \\
\hline
\log \frac{\mu}{2R^2} &= 0,96153 - 9 \\
\log a_1^2 &= 9,42810 \\
\log \sin B &= 0,61477 - 1 \\
\log \sin C &= 0,39703 - 1 \\
-\log \sin A &= -0,79670 + 1 \\
\hline
\log E &= 0,60473 \\
E &= 4,024,
\end{aligned}$$

mithin

$$\Sigma(v) = 4,7 - 4,024 = 0,676.$$

Jeder der beobachteten Winkel ist nun um $\frac{\Sigma(v)}{3} = 0,225$ zu vermindern (wenn eine andere Bestimmung hierüber nicht besteht), um die sphärischen Winkel zu erhalten. Diess giebt bis auf 2 Decimalen genau

$$\begin{aligned}
A &= 141^\circ\ 13'\ 52'',58 \\
B &= 24^\circ\ 19'\ 22'',77 \\
C &= 14^\circ\ 26'\ 48'',67 \\
\hline
A + B + C &= 180^\circ\ 0'\ 4'',02
\end{aligned}$$

Reduction nach Faber.

Setzt man in IV.

$$\mu \cdot \frac{a^2 \cot A}{8R^2} = \alpha, \qquad \mu \frac{b^2 \cot B}{8R^2} = \beta, \qquad \mu \frac{c^2 \cot C}{8R^2} = \gamma$$

so ist

$$E_a = \beta + \gamma, \qquad E_b = \gamma + \alpha, \qquad E_c = \alpha + \beta.$$

Die Rechnung selbst steht nun folgendermaassen:

$$\begin{aligned}
\log a &= 4,714047 \\
\log \sin A &= 0,796702 - 1 \\
\hline
\end{aligned}$$

$\log \frac{\mu}{2R^2} = 0,96153 - 9$	$\log \frac{a}{\sin A} = 4,917345$	$\log \frac{a}{\sin A} = 4,917345$
$\log 4 = 0,60206$	$\log \sin B = 0,614767 - 1$	$\log \sin C = 0,397035 - 1$
$\log \frac{\mu}{8R^2} = 0,35947 - 9$	$\log b = 4,541112$	$\log c = 4,314370$
$\log a^2 = 9,42810$	$\log b^2 = 9,08222$	$\log c^2 = 8,62874$
$\log \cot A = 0,09522$	$\log \cot B = 0,34486$	$\log \cot C = 0,58901$
$\log \frac{\mu}{8R^2} = 0,35947 - 9$	$\log \frac{\mu}{8R^2} = 0,35947 - 9$	$\log \frac{\mu}{8R^2} = 0,35947 - 9$
$\log \alpha = 0,88279 - 9$	$\log \beta = 0,76655$	$\log \gamma = 0,57722$
$\alpha = -7,635$	$\beta = 5,869$	$\gamma = 3,778$

Demnach:

$$E_a = \beta + \gamma = \quad 9{,}647$$
$$E_b = \gamma + \alpha = -3{,}857$$
$$E_c = \alpha + \beta = -1{,}766$$
$$E = E_a + E_b + E_c = \quad 4'',024 \text{ wie oben.}$$

Reduction nach Grunert (V.).

Nach den Formeln V. ist

$$E_a = \frac{E}{4} + \frac{E}{4} \cot B \cot C;\quad E_b = \frac{E}{4} + \frac{E}{4} \cot C \cot A;\quad E_c = \frac{E}{4} + \frac{E}{4} \cot A \cot B$$

daher die Rechnung wie folgt zu führen:

$$\log E = 0{,}60473$$
$$\log 4 = 0{,}60206$$

$\log \frac{E}{4} = 0{,}00267$	$\log \frac{E}{4} = 0{,}00267$	$\log \frac{E}{4} = 0{,}00267$
$\log \cot B = 0{,}34486$	$\log \cot C = 0{,}58901$	$\log \cot A = 0{,}09522$
$\log \cot C = 0{,}58901$	$\log \cot A = 0{,}09522$	$\log \cot B = 0{,}34486$
$\log \frac{E}{4} \cot B \cot C = 0{,}93654$	$\log \frac{E}{4} \cot C \cot A = 0{,}68690$	$\log \frac{E}{4} \cot A \cot B = 0{,}44275$
$\frac{E}{4} \cot B \cot C = 8{,}641$	$\frac{E}{4} \cot C \cot A = -4{,}863$	$\frac{E}{4} \cot A \cot B = -2{,}772$
$\frac{E}{4} = 1{,}006$	$\frac{E}{4} = 1{,}006$	$\frac{E}{4} = 1{,}006$
$E_a = 9{,}647$	$E_b = -3{,}857$	$E_c = -1{,}766$

$$E = E_a + E_b + E_c = 4'',024;$$

also in vollständiger Uebereinstimmung mit den nach den Faber'schen Formeln erhaltenen Resultaten.

Nach beiden Rechnungsmethoden ergeben sich daher die Sehnenwinkel:

$$A_1 = 141^\circ\ 13'\ (52'',58 - 9'',65) = 141^\circ\ 13'\ 42'',93$$
$$B_1 = \ 24^\circ\ 19'\ (22'',77 + 3'',86) = \ 24^\circ\ 19'\ 26'',63$$
$$C_1 = \ 14^\circ\ 26'\ (48'',67 + 1'',77) = \ 14^\circ\ 26'\ 50'',44$$
$$A_1 + B_1 + C_1 = 180^\circ\ 0'\ 0'',00.$$

Vergleicht man dieselben mit:

$$A - \frac{E}{4} = 141^\circ\ 13'\ 51'',57,$$
$$B - \frac{E}{4} = \ 24^\circ\ 19'\ 21'',76,$$
$$C - \frac{E}{4} = \ 14^\circ\ 26'\ 47'',66,$$
$$A + B + C - \tfrac{3}{4} E = 180^\circ\ 0'\ 0'',99,$$

so zeigt sich recht augenfällig, wie man die nach Satz VI. gebildeten Winkel keineswegs als die Winkel des Sehnendreiecks ansehen darf.

Vergleichsweise mögen noch die Rechnungen für die Seiten b_1 und c_1

das eine Mal unter Anwendung der wahren Winkel des Sehnendreiecks, das andere Mal nach dem Grunert'schen Satze VI. folgen.

Berechnung unter Anwendung der wahren Sehnenwinkel.

$$\log a_1 = 4,7140475$$
$$\log \sin A_1 = 0,7967234 - 1$$

$$\log \frac{a_1}{\sin A_1} = 4,9173241 \qquad \log \frac{a_1}{\sin A_1} = 4,9173241$$
$$\log \sin B_1 = 0,6147887 - 1 \qquad \log \sin C_1 = 0,3970533 - 1$$
$$\log b_1 = 4,5321128 \qquad \log c_1 = 4,3143774$$
$$b_1 = 34049,663 \qquad c_1 = 20624,214$$

Berechnung nach dem Grunert'schen Satze (VI).

$$\log a_1 = 4,7140475$$
$$\log \sin\left(A - \frac{E}{4}\right) = 0,7967088 - 1$$

$$\log \frac{a_1}{\sin\left(A - \frac{E}{4}\right)} = 4,9173467 \qquad \log \frac{a_1}{\sin\left(A - \frac{E}{4}\right)} = 4,9173467$$
$$\log \sin\left(B - \frac{E}{4}\right) = 0,6147661 - 1 \qquad \log \sin\left(C - \frac{E}{4}\right) = 0,3970307 - 1$$
$$\log b_1 = 4,5321128 \qquad \log c_1 = 4,3143774$$
$$b_1 = 34049,663 \qquad c_1 = 20624,214$$

wie oben.

XVI.

Ueber den vollen Ausfluss des Wassers aus Röhren beim Durchgang durch Verengungen und den bei dem plötzlichen Ueberspringen zu dem grössern Querschnitt stattfindenden Verlust an mechanischer Arbeit.

Von Dr. C. TH. MEYER,

Bergverwalter in Niederwürschnitz bei Stollberg in Sachsen.

In Nr. 9. des Jahrgangs 1855 der österreichischen Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen (Seite 72) ist von einer der geachtetsten Capacitäten des österreichischen Maschinenwesens aus Veranlassung der Erscheinung des Werkes: „Die Experimental-Hydraulik. Von Julius Weisbach, Professor an der Königl. Sächs. Bergakademie. 1855" die Frage aufgeworfen worden, ob es nicht richtiger sei, den bei dem plötzlichen Uebergange des Wassers aus einem kleineren Querschnitt in einen grösseren stattfindenden Arbeits-

verlust, wenn v die Geschwindigkeit in kleineren, v_1 die im grösseren Querschnitt bezeichnet, durch $\frac{v^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma$ statt durch die Formel $\frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma$, welche bisher als richtig angenommen werde, auszudrücken, wenn Q das Wasserquantum, γ das Gewicht einer Cubikeinheit desselben angiebt.

Nr. 13 derselben Zeitschrift enthält eine Entgegnung des Herrn Prof. Weisbach, in welcher sich derselbe auf mehrere Autoritäten und namentlich auf einen Ausspruch Poncelet's beruft, welcher letztere wieder als Beweis ein Memoire von Borda von 1766 anzieht; die Redaction erklärt jedoch diese Entgegnung als nicht befriedigend und fordert Fachmänner auf, sich mit der Lösung der aufgestellten Frage näher zu beschäftigen. —

Ich glaube hoffen zu dürfen, durch die nachstehende Abhandlung einen Beitrag zur Lösung der beregten Streitfrage, sowie zur Erklärung des beim Ueberspringen des Wassers zu einem grösseren Querschnitte stattfindenden Verhaltens zu liefern, wenn ich auch keineswegs behaupten will, alle sich anschliessende Folgerungen vollständig behandelt, alle möglichen Einwürfe bereits im Voraus beantwortet zu haben, zumal meine Verhältnisse die selbstständige Ausführung von Versuchen nicht gestatteten, und ich, insoweit Erfahrungsresultate in Betracht kamen, lediglich auf die vorhandenen beschränkt war.

Betrachten wir vorerst kurz die Ableitung der beiden Formeln $\frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma$ und $\frac{v^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma$.

a) Alle Beweisführungen für die Formel $\frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma$ gehen von dem Stosse vollkommen unelastischer, fester Körper aus (vergl. Weisbach's Experimental-Hydraulik S. 75, Desselben Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik 2. Auflage S. 243, Artikel „Ausfluss" von Demselben in Hülsse's Maschinenencyclopädie S. 495, H. Scheffler's Principien der Hydrostatik und Hydraulik S. 156 und 167 des 1. Bandes etc.); es sind die Gesetze des Stosses unelastischer fester Körper meist ohne weitere, hinreichende Erklärung auf den Stoss des schneller fliessenden Wassers gegen das langsamer sich bewegende des grösseren Querschnitts der Röhre angewendet. — Dass beim Stosse vollkommen unelastischer Körper der Gesammtverlust an Arbeit $\frac{(v - v_1)^2}{2g} G$ beträgt, wenn ein Körper vom Gewichte G mit der Geschwindigkeit v gegen eine unendlich grosse Masse trifft, welche mit der Geschwindigkeit v_1 ausweicht, ist richtig und kann in dieser Beziehung unmittelbar kein Einwurf gegen obige Formel erhoben werden, wenn auch wohl zu beachten ist, dass der Verlust des stossenden Körpers keineswegs $\frac{(v - v_1)^2}{2g} G$, sondern $\frac{v^2 - v_1^2}{2g} G$ beträgt und dass der Gesammtverlust nur dadurch auf den kleineren Werth $\frac{(v - v_1)^2}{2g} G$ herab gezogen wird, dass, wenn sich auch die Geschwindigkeit des gestossenen, unendlich grossen Körpers nicht angebbar ändert, der Gewinn an Arbeit desselben $= \infty . 0$ doch nicht gleich Null zu setzen ist, sondern dem Werthe $\frac{(v - v_1)\, v_1}{g} G$ entspricht. — Dagegen wird man die Beseitigung folgenden

erheblichen Einwurfs verlangen können, ehe die Ableitung obiger Formel als richtig zu betrachten ist. Es kann nämlich noch nicht als bewiesen angesehen werden, dass man die Gesetze des Stosses unelastischer fester Körper ohne Weiteres auf den Stoss des Wassers gegen entgegenstehende Flächen (welche auch von langsamer fliessendem Wasser gebildet werden können) übertragen könne; der Stoss flüssiger Körper ist so sehr von dem fester Körper in seinen Principien verschieden, dass eine derartige Uebertragung meiner Ansicht nach eine sorgfältige und in's Einzelne eingehende Motivirung verlangen würde. Wohin solche gezwungene Uebertragungen führen, geht deutlich daraus hervor, dass man sich genöthigt sieht, das Wasser einmal als vollkommen elastischen, das andere Mal als vollkommen unelastischen Körper zu betrachten; es wird durch dergleichen Inconsequenzen eine nicht zu rechtfertigende Unsicherheit in die Lehre der Mechanik gebracht. Ich will hier nicht weiter darauf eingehen, die Unzuträglichkeit zu zeigen, die Stossgesetze fester Körper auf flüssige übertragen zu wollen; bei jeder Vergleichung kommt man gar bald auf Widersprüche, die theils durch den Mangel an hinreichender Cohäsion des Wassers, theils dadurch bedingt werden, dass der Gewinn des gestossenen Wassers an mechanischer Arbeit $= \frac{(v - v_1)\, v_1}{g}\, Q\gamma$ unbemerkbar verloren gehen soll, theils widersprechen selbst Fälle, in welchen man mit Recht die Formel $\frac{v^2 - v_1^2}{2g}\, Q\gamma$ als richtig erkennt; kurz man gelangt sehr bald zu der Ueberzeugung, dass eine derartige Beweisführung als unzureichend angesehen werden muss. Die von Poncelet angezogene Abhandlung von Borda, welche wahrscheinlich in den *Mém. de l'Acad. de Paris* 1766 enthalten ist, konnte ich leider nicht erlangen, es scheint aber nach dem erwähnten Ausspruch von Poncelet, dass in derselben der Stoss fester Körper ebenfalls zum Anhalten genommen ist, so dass ein als richtig anzuerkennender Beweis für die Formel $\frac{(v - v_1)^2}{2g}\, Q\gamma$ dann ebensowenig in ihr gefunden werden kann.

b) Die 2. Formel $\frac{v^2 - v_1^2}{2g}\, Q\gamma$ gestattet eine sehr einfache Ableitung. Die mechanische Arbeit des Wassers im kleinern Querschnitt der Röhre beträgt $\frac{v^2}{2g} \cdot Q\gamma$, nach dem plötzlichen Uebergange beträgt die vorhandene Arbeit desselben Wasserquantums nur noch $\frac{v_1^2}{2g}\, Q\gamma$; es hat somit ein Arbeitsverlust $= \frac{v^2 - v_1^2}{2g}\, Q\gamma$ stattgefunden.

Betrachtet man die Einfachheit und Klarheit der Ableitung der 2. Formel und dagegen die Gezwungenheit und Unsicherheit des Beweises für die erste Formel, so wird man sich unbedingt geneigt fühlen, die 2. Formel für richtig anzuerkennen, und dürfte es sonach wohl nicht unwichtig und überflüssig erscheinen, näher auf diesen Gegenstand einzugehen, die Richtigkeit der bisher gebrauchten Formel $\frac{(v - v_1)^2}{2g} \cdot Q\gamma$ darzuthun und den Grund zu zeigen, weshalb die 2. Formel unrichtig ist; es ist bei ihrer Ableitung

der Umstand unberücksichtigt gelassen, der die Geschwindigkeit v bedingt und bei dessen Beachtung sie sogleich mit der ersteren Formel zusammenfällt. —

In allen Fällen, bei denen ein Ueberspringen des Wassers aus einem kleineren Querschnitt zu einem grösseren stattfindet, wie z. B. bei dem Ausfluss durch kurze Ansatzröhren, bei dem Uebertritt des Wassers aus einer engeren Röhre in eine weitere oder beim Durchgang des Wassers durch besonders eingesetzte Verengungen in Röhren etc., besitzt dasselbe in dem engern Querschnitt eine grössere Geschwindigkeit, als man nach der disponiblen Druckhöhe unter gehöriger Berücksichtigung der Druckhöhenverluste erwarten sollte, und liegt die Frage sehr nahe, wie es möglich ist, wenn auch nur auf eine gewisse Zeit, dem Wasser eine mechanische Arbeit mitzutheilen, die die aufgewendete zu übersteigen scheint und die in sehr vielen Fällen sogar grösser ist, als die der ganzen vorhandenen Druckhöhe entsprechende Arbeit. Bringt man an das Wasserreservoir R (Fig. 48) die Röhre A an, so wird, nimmt man keine Rücksicht auf die Druckhöhenverluste, das Wasser mit der der Druckhöhe h entsprechenden Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ ausfliessen; stösst man aber an A noch die weitere Röhre B an, so fliesst bekanntlich bei vollem Ausflusse mehr Wasser als durch A allein aus, so dass also die Geschwindigkeit im Rohre A eine grössere als $\sqrt{2gh}$ sein muss; es besitzt sonach das Wasser im Rohre A eine grössere mechanische Arbeit, als der vorhandenen Druckhöhe entspricht. — Soviel mir bekannt, ist bis jetzt noch keine gründliche Erklärung dieser jedenfalls auffälligen Erscheinung gegeben worden, und doch hängt grade das richtige Verständniss des Vorgangs bei plötzlichen Querschnittsveränderungen des Wassers und somit die Ableitung der Formel für den bei solchen stattfindenden Arbeitsverlust eng mit diesem Verhalten zusammen.

Bei der folgenden Betrachtung der bei plötzlichen Querschnittsveränderungen eintretenden Verhältnisse werde ich den bereits angedeuteten Fall zum Anhalten nehmen, dass das Wasser aus einem grossen Wasserreservoir ausströme und dass die Ausflussröhre B vom Querschnitt F_1 durch die engere Röhre A vom Querschnitt F mit dem Wasserbehälter verbunden sei; alle andern Vorkommnisse von plötzlichen Querschnittsveränderungen, als die durch die Contraction der Wasserstrahlen oder durch Verengungen in Röhren, durch Schieber, Klappen u. a. hervorgerufenen, lassen sich sogleich auf vorliegendes Beispiel zurückführen. — Um die Beweisführung nicht unnöthig zu compliciren, habe ich bei Aufstellung der Theorie von allen durch die Reibung des Wassers in den Röhren, durch Contraction etc. herbeigeführten Druckhöhenverlusten abgesehen und angenommen, dass der Ausfluss ohne solche und nur modificirt durch den Verlust an Arbeit, welcher sich bei dem plötzlichen Uebergang aus der grösseren in die kleinere Geschwindigkeit ergiebt, stattfinde. Die Ursache, dass das Wasser in der Röhre A eine grössere als die der vorhandenen Druckhöhe entsprechende Geschwindigkeit besitzt, glaube ich in einer theilweisen Aufhebung des Atmosphärendrucks an der Mündung der Röhre A in die Röhre B suchen zu müssen*); um diese Grösse wird der auf die Oberfläche des Wassers im

*) Dass der Luftdruck als wirkende Ursache anzusehen sei, folgert schon H. Buff (Poggend. Annalen der Physik und Chemie, 1839, 46. Band, Seite 241), und eine ähnliche Erklärung findet sich in Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik *und Meteorologie*.

Reservoir wirkende Atmosphärendruck überwiegend und vermehrt die Druckhöhe h, so dass die Geschwindigkeit v des Wassers in A nicht nur von h, sondern von h + Druckhöhe einer der Aufhebung des Atmosphärendrucks entsprechenden Wassersäule abhängt. Diese Ansicht soll im Folgenden näher begründet und ihre Richtigkeit nachgewiesen werden.

Trifft ein Wasserstrahl mit der Geschwindigkeit v eine ebene, mit der Geschwindigkeit v_1 ausweichende Fläche (s. Fig. 49), so geht das Wasser mit der Geschwindigkeit $v - v_1$ an derselben hin (Weisbach's Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, 2. Auflage, S. 632 u. f.), während es die Geschwindigkeit v_1 mit der gestossenen Fläche gemeinschaftlich besitzt; hierbei übt das Wasser auf die Fläche einen Druck $\frac{v - v_1}{g} Q\gamma$ aus, oder verrichtet eine mechanische Arbeit $\frac{(v - v_1) \cdot v_1}{g} Q\gamma$. Die der Geschwindigkeit $v - v_1$ entsprechende Arbeit $\frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma$ geht verloren, die Arbeit $\frac{v_1}{2g} Q\gamma$ entspricht der Geschwindigkeit v_1, die das Wasser mit der Fläche gemeinsam hat, und man erhält ganz richtig:

$$\frac{(v - v_1) v_1}{g} Q\gamma + \frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma + \frac{v_1^2}{2g} Q\gamma = \frac{v^2}{2g} Q\gamma, \text{ oder}$$

$$\frac{(v - v_1) v_1}{g} Q\gamma + \frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma = \frac{v^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma.$$

Ein ganz ähnliches Verhalten findet nun bei dem plötzlichen Uebergang des Wassers aus einem kleineren in einen grösseren Querschnitt statt. Der aus der Röhre A (Fig. 48) mit der Geschwindigkeit v kommende Wasserstrom trifft das in B befindliche, den Querschnitt F_1 ausfüllende und mit der Geschwindigkeit v_1 fliessende Wasser, stösst also gegen eine mit der Geschwindigkeit v_1 ausweichende Wasserfläche. Die Geschwindigkeit v geht durch diesen Stoss in v_1 über, während sich der Wasserstrahl gleichzeitig mit der Geschwindigkeit $v - v_1$ nach den Seiten ausbreitet und Wasserwirbel bildet. — Die mechanische Arbeit $\frac{v_1^2}{2g} Q\gamma$ behält hiernach das Wasser und gelangt mit solcher zum Ausfluss, die Arbeit $\frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma$ geht durch die Wasserwirbel verloren, die Arbeit $\frac{(v - v_1) v_1}{2g} Q\gamma$ dagegen bringt einen Druck $\frac{(v - v_1)}{g} Q\gamma$ auf die mit der Geschwindigkeit v_1 entweichende Wasserfläche hervor. Dieser Druck wirkt dem Atmosphärendruck auf die Ausmündung entgegen und vermindert denselben in Bezug auf das durch A ausfliessende Wasser, so dass die Geschwindigkeit v desselben nicht blos von der Druckhöhe h, sondern noch von der Druckhöhe einer Wassersäule abhängig wird, welche dem Drucke $\frac{(v - v_1)}{g} Q\gamma$ entspricht. Dem Drucke $\frac{(v - v_1)}{g} Q\gamma$ gegen die Fläche F_1 entspricht aber eine Druckhöhe

$$= \frac{(v - v_1)}{g}\,\frac{F_1 v_1 \gamma}{F_1 \gamma} = \frac{(v - v_1)\,v_1}{g},$$

es wird somit … Geschwindigkeit v von der Druckhöhe $h + \frac{(v - v_1)\,v_1}{g}$ abl… ssen.— Prüfen wir nun, um die Richtigkeit oder Unrich- … tellten Theorie nachzuweisen, ob die Gesammtdruckhöhe $h + \ldots$ auch wirklich im Stande ist, die Geschwindigkeit v_0 gleich v in der Verbindungsröhre A zu erzeugen, ob man v_0 nicht $>$ oder $< v$ erhält. — Die … Druckhöhe $h + \frac{(v - v_1)\,v_1}{g}$ entsprechende Ausflussgeschwindigkeit v_0 ergiebt sich

$$v_0 = \sqrt{2g\left(h \ldots \frac{(v - v_1)\,v_1}{g}\right)}.$$

Es ist aber, um h in v_1 auszud…n

$$h \ldots \frac{v_1^2}{2g},$$

insofern der durch den … he… en Arbeitsverlust $\frac{(v - v_1)^2}{2g}\,Q\gamma$ bedingte Druckhöhenverlust $\frac{(v - \ldots}{}$ … bet…, während $\frac{v_1^2}{2g}$ die der Geschwindigkeit v_1 ent… lglich

$$h = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{\ldots}{2g} = \frac{\ldots{}^2 + v^2 - 2vv_1}{2g}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für h in obige Gleichung, so erhält man:

$$v_0 = \sqrt{2g\left(\frac{2v_1^2 + v^2 - 2vv_1}{2g} + \frac{(v - v_1)\,v_1}{g}\right)} = \sqrt{2v_1^2 + v^2 - 2vv_1 + 2vv_1 - 2v_1^2} = v.$$

Die Geschwindigkeit v in der Verbindungsröhre A ist also wirklich gleich der durch die Druckhöhe $h + \frac{(v - v_1)\,v_1}{g}$ erzeugten Geschwindigkeit, und wird hierdurch die Richtigkeit der zu Grunde gelegten Erklärung des Vorgangs bei dem Ueberspringen des Wassers aus einem kleineren Querschnitt zu einem grösseren hinreichend bestätigt. —

Die Arbeit $\frac{(v - v_1)\,v_1}{g}\,Q\gamma$ des aus A austretenden Wasserstroms wird also verwendet, um erst die Geschwindigkeit v in A zu erzeugen, geht mithin nicht wie die Arbeit $\frac{(v - v_1)^2}{2g}\,Q\gamma$ verloren, und somit folgt, dass nur die Formel $\frac{(v - v_1)^2}{2g}\,Q\gamma$ als Arbeitsverlust bei dem plötzlichen Uebergang des Wassers aus einem kleineren in einen grösseren Querschnitt anzunehmen ist.

Bei Ableitung der oben angegebenen 2. Formel $\frac{v^2 - v_1^2}{2g}\,Q\gamma$ für den Arbeitsverlust bei den in Rede stehenden Querschnittsveränderungen des

Wassers ist, wie bereits früher angedeutet, nicht berücksichtigt, dass ein Theil der Arbeitsdifferenz $\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) Q\gamma$ zur Erzeugung der grössern Geschwindigkeit v in dem Verbindungsrohre A erforderlich ist und verwendet wird, und zieht man die zur Erzeugung der Vergrösserung der Geschwindigkeit v erforderliche Arbeit $\frac{(v - v_1)v_1}{g} Q\gamma$ von $\frac{v^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma$ ab, so findet man wieder den Arbeitsverlust gleich

$$\frac{v^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma - \frac{(v - v_1)v_1}{g} Q\gamma = \frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma.$$

Nach Aufstellung und Begründung der Theorie wollen wir nächst einzelnen speciellen Fällen die wichtigsten sich anschliessenden Folgerungen in Betracht ziehen, theils um einigen leicht zu erhebenden Einwürfen zu begegnen, theils um die Theorie selbst durch das Entlehnen als richtig anerkannter oder anzuerkennender Folgerungen zu befestigen.

1. Der Verlust an mechanischer Arbeit beim plötzlichen Uebergange des Wassers aus einem kleineren zu einem grösseren Querschnitt wird, wie wir gesehen haben, durch die entstehende Seitengeschwindigkeit $v - v_1$ und die durch dieselbe hervorgerufene Wirbelbildung bedingt. Es lässt sich daher voraussetzen, dass dieser Verlust kleiner werden muss, wenn man die Wirbelbildung vermindert, und dass derselbe ganz aufhören wird, wenn man solche ganz verhindert, welcher Fall eintritt, wenn man das Wasser allmählich aus der Geschwindigkeit v in die kleinere v_1 überführt, wie Figur 50 zeigt. Jede Wasserschicht trifft bei dem Uebergange mit einer nur unmerklich verschiedenen Geschwindigkeit die vorhergehende Wasserfläche, wodurch der Arbeitsverlust $\frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma$ aufgehoben wird, während im Gegentheil der die Geschwindigkeit in A bedingende Gegendruck gegen den Atmosphärendruck zu einem Maximum steigt, wie folgende Rechnung ergiebt. Die Arbeit, welche das Wasserquantum Q verrichtet, indem es durch Stoss aus einer Geschwindigkeit x in die Geschwindigkeit $x - dx$ übergeht, ist, der Formel $\frac{(v - v_1)v_1}{g} Q\gamma$ entsprechend, $\frac{x\,dx}{g} Q\gamma$, folglich die gesammte Arbeit beim allmählichen Uebergange aus der Geschwindigkeit v in v_1

$$= \int_{v_1}^{v} \frac{x\,dx}{g} Q\gamma = \frac{v^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma,$$

welcher Arbeit bei der Geschwindigkeit v_1 der Druck $\frac{v^2 - v_1^2}{v_1} \frac{Q\gamma}{2g}$ und eine Druckhöhe $= \frac{v^2 - v_1^2}{2g}$ entspricht.

Da ferner das ganze Arbeitsvermögen, welches das Wasser verliert, indem es aus der Geschwindigkeit v in v_1 übergeht, $\frac{v^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma$ beträgt, eine gleich grosse Arbeit aber zur Vermehrung der Geschwindigkeit in A verwendet wird, so folgt der effective Arbeitsverlust für den Ausfluss

$$= \frac{v^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma - \frac{v^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma = 0.$$

Es bleibt uns nur noch zu zeigen, dass auch für diesen Fall die Geschwindigkeit v in A der um $\frac{v^2 - v_1^2}{2g}$ vergrösserten Druckhöhe entspricht.

Die der Druckhöhe $h + \frac{v^2 - v_1^2}{2g}$ entsprechende Geschwindigkeit v_0 ist

$$v_0 = \sqrt{2g\left(h + \frac{v^2 - v_1^2}{2g}\right)} = \sqrt{2gh + v^2 - v_1^2}.$$

Es ist aber, da ein Arbeitsverlust nicht stattfindet, $h = \frac{v_1^2}{2g}$, folglich wird

$$v_0 = \sqrt{2g\frac{v_1^2}{2g} - v_1^2 + v^2} = v.$$

2. Betrachten wir nun den speciellen Fall, wenn an das Rohr B eine 3. Ansatzröhre C stösst (Fig. 51), welche wieder enger als B ist; auf die beim Uebertritt des Wassers aus B nach C stattfindende Contraction wird natürlich nicht Rücksicht genommen werden. — Die Geschwindigkeit des Wassers in A sei wieder durch v, die in B durch v_1 und die in C durch v_2 bezeichnet. — Der beim Uebertritt des Wassers aus A nach B stattfindende Arbeitsverlust beträgt nach dem Früheren $\frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma$, die mechanische Arbeit dagegen, welche durch den Druck auf die gestossene Wasserfläche ausgeübt wird, $\frac{(v - v_1)\,v_1}{g} Q\gamma$. Diese Arbeit $\frac{(v - v_1)\,v_1}{g} Q\gamma$ wird nun einestheils verwendet, um dem ausfliessenden Wasser die Geschwindigkeit v_2 mitzutheilen, anderntheils um den entgegenstehenden Atmosphärendruck theilweise aufzuheben und dadurch die zur Erzeugung der Geschwindigkeit v in A wirksame Druckhöhe zu vergrössern. — Die Arbeit, welche das Wasser aufnimmt, indem es aus der Geschwindigkeit v_1 in v_2 übergeht, beträgt $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma$, folglich bleibt die zur Vergrösserung der Geschwindigkeit in A mittelbar aufgewendete Arbeit

$$= \frac{(v - v_1)\,v_1}{g} Q\gamma - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma = (2vv_1 - v_1^2 - v_2^2)\frac{Q\gamma}{2g},$$

welche Arbeit einer Druckhöhe $= \frac{2vv_1 - v_1^2 - v_2^2}{2g}$ entspricht, so dass mithin v von der Druckhöhe $h + \frac{2vv_1 - v_1^2 - v_2^2}{2g}$ abhängig ist. — Prüfen wir schliesslich wieder, ob wirklich die der Druckhöhe $h + \frac{2vv_1 - v_1^2 - v_2^2}{2g}$ entsprechende Geschwindigkeit $v_0 =$ der Geschwindigkeit v ist. Es wird

$$v_0 = \sqrt{2g\left(h + \frac{2vv_1 - v_1^2 - v_2^2}{2g}\right)},$$

folglich, da bei dem stattfindenden Arbeitsverlust $\frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma$, $h - \frac{(v - v_1)^2}{2g}$

$= \frac{v_2^2}{2g}$ und somit $h = \frac{v_2^2 + (v - v_1)^2}{2g}$ ist,

$$v_0 = \sqrt{2g\left(\frac{v_2^2 + (v - v_1)^2}{2g} + \frac{2vv_1 - v_1^2 - v_2^2}{2g}\right)} = v.$$

3) Es ist augenscheinlich, dass der volle Ausfluss durch B (Fig. 48), da solcher nach Obigem durch den Druck der Atmosphäre vermittelt wird, aufhören muss, wenn die gleichsam als Kraft übertragendes Medium dienende Luft gar nicht oder in nicht hinreichendem Masse vorhanden ist, d. i. wenn der Ausfluss im luftleeren oder luftverdünnten Raume stattfindet, und es bleibt daher zu ermitteln, wie tief der Atmosphärendruck sinken kann, um noch vollen Ausfluss als möglich erscheinen zu lassen.

Bei plötzlicher Querschnittsveränderung, wie in dem durch Fig. 50 verdeutlichten und schon mehrfach behandelten Falle, ist der auf den Querschnitt F_1 von B wirkende Druck $= \frac{(v - v_1)}{g} Q\gamma$, welchem eine Druckhöhe $= \frac{(v - v_1) v_1}{g}$ entspricht. Derselbe wirkt dem Atmosphärendruck entgegen und vermehrt somit die Druckhöhe für die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre A vom Querschnitt F um $\frac{(v - v_1) v_1}{g}$. Diese Vermehrung an Druckhöhe wird nur so lange stattfinden können, als der Atmosphärendruck selbst noch einem Drucke von der Höhe einer Wassersäule $= \frac{(v - v_1) v_1}{g}$ entspricht, und giebt daher $\frac{(v - v_1) v_1}{g}$ das Minimum an, bis zu welchem eine Verdünnung der Luft stattfinden kann, ohne den vollen Ausfluss zu verhindern.

Es ist nun aber

$$v = \frac{F_1 v_1}{F}, v_1 = \sqrt{2g\left(h - \frac{(v - v_1)^2}{2g}\right)} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{F_1}{F} - 1\right)^2}},$$

folglich wird das Minimum des Atmosphärendrucks gemessen durch die Höhe einer Wassersäule

$$H_0 = \frac{(v - v_1) v_1}{g} = \frac{\left(\frac{F_1}{F} - 1\right) v_1^2}{g} = \frac{2h\left(\frac{F_1}{F} - 1\right)}{1 + \left(\frac{F_1}{F} - 1\right)^2}.$$

Sinkt der Atmosphärendruck unter diese Grenze herab, so wird der volle Ausfluss durch B aufhören müssen, und das Wasser nur durch A mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ voll ausfliessen. Bei Bestimmung dieses Grenzwerthes ist vorausgesetzt, dass, wie auch bereits zu Anfang angegeben, von allen Arbeitsverlusten ausser dem durch die plötzliche Querschnittsveränderung selbst herbeigeführten Verluste abgesehen wird.

sphäris n Winkel auf ihre Sehnenwinkel mit Hilfe der Formeln IV. oder V. vorzunehmen haben.

Was nun den Vorzug der einen vor der anderen derselben anlangt, so ist zu bemerken, dass man zwar nach den Faber'schen Formeln (IV.) eine vorhergehende Berechnung des Excesses nicht nothwendig hat, weil n denselben später durch Addition der gefundenen Excessantheile erhal- kann. Jedoch wird man nie unterlassen, den Excess zur Prüfung der htigkeit der gefundenen drei Excessantheile zu ermitteln*), und dann scheint die Anwendung der Faber'schen Formeln (IV.) wegen der vor- figen Bestimmung zweier Dreieckseiten etwas umständlicher als die der nert'schen (V).

Rechnungsbeispiel.

Zur besseren Vergleichung folge hier ein Beispiel, welches aus dem in den Jahren 1828 und 1829 durch Herrn Riedl v. Leuenstern ausgeführten Netze an der Grenze zwischen Oesterreich und Preussen zur Verbindung der österreichischen mit den preussischen Messungen entnommen ist, und das sich unter anderen in dem im Eingange gedachten Nachtrage v. Leuenstern's vorfand.

Die gegebene Seite ist (Fig. 47):

$$a_1 = 51766{,}347 \text{ Wiener Klaftern.}$$

Die beobachteten, also mit den Beobachtungsfehlern noch behafteten**), Winkel sind:

$$\begin{aligned} A &= 141^\circ\ 13'\ 52''8, \\ B &= 24^\circ\ 19'\ 23''0, \\ C &= 14^\circ\ 26'\ 48''9, \\ \hline A+B+C &= 180^\circ\ 0'\ 4''7, \end{aligned}$$

mithin der Excess incl. der Beobachtungsfehler

$$E + \Sigma(v) = 4''7.$$

Für beide Reductionsmethoden würde zunächst E aus der gegebenen Seite und den auf 180° ausgeglichenen Winkeln nach der bekannten Formel

$$E = \mu \frac{a_1^2 \sin B \sin C}{2 R^2 \sin A}$$

zu berechnen sein. Die auf 180° ausgeglichenen und bis auf Secunden abgerundeten Winkel sind

$$\begin{aligned} A &= 141^\circ\ 13'\ 51'' \\ B &= 24^\circ\ 19'\ 22'' \\ C &= 14^\circ\ 26'\ 47'' \\ \hline A+B+C &= 180^\circ\ 0'\ 0''. \end{aligned}$$

Zur Rechnung wird für R der Krümmungshalbmesser der Erde für 45° geograph. Breite genommen, nämlich

$$R = 3366860 \text{ Wiener Klaftern;}$$

*) In der That scheint man auch diese Proberechnung in Oesterreich angewendet zu haben.

**) Da im Originalbeispiele die bereits ausgeglichenen sphärischen Winkel enthalten waren, so sind hier die Beobachtungsfehler fingirt.

$$\frac{dv}{d\frac{F_1}{F}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\left(\frac{F_1}{F}-1\right)^2}} - \frac{\frac{F_1}{F}\left(\frac{F_1}{F}-1\right)\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{F_1}{F}-1\right)^2\right)^3}}$$

und durch Nullsetzen dieses ersten Differenzialquotienten:

$$\sqrt{\frac{2gh}{1+\left(\frac{F_1}{F}-1\right)^2}} = \frac{\frac{F_1}{F}\left(\frac{F_1}{F}-1\right)\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{F_1}{F}-1\right)^2\right)^3}}$$

und hieraus $\frac{F_1}{F} = 2$.

Beispielsweise ist

$$\text{für } \frac{F_1}{F} = 1\tfrac{1}{2},\ v = \frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{2gh} = 1{,}34\ldots\sqrt{2gh},$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = 2,\ v = \sqrt{2}\sqrt{2gh} = 1{,}414\ldots\sqrt{2gh},$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = 3,\ v = \frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{2gh} = 1{,}34\ldots\sqrt{2gh}.$$

Die im Vorstehenden abgeleitete Folgerung, dass bei Verdünnung der Luft bis zu einer gewissen Grenze der volle Ausfluss aufhören müsse, ist in ihrer Allgemeinheit bestätigt durch die Versuche von Hachette, vergleiche Artikel „Ausfluss“ von Professor Weisbach in Hülsse's Maschinenencyclopädie S. 500, sowie durch die Versuche von H. Buff, siehe Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, Bd. 46, S. 240.

Der volle Ausfluss durch B wird aber nicht nur in dem bisher betrachteten Falle, d. i. beim plötzlichen Uebergang des Wassers aus einer grössern in eine kleinere Geschwindigkeit, unter entsprechender Luftverdünnung aufhören, sondern auch dann, wenn das Wasser allmählich seine Geschwindigkeit verliert, vergl. Fig. 50, und dieses Verhalten müssen wir noch kurz betrachten. — Die die Geschwindigkeit v in A vermehrende Druckhöhe beträgt bei einer allmählichen Querschnittsveränderung, wie wir bereits gesehen haben, $\frac{v^2 - v_1^2}{2g}$, somit wird der Atmosphärendruck nicht unter $H_0 = \frac{v^2 - v_1^2}{2g}$ Wassersäule sinken dürfen, wenn voller Ausfluss durch B erhalten werden soll. Nun ist aber $v = \frac{F_1}{F} v_1$, $v_1 = \sqrt{2gh}$, folglich resultirt das Minimum des Atmosphärendrucks für den vollen Ausfluss $H_0 = \frac{v^2 - v_1^2}{2g} = \left(\left(\frac{F_1}{F}\right)^2 - 1\right) h$ Wassersäule. Diese Formel giebt

$$\text{für } \frac{F_1}{F} = 1 \quad H_0 = 0,$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = \tfrac{5}{4} \quad H_0 = \tfrac{9}{16} h,$$

$$\text{für } \frac{F_1}{F} = \tfrac{3}{2}, \quad H_0 = \tfrac{5}{4} h,$$

$$\text{„} \quad \frac{F_1}{F} = 2, \quad H_0 = 3h,$$

$$\text{„} \quad \frac{F_1}{F} = 3, \quad H_0 = 8h,$$

$$\text{„} \quad \frac{F_1}{F} = 4, \quad H_0 = 15h,$$

etc., und man ersieht hieraus, dass in dem vorliegenden Falle der volle Ausfluss durch B bei eintretender Luftverdünnung weit eher als beim plötzlichen Ueberspringen des Wassers gestört wird.

4) Da der volle Ausfluss durch die Röhre B aufhört, wenn der Atmosphärendruck im Verhältniss zur Druckhöhe im Wasserreservoir zu gering wird, wie in 3) näher betrachtet, so wird dasselbe Verhalten auch eintreten müssen, wenn umgekehrt bei gleichbleibendem Atmosphärendruck die Druckhöhe eine gewisse Grenze überschreitet.

Bei dem in 3) zuerst abgehandelten Falle eines plötzlichen Uebergangs des Wassers aus einer Geschwindigkeit in die andere (Fig. 84) wird der volle Ausfluss durch B aufhören müssen, wenn, bezeichnet man den durch die Höhe einer Wassersäule gemessenen Atmosphärendruck durch H, die zur Vermehrung der Geschwindigkeit in A erforderliche Druckhöhe $\frac{(v - v_1)\, v_1}{g}$ grösser ist als H.

Nun haben wir gefunden

$$\frac{(v - v_1)\, v_1}{g} = \frac{2h\left(\frac{F_1}{F} - 1\right)}{1 + \left(\frac{F_1}{F} - 1\right)^2},$$

folglich wird das Maximum h_n der Druckhöhe, bei welcher voller Ausfluss stattfindet, bestimmt durch die Gleichung

$$H = \frac{2h_n\left(\frac{F_1}{F} - 1\right)}{1 + \left(\frac{F_1}{F} - 1\right)^2},$$

und man erhält

$$h_n = \frac{H\left(1 + \left(\frac{F_1}{F} - 1\right)^2\right)}{2\left(\frac{F_1}{F} - 1\right)}.$$

Diese Function giebt für $\frac{F_1}{F} = 2$ ein Minimum, nämlich $h_n = H$, so dass also bei diesem Querschnittsverhältniss der volle Ausfluss durch B bereits bei einer Druckhöhe aufhört, die dem Atmosphärendruck gleich ist.

Beispielsweise erhält man

$$\text{für } \frac{F_1}{F} = \tfrac{4}{3}, \quad h_n = \tfrac{5}{3} H,$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = \tfrac{3}{2}, \quad h_n = \tfrac{5}{4} H,$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = 2, \quad h_n = H,$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = 3, \quad h_n = \tfrac{5}{4} H,$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = 4, \quad h_n = \tfrac{5}{3} H,$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = 10, \quad h_n = 4\tfrac{5}{9} H,$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = 15, \quad h_n = 7{,}5 \ldots H,$$

Auch dieses Verhalten nimmt in seiner Allgemeinheit H. Buff in dem oben erwähnten Aufsatz, Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, Bd. 46, an, sowie dasselbe bereits von Navier in *Architecture hydraulique par Belidor, avec des notes et additions par M. Navier, Paris* 1819, *T.* I, *P.* 294 einer näheren Betrachtung unterworfen worden ist.

Bei allmählichem Uebergange des Wassers aus dem kleinern in den grössern Quersschnitt (s. Fig. 50) erhalten wir als Maximum der Druckhöhe für den vollen Ausfluss

$$h_n = \frac{H}{\left(\frac{F_1}{F}\right)^2 - 1}.$$

Diese Formel giebt

$$\text{für } \frac{F_1}{F} = \tfrac{5}{4}, \quad h_n = \tfrac{16}{9} H,$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = \tfrac{3}{2}, \quad h_n = \tfrac{4}{5} H,$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = 2, \quad h_n = \tfrac{1}{3} H,$$

$$\text{„ } \frac{F_1}{F} = 3, \quad h_n = \tfrac{1}{8} H, \text{ etc.},$$

so dass also selbst für nicht sehr grosse Druckhöhen der volle Ausfluss durch B bei allmählicher Ueberführung des Wassers unmöglich ist, allerdings unter Nichtbeachtung der Druckhöhenverluste durch die Reibung in den Röhren etc., durch deren Berücksichtigung, wie wir später sehen werden, sich die angeführten Maassverhältnisse nicht unwesentlich ändern.

Nicht ganz unwahrscheinlich dürfte es sein, dass, wenn die Möglichkeit für den vollen Ausfluss ohne Arbeitsverlust nicht mehr geboten ist, der zuerst betrachtete Fall eines plötzlichen Ueberspringens eintritt oder sich herstellen lässt, bis auch das für diesen geltende Maximum der Druckhöhe für den vollen Ausfluss überschritten wird.

5) Bei den gewöhnlichen Ansatzröhren (vergl. Weisbach's Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, 2. Auflage, S. 519 u. f., sowie Desselben Experimental-Hydraulik) bildet der contrahirte Wasserstrahl die Röhre A.

Bei vollkommner Contraction ist der Querschnitt des contrahirten Strahles $= (0{,}8)^2$ des Querschnitts der Ansatzröhre $B = 0{,}64\,F_1$; es berechnet sich somit die Ausflussgeschwindigkeit (vergl. S. 79 der angezogenen Experimental-Hydraulik)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1+\left(\frac{F_1}{F}-1\right)^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\left(\frac{1}{0{,}64}-1\right)^2}} = 0{,}872\sqrt{2gh},$$

für welchen Werth aber Versuche nur $0{,}815\sqrt{2gh}$ ergeben haben, theils weil schon jeder contrahirte Wasserstrahl nicht ganz die theoretische Geschwindigkeit besitzt, theils weil die Reibung an der Röhrenwand einen Verlust an mechanischer Arbeit bedingt. Die Geschwindigkeit in dem contrahirten Querschnitt beträgt hiernach $v = \frac{v_1}{0{,}64} = 1{,}56\,v_1$, d. i. theoretisch $= 1{,}36\sqrt{2gh}$, effectiv $= 1{,}27\sqrt{2gh}$.

Die Druckhöhe, bis zu welcher der Atmosphärendruck sinken kann, ehe der volle Ausfluss aufhören muss, wird nach 3) durch eine Wassersäule gemessen von der Höhe

$$H_0 = \frac{2h\left(\frac{F_1}{F}-1\right)}{1+\left(\frac{F_1}{F}-1\right)^2},$$

man erhält daher für den vorliegenden Fall

$$H_0 = \frac{2h\left(\frac{1}{0{,}64}-1\right)}{1+\left(\frac{1}{0{,}64}-1\right)^2} = 0{,}855h;$$

und umgekehrt wird der volle Ausfluss nach 4) ebenfalls unmöglich werden, wenn die Druckhöhe h im Wasserreservoir die Höhe

$$h_n = \frac{H\left(1+\left(\frac{F_1}{F}-1\right)^2\right)}{2\left(\frac{F_1}{F}-1\right)} = \frac{H\left(1+\left(\frac{1}{0{,}64}-1\right)^2\right)}{2\left(\frac{1}{0{,}64}-1\right)} = 1{,}17\,H$$

überschreitet, d. i. wenn die Druckhöhe h mehr als 40,5 dresdn. Fuss oder 11,47 Meter oder 36,6 preuss. Fuss beträgt.

Da jedoch bei dieser Berechnung die theoretischen Geschwindigkeiten vorausgesetzt sind, so werden sich die erhaltenen Zahlwerthe effectiv etwas anders gestalten, wie auch nachstehende Rechnung zeigt.

Die Formel für das Minimum des Atmosphärendrucks

$$H_0 = \frac{2h\left(\frac{F_1}{F}-1\right)}{1+\left(\frac{F_1}{F}-1\right)^2}$$

geht, nennt man das Verhältniss des effectiven zum theoretischen Geschwindigkeitscoefficienten, d. i. $\frac{0{,}815}{0{,}872} = 0{,}9345 = \varphi$, über in

$$H_0 = \varphi^2 \frac{2h\left(\frac{F_1}{F}-1\right)}{1+\left(\frac{F_1}{F}-1\right)^2},$$

insofern dann

$$v_1 = \varphi \sqrt{\frac{2gh}{1+\left(\frac{F_1}{F}-1\right)^2}}$$

ist, und es ergiebt sich

$$H_0 = 0{,}8733 \times 0{,}8546h = 0{,}746h.$$

Denselben Werth erhält man natürlich, berechnet man H_0 nach der Formel $H_0 = \frac{(v-v_1)\,v_1}{g}$, wenn man für $v = 1{,}27\sqrt{2gh}$, für $v_1 = 0{,}815\sqrt{2gh}$ einführt. — Am einfachsten dürfte es aber sein, folgende Formel in Anwendung zu bringen, die nur von dem Geschwindigkeitscoefficienten $\varphi = 0{,}815$ Gebrauch macht: Es ist

$$H_0 = \frac{\left(\frac{F_1}{F}-1\right)v_1^2}{g}, \text{ aber } v_1 = \varphi\sqrt{2gh},$$

daher

$$H_0 = 2\varphi^2\left(\frac{F_1}{F}-1\right)h;$$

für vorliegenden Fall erhält man

$$H_0 = 2 \,.\, 0{,}815^2\left(\frac{1}{0{,}64}-1\right)h = 0{,}747\,h.$$

Das Maximum der Druckhöhe, bei welcher noch voller Ausfluss stattfindet, h_n, findet man unter Berücksichtigung der effectiven statt der theoretischen Geschwindigkeiten

$$h_n = \frac{H\left(1+\left(\frac{F_1}{F}-1\right)^2\right)}{2\varphi^2\left(\frac{F_1}{F}-1\right)} \text{ oder } h_n = \frac{H}{2\varphi^2\left(\frac{F_1}{F}-1\right)};$$

beide Formeln geben für $\varphi = 0{,}9345$ oder $\varphi = 0{,}815$

$$h_n = 1{,}34\,H = 46{,}4 \text{ dresdn. Fuss} = 13{,}14 \text{ Meter}.$$

Wird bei der Einmündung der Ansatzröhre in das Wasserreservoir ein Diaphragma eingesetzt (vergl. S. 546 der bereits mehrfach angezogenen Ingenieur- und Maschinen-Mechanik von Prof. Weisbach), so werden sich die Formeln für das Minimum des Atmosphärendrucks und das Maximum der Druckhöhe bei gegebenem Atmosphärendruck, um noch vollen Ausfluss zu gestatten, folgend gestalten:

Bezeichnet α den Contractionscoefficienten, F den Querschnitt der Oeffnung des Diaphragmas und F_1, wie bisher, den Querschnitt der Ansatzröhre, so wird der Querschnitt des stossenden Wasserstrahls $= \alpha F$, und es ergiebt sich, nennt man, wie bereits oben angegeben, das Verhältniss des effectiven zum theoretischen Geschwindigkeitscoefficienten (nicht das Ver-

tniss d iven Geschwindigkeit zu der der Druckhöhe entsprechen- Gesch keit, welches eben den Geschwindigkeitscoefficienten φ) $= \varphi$.

$$H_0 = \varphi^2 \cdot \frac{2h\left(\frac{F_1}{\alpha F}-1\right)}{1+\left(\frac{F_1}{\alpha F}-1\right)^2}.$$

α können wir wieder zu 0,64 annehmen (obgleich dieser Werth eigentlich blos für das Verhältniss $\frac{F_1}{F} = 1$ im Mittel bei den gewöhnlichen Dimen- zröhren richtig ist, insofern derselbe bei kleinerem Quer- , müssen wir dagegen zu folgen- ... ent ... unsere ... nem da wir nur den in Weisbach's 6, durch α bezeichneten Werth, ezeichnen wollen, oder den Wi- n:

$$v_1 = \varphi \sqrt{\frac{2gh}{1+\left(\frac{F_1}{\alpha F}-1\right)^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\left(\frac{F_1}{\alpha_1 F}-1\right)^2}},$$

daher

$$\varphi^2 = \frac{1+\left(\frac{F_1}{\alpha F}-1\right)^2}{1+\left(\frac{F_1}{\alpha_1 F}-1\right)^2},$$

oder, führen wir den Widerstandscoefficienten ζ ein,

$$\varphi^2 = \frac{1+\left(\frac{F_1}{\alpha F}-1\right)^2}{1+\zeta}.$$

Für das an der erwähnten Stelle in Weisbach's Mechanik berechnete Beispiel, bei welchem $\frac{F}{F_1} = \frac{9}{16}$ angenommen und daher $\alpha_1 = 0{,}606$ zu setzen ist, erhält man $\varphi^2 = 0{,}8784$, und es folgt dann

$$H_0 = 0{,}8784 \cdot \frac{2\left(\frac{16}{9 \cdot 0{,}64}-1\right)}{1+\left(\frac{16}{9 \cdot 0{,}64}-1\right)^2} h = 0{,}75\,h.$$

Einfacher gelangt man auch in dem vorliegenden Falle zum Ziele, indem man die Berechnung von φ umgeht und die Bestimmung von H_0 durch die Formel $H_0 = 2\varphi^2\left(\frac{F_1}{\alpha F}-1\right)h$ bewirkt. Den Werth für φ findet man aus dem in Weisbach's Mechanik S. 546 angegebenen Widerstandscoefficienten ζ durch $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$ oder $\varphi^2 = \frac{1}{1+\zeta}$, da $v_1 = \varphi\sqrt{2gh}$, aber auc

$=\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta}}$ ist. Für obiges Beispiel wird $\varphi^2=\frac{1}{1+3,74}=0,211\ldots$, und somit erhält man wieder

$$H_0=2\,.\,0,211\left(\frac{16}{0,64\,.\,9}-1\right)h=0,75\,h.$$

Das Maximum der Druckhöhe für den vollen Ausfluss ergiebt sich den obigen Formeln entsprechend

$$h_n=\frac{H\left(1+\left(\frac{F_1}{\alpha F}-1\right)^2\right)}{2\varphi^2\left(\frac{F_1}{\alpha F}-1\right)}$$

oder einfacher

$$h_n=\frac{H}{2\varphi^2\left(\frac{F_1}{\alpha F}-1\right)}.$$

Für $\frac{F_1}{F}=10$ oder $\frac{F}{F_1}=0,1$ ist nach Weisbach's Mechanik, 2. Auflage, S. 546 $\zeta=231,7$; hieraus folgt

$$\varphi^2=\frac{1}{1+\zeta}=\frac{1}{1+231,7}=0,004297\ldots$$

und somit

$$h_n=\frac{1}{2\,.\,0,004297\left(\frac{10}{0,64}-1\right)}H=7,96\,H.$$

6) Es dürfte ein Widerspruch gegen die Erfahrung scheinen, dass wir in 5) bei dem Querschnittsverhältniss $\frac{F}{F_1}=1$, wenn wir unter F nicht den contrahirten Querschnitt, sondern die Oeffnung des Diaphragmas verstehen, $h_n=1,34\,H$ und bei dem Querschnittsverhältniss $\frac{F}{F_1}=\frac{1}{10}$, $h_n=7,96\,H$ gefunden haben, während doch bekanntlich der volle Ausfluss desto schwieriger herzustellen und zu erhalten ist, je enger die Oeffnung des Diaphragmas im Verhältniss zum Querschnitt der Ansatzröhre ist, so dass man sogar bei kurzen Ansatzröhren keinen vollen Ausfluss mehr erlangt, wenn das Querschnittsverhältniss zu klein wird. Nichts desto weniger ist in dieser Thatsache kein Einwurf gegen die aufgestellte Theorie enthalten, da die abgehandelten Verhältnisse des vollen Ausflusses erst eintreten, nachdem derselbe durch ein zufälliges Ueberspringen des Wassers oder durch eine zu Erzielung desselben getroffene Vorkehrung u. a. (vergl. Hülsse's Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluss", S. 494 und 502) hergestellt worden ist. Dass bei weiten Mündungen und bei verhältnismässig kleinen Oeffnungen des Diaphragmas der volle Ausfluss weniger leicht und zum Theil gar nicht hervorgebracht zu werden vermag, findet seine Erklärung einfach darin, dass in beiden Fällen ein Eindringen der äusseren Luft weniger leicht verhindert werden kann, und aus demselben Grunde ergiebt sich auch, wie die Adhäsion des Wassers an der Röhrenwand Einfluss auszuüben vermag.

In der Adhäsion oder einer Anziehung der Ansatzröhre die Erklärung des ganzen Phänomens des vollen Ausflusses suchen zu wollen (Artikel „Ausfluss", S. 499 und 494) ist jedenfalls unrichtig, wie bereits S. 497 des angezogenen Aufsatzes von Prof. Weisbach angegeben; die Adhäsion hat blos auf die leichtere oder schwierigere Herstellung, auf die Vorbedingungen Einfluss. Dass aber auch die auf Seite 497 gegebene Erklärung als nicht genügend betrachtet werden muss, bedarf keines weiteren Beweises, indem solche nicht nur an und für sich zu unbestimmt gehalten ist, sondern auch die vergrösserte Geschwindigkeit in dem engern Querschnitte nicht erklärt. Viel specieller geht Navier in dem bereits angezogenen Werke *Architect. hydraul. par Belidor. Nouv. édit. T. I. Pag.* 293 und 294 auf die bei Ansatzröhren eintretenden Verhältnisse und namentlich auf das Minimum des Atmosphärendrucks und das Maximum der Druckhöhe für den vollen Ausfluss ein; doch ist seine Formelableitung nicht genug begründet, daher er auch auf grössere Werthe kommt, sowie dieselbe ebenfalls ganz von der Erklärung der grösseren Geschwindigkeit in dem engeren Querschnitte absieht.

7) Sind die Verengungen in Röhren angebracht (Fig. 52) welchen Fall wir seiner Wichtigkeit halber noch besonders betrachten wollen, so werden durch die eintretende, unvollkommene Contraction die in 5) abgehandelten Verhältnisse einige Modificationen erleiden. — Den Contractionscoefficienten α müssen wir in diesem Falle, da ein anderes, sicheres Anhalten nicht geboten ist, der Tabelle XVII., S. 74 der „Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers etc., von Julius Weisbach. Leipzig 1834" entnehmen; den Geschwindigkeitscoefficienten φ_2 für den Durchgang durch die Verengung können wir nach der auf derselben Seite ausgeführten Zusammenstellung $= 0{,}96$ setzen. Da sich nun unter Berücksichtigung dieser Coefficienten α und φ_2 die Geschwindigkeit v_1 des ausfliessenden Wassers nach der Formel

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - 1\right)\frac{F_1^2}{\alpha^2 F^2}}}$$

berechnen lässt (vergl. die letztangezogene Schrift S. 97 und Weisbach's Experimental-Hydraulik S. 81), so folgt:

$$h_n = \frac{H\left(1 + \left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - 1\right)\frac{F_1^2}{\alpha^2 F^2}\right)}{2\left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right)}$$

Für das Verhältniss $\frac{F}{F_1} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ findet man in der angegebenen Tabelle $\alpha = 0{,}817$, und führt man diesen Werth in obige Formel ein, so ergiebt sich

$$h_n = 1{,}19\,H.$$

Auf ein genaueres Resultat führt die Rechnung durch Einführung der Widerstandscoefficienten in dieselbe, insofern die Richtigkeit obiger Coefficienten, da solche nicht für die in Rede stehenden Verhältnisse beobachtet und abgeleitet wurden, auch nicht als ganz sicher anzunehmen ist, während für Verengungen in Röhren die Widerstandscoefficienten den Beobachtungen entsprechend in Weisbach's Mechanik S. 547 angegeben sind. Bezeichnet φ den Geschwindigkeitscoefficienten, welcher das Verhältniss der

effectiven Geschwindigkeit v_1 zur Geschwindigkeit ausdrückt, welche der Druckhöhe h entspricht, so dass also $v_1 = \varphi \sqrt{2gh}$ ist, so giebt die Gleichung

$$H = \frac{(v - v_1)\,v}{g} = \frac{\left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right) v_1^2}{g}:$$

$$H = \left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right) \varphi^2 . 2 h_n,$$

aus welcher folgt

$$h_n = \frac{H}{2\varphi^2 \left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right)}.$$

Nun ist aber $\varphi^2 = \frac{1}{1 + \zeta}$, wenn ζ den Widerstandscoefficienten bezeichnet, daher

$$h_n = \frac{H(1 + \zeta)}{2\left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right)}.$$

Für $\frac{F}{F_1} = 0{,}75$ findet man auf der angezogenen Seite 547 $\zeta = 0{,}5435$, und setzt man nun noch $\alpha = 0{,}817$ wie oben voraus, so erhält man $h_n = 1{,}22 H$.

8) Bedeutenden Einfluss wird auf die Höhe h_n natürlich noch der Reibungswiderstand des Wassers in den Röhren ausüben, da durch denselben die Geschwindigkeit je nach den gegebenen Verhältnissen mehr oder weniger beträchtlich vermindert wird. Das Maximum der Druckhöhe für den vollen Ausfluss ergiebt sich unter Berücksichtigung des Röhrenreibungswiderstandes, da sich die Geschwindigkeit des Wassers durch

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta + \zeta_1 \frac{l}{d}}}$$

bestimmt, wenn ζ, wie oben, den Geschwindigkeitscoefficienten für den Geschwindigkeitsverlust beim Durchgang durch die Verengung und ζ_1 den Reibungscoefficienten bezeichnet, durch die Formel

$$h_n = \frac{H\left(1 + \zeta + \zeta_1 \frac{l}{d}\right)}{2\left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right)}.$$

Diese Formel gestattet nun aber keine sofortige Bestimmung von h_n, da ζ_1 erst von der Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren und somit von h_n abhängig ist; eben so wie v_1 nur durch mehrfaches Einsetzen eines immer richtiger werdenden Coefficienten bestimmt werden kann, so wird man auch zur Berechnung von h_n für jeden einzelnen, vorliegenden Fall ein annäherndes Verfahren einzuschlagen haben. Man muss die Höhe h_n als gegeben betrachten und berechnen, ob für diese specielle Annahme ein voller Ausfluss stattfinden wird oder nicht. Z. B. die Röhrentour habe 150′ Länge

und 5 Zoll lichte Weite preuss. Maass*), die übrigen Verhältnisse seien wie in dem unter 7) berechneten Beispiele, d. i. $\frac{F}{F_1} = \frac{3}{4}$. Setzen wir vorerst eine Druckhöhe von 49′ voraus, welcher ungefähr eine Geschwindigkeit von 20′ und somit nach Weisbach's Mechanik S. 533 ein Coefficient $\zeta_1 = 0{,}0182$ entspricht, und berechnen, um uns von der Richtigkeit der vorausgesetzten Geschwindigkeit von 20′ zu überzeugen,

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta + \zeta_1 \frac{l}{d}}},$$

so ergiebt sich

$$v_1 = \frac{7{,}906 . \sqrt{49}}{\sqrt{1 + 0{,}5435 + \frac{150 . 12}{5} 0{,}0182}} = 19{,}5;$$

die Anwendung des Coefficienten 0,0182 ist somit richtig, und es wird demnach

$$h_n = H . \frac{1 + 0{,}5435 + \frac{150 . 12}{5} . 0{,}0182}{2\left(\frac{4}{3 . 0{,}817} - 1\right)} = 6{,}4 H = 210 \text{ preuss. Fuss.}$$

Man ersieht hieraus, dass für eine Druckhöhe von 49′ der volle Ausfluss noch nicht gestört wird, doch ist der Werth $6{,}4 H$ keineswegs als das genaue Maximum der Druckhöhe für den vollen Ausfluss zu betrachten, wenn letzteres auch unbedingt in die Nähe der berechneten Druckhöhe fallen wird; es ist $6{,}4 H$ offenbar etwas zu gross. Nehmen wir, um ein sichereres Anhalten zu erlangen, die Druckhöhe = 210′ an und führen die Rechnung von Neuem durch. Einer Druckhöhe von 210′ wird unter den gegebenen Verhältnissen ungefähr eine Geschwindigkeit von 40′ entsprechen, für welche wir, da uns directe Angaben über den dieser Geschwindigkeit zugehörigen Coefficienten fehlen, die Coefficienten bei grösseren Druckhöhen aber wenig von einander abweichen, in Hinsicht auf die bereits angezogene Tabelle 0,016 als Coefficienten anzunehmen berechtigt sein werden. Die Rechnung giebt für diese Werthe:

$$v_1 = \frac{7{,}906 \sqrt{210}}{\sqrt{1{,}5435 + \frac{150 . 12}{5} . 0{,}016}} = 42{,}5',$$

so dass also die Annahme des Coefficienten 0,016 (wenn solcher einer Geschwindigkeit von 40′ entspricht) gerechtfertigt ist. Für h_n findet man dann

$$h_n = H . \frac{1{,}5435 + \frac{150 . 12}{5} . 0{,}016}{1{,}264} = 5{,}78 H = 190 \text{ preussische Fuss.}$$

Bei 210′ Druckhöhe wird also kein voller Ausfluss mehr stattfinden,

*) Es ist preuss. Maass angenommen, um die Umrechnung zu vermeiden, da die Coefficiententabelle in Weisbach's Mechanik solches voraussetzt.

doch ist 190′ als Maximum der Druckhöhe zu klein, ebenso wie 210′ zu gross war; nur soviel ist bestimmt, dass dasselbe zwischen 190′ und 210′ liegen muss und jedenfalls 190 und einige Fuss betragen wird.

Das Maximum der Druckhöhe für den vollen Ausfluss ist in dem eben berechneten Falle ziemlich gross, dagegen wird solches bedeutend herabgezogen werden, wenn durch eine weitere Röhrentour die Geschwindigkeit in einem geringeren Grade vermindert wird, wie nachstehendes Beispiel deutlich zeigt.

Die Länge der Röhrentour betrage 144′ preuss., die lichte Weite sei 15 Zoll. Für eine Druckhöhe = 144′, eine Geschwindigkeit = 40′ und somit den Reibungscoefficienten = 0,016, erhält man

$$v_1 = \frac{7,906\sqrt{144}}{\sqrt{1,5435 + \frac{144\,.\,12}{15}\,.\,0,016}} = \frac{94,872}{\sqrt{1,5435 + 1,8432}} = \frac{94,872}{1,84} = 51,2'.$$

Für eine Geschwindigkeit von 50′ ist nach den oben angeführten Gründen der Reibungscoefficient = 0,015 anzunehmen und dann wird

$$v_1 = \frac{94,872}{\sqrt{3,2715}} = \frac{94,872}{1,82} = 52,1'$$

h_n ergiebt sich nun nach Feststellung des Coefficienten $\zeta_1 = 0,015$

$$h_n = H\,.\,\frac{1,5435 + 1,7280}{1,264} = 2,6\,H = 85,4' \text{ preuss.}$$

Bei 144′ Druckhöhe findet sonach unter den gegebenen Verhältnissen kein voller Ausfluss statt. Führen wir daher, um das Maximum der Druckhöhe für den vollen Ausfluss näher zu bestimmen, die Rechnung für eine Druckhöhe von 100′ nochmals durch. Es lässt sich aus obiger Berechnung leicht folgern, dass einer Druckhöhe von 100′ eine Geschwindigkeit von ungefähr 42′ bis 43′ entsprechen müsse, so dass also $\zeta_1 = 0,016$ einzusetzen ist, und man erhält für diesen Werth

$$h_n = H\,.\,\frac{1,5435 + 1,8432}{1,264} = 2,7\,H = 88,5' \text{ preuss.}$$

Also auch bei 100′ Druckhöhe findet noch kein voller Ausfluss statt, vielmehr ist das gesuchte Maximum der Druckhöhe auf 90 bis 95 Fuss zu setzen.

Betrachten wir nun noch, welche Wassermenge unter Annahme des vollen Ausflusses bei letztgenanntem Beispiele ausfliessen müsste, und wieviel Wasser wirklich ausfliessen wird. Wie bereits bisher geschehen, müssen wir auch in dieser Berechnung die bei geringeren Druckhöhen beobachteten Coefficienten für die grösseren Druckhöhen anwenden, da besondere Angaben über letztere fehlen. — Die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers lässt sich unter Berücksichtigung der vorstehenden Rechnung leicht zu $\frac{5}{6} \times 51,2' = 42,7'$ ausmitteln; der Querschnitt fasst 1,2272 □′, daher gäbe der volle Ausfluss ein Wasserquantum von 52,4 C′. Der Ausfluss durch die nur $\frac{3}{4}\,.\,1,2272$ □′, also 0,9204 □′ haltende Mündung F giebt dagegen, setzt man voraus, dass die Reibungshindernisse dieselben bleiben, sich also die Verengung ziemlich zu Ende der Röhrentour befinde, und nimmt man, wie bisher, den Contractionscoefficienten $\alpha = 0,877$, den Geschwindigkeitscoef-

ficienten = 0,96 und daher den diesem Geschwindigkeitsverlust entsprechenden Widerstandscoefficienten $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = 0,08624$, sowie ferner, da man eine Geschwindigkeit von ungefähr 50′ voraussehen kann, den Reibungscoefficirnten $\zeta_1 = 0,015$ an, die Geschwindigkeit

$$v = \frac{7,904\sqrt{100}}{\sqrt{1 + 0,08624 + 115,2 \,.\, 0,015}} = 47',$$

und man erhält das effective Wasserquantum

$$= 0,9204 \,.\, 0,817 \,.\, 47\, C' = 35,4 \text{ Cubikfuss.}$$

Dieses effective Ausflussquantum wird, wenn der Ausfluss nicht in die freie Luft, sondern unter Wasser stattfindet, welches Verhältniss in Fällen der Anwendung am meisten vorkommen dürfte, noch dadurch etwas vermindert, dass dann der Ausflusscoefficient nach Weisbach's „Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers", S. 80, $1\frac{1}{3}$% kleiner ausfällt und demgemäss auch der Geschwindigkeitscoefficient kleiner in die Rechnung einzuführen ist.

9) Aus den vorstehenden Beispielen ist sogleich ersichtlich, dass das Maximum der Druckhöhe für den vollen Ausfluss bei Maschinen, welche unter hohem Druck arbeiten, wie Wassersäulenmaschinen, Hochdruckturbinen etc. Einfluss erlangen kann, und dass daher für diese Maschinen die entwickelte Theorie nicht ohne praktische Wichtigkeit sein dürfte. Namentlich ist dieses Maximum auch deshalb zu berücksichtigen, da, wird solches überstiegen und fliesst das Wasser durch die Oeffnung F in das sich vor der Mündung F aufstauende Wasser (s. z. B. Fig. 53), der Verlust an mechanischer Arbeit bei dem Uebergange aus dem kleineren Querschnitt F in den grösseren F_1 nicht mehr $\frac{(v - v_1)^2}{2g} Q\gamma$, sondern $\frac{v^2 - v_1^2}{2g} Q\gamma$ zu setzen ist, so dass dann selbst bei scheinbar vollem Ausfluss die 2. der Eingangs behandelten Formeln für den Arbeitsverlust in Anwendung kommt.

Dieses Verhalten ist ferner nicht nur bei der Anwendung, sondern auch bei der Bestimmung der Widerstandscoefficienten für den Ausfluss unter hohem Druck nicht unbeachtet zu lassen, denn fehlt es auch überhaupt noch an Versuchsresultaten und Erfahrungswerthen für hohen Druck und sind solche grösstentheils erst noch zu bestimmen, so ist es doch für den Experimentator wichtig, bei den Versuchen eine richtige Theorie vor Augen zu haben und die Vorgänge klar zu überschauen, die er durch Zahlenwerthe normiren will. Ueberschreitet die Druckhöhe das für den vollen Ausfluss geltende Maximum, so wird der Widerstandscoefficient plötzlich einen viel grösseren Werth erhalten, wenn man den Eintritt des gleichsam frei ausströmenden in das verstauende Wasser (wie z. B. in Fig. 53) nach Art des vollen Ausflusses behandeln will, was für gewisse Verhältnisse der Einfachheit und Gleichförmigkeit halber nicht unzweckmässig sein dürfte.

Beachtung bei praktischen Ausführungen und Untersuchungen dürfte das Vorstehende um so mehr verdienen, als die durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile hervorgebrachten Verengungen bekanntlich nach demselben Princip als die in Obigem angenommenen Verengungen wirken und die durch erstere hervorgebrachten Druckhöhenverluste auf ähnliche Weise zu betrachten und zu behandeln sind, wenn auch durch die Ver-

schiedenartigkeit der Verengungen mehr oder weniger Modificationen eintreten.

10) Werfen wir zum Schlusse dieser Abhandlung noch einen Blick auf die aufgestellte Erklärung des vollen Ausflusses durch eine theilweise Aufhebung des Atmosphärendrucks oder gleichsam Uebertragung des Druckes durch die Atmosphäre zurück, so dürfte es zur weiteren Begründung nicht unzweckmässig sein, Beispiele anzuführen, bei denen eine solche Uebertragung, wenn auch unter etwas verschiedenen Verhältnissen, ebenfalls stattfindet und bereits als richtig anerkannt wird.

1. An das Gefäss A (Fig. 54) stosse eine engere, vertikale Röhre B, so wird, beträgt die gesammte Druckhöhe h ohne Berücksichtigung der Druckhöhenverluste, das Wasser bei vollem Querschnitt (nachdem der volle Ausfluss nöthigenfalls hergestellt worden ist) mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ ausfliessen. Dieselbe Geschwindigkeit hat natürlich das Wasser im gleichgrossen Querschnitt F und doch beträgt für denselben die Druckhöhe blos $h - h_1$. Der Grund, dass das Wasser bereits im Querschnitt F eine grössere Arbeit besitzt, als der Druckhöhe $h - h_1$ entspricht, ist einfach darin zu suchen, dass die unter F befindliche Wassersäule den Atmosphärendruck in Bezug auf den Querschnitt F zum Theil aufhebt, um einen der Druckhöhe h_1 entsprechenden Druck vermindert, so dass nun die Geschwindigkeit in F bedingende Druckhöhe nicht blos $h - h_1$, sondern $h - h_1 + h_1 = h$ wird.

2. Beträgt im Gefässe A die Druckhöhe h_0 und bezeichnet H die den Atmosphärendruck messende Höhe einer Wassersäule, so wird, wenn der Zutritt der Luft in die Röhre B verhindert ist, der volle Ausfluss so lange stattfinden, als $h_0 + H > \frac{v^2}{2g}$ ist vorausgesetzt, dass v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre B bezeichnet und der Druckhöhenverlust beim Uebertritt des Wassers aus A nach B nicht berücksichtigt wird; vergl. Hülsse's Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluss", S. 580. Auch in diesem Falle tritt also eine Vermehrung des Wasserdrucks um den Atmosphärendruck durch die entgegengesetzte Aufhebung desselben ein; warum sollte man nicht berechtigt sein, den vollen Ausfluss des Wassers beim Durchgang durch Verengungen auf eine Weise zu erklären, welche mit der Erklärung der eben angeführten Beispiele bis auf den Unterschied, dass der dem Atmosphärendruck entgegenstehende und denselben zum Theil oder ganz aufhebende Druck nicht durch eine Wassersäule, sondern durch einen von dem bewegten Wasser hervorgebrachten Gegendruck gebildet wird, vollkommen übereinstimmt!

XVII.

Ueber die Totalreflexion an der Oberfläche doppelt brechender Krystalle.

Von M. H. DE SENARMONT *).

§. 1.

Die Gestalt, welche die Lichtwellen bei ihrer Fortpflanzung in doppelt brechenden Mitteln annehmen, ist heutigen Tages in allen ihren Einzelheiten eine so bekannte Sache, dass es wenig von der Doppelbrechung abhängige Erscheinungen giebt, deren geometrische Gesetze man nicht im Voraus mit Hülfe der Fresnel'schen Theorie bestimmt hätte.

Untersuchungen dieser Art sind zu einem Exercitium in der Analysis geworden, wozu ein Jeder sich seine eignen mehr oder minder elementaren Methoden bilden kann, und auch das im Folgenden behandelte Problem würde nicht mehr als jedes andere eine besondere Erwähnung verdienen, wenn es nicht zu einfachen, praktisch ausführbaren Folgerungen führte, sowie zu einem ganzen System von Experimenten, welche eine Art graphischer Darstellung der bezeichnendsten Eigenschaften der Wellenfläche darbieten.

§. 2.

Jeden gewöhnlichen Lichtstrahl, welcher einen Krystall trifft, kann man als zusammengesetzt ansehen aus zwei rechtwinklig zu einander polarisirten Bündeln, von denen das eine den ordentlichen, das andere den ausserordentlichen Strahl hergeben muss.

Diese beiden Bündel richten sich nun beim Eindringen in das krystallinische Mittel nach verschiedenen Gesetzen. Ist dieses Mittel ein weniger brechendes als dasjenige nicht krystallinische, aus welchem die Bündel austreten, so gelangen diese nicht zugleich an die Brechungsgrenze, welche der Totalreflexion unmittelbar vorausgeht, sondern jedes derselben erreicht sie unter einer anderen Incidenz.

Es wird demnach auch jedem derselben eine bestimmte und gesonderte Iris der Totalreflexion entsprechen.

In dem Folgenden sollen die Bedingungen der Bildung und die Gestalt der irisirenden Bogen und einfallenden Strahlenkegel, deren Basis jene bilden, bestimmt werden, wenn die Strahlen von einem Punkte aus ausserhalb des Krystalls divergiren und wenn dieser Krystall von einer ebenen Fläche begrenzt wird.

---

*) *Journal de Mathematiques p. Liouville, Aout* 1856, *p.* 305.

§. 3.

Optisch einaxige Krystalle.

Sei v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts in dem Mittel ausserhalb des Krystalls, bedeuten a^2 und b^2 die Hauptelasticitätscoefficienten parallel und senkrecht zur optischen Axe, ϑ die Neigung der optischen Axe zur Normale auf der brechenden oder Eintrittsfläche; die Axe der X mag mit dieser Normale gleichgerichtet sein, die Axe der Y in dem Hauptschnitte liegen und die Axe der Z senkrecht auf diesem Schnitte stehen; seien ferner $l_o, m_o, n_o, l_e, m_e, n_e$ bezüglich die Winkelcoordinaten der ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen, $L_o, M_o, N_o, L_e, M_e, N_e$ die Winkelcoordinaten der entsprechenden einfallenden Strahlen: so hat man zuvörderst nach dem Brechungsgesetz des Cartesius (oder vielmehr des Snellius) zur Bestimmung der Richtung des ordentlichen Strahles

$$\frac{\cos n_o}{\cos l_o} = \frac{\cos N_o}{\cos L_o}; \quad \frac{\sin L_o}{\sin l_o} = \frac{v}{b};$$

ferner mit Berücksichtigung der Gesetze der Doppelbrechung von Huyghens und der Polarisation von Malus, und wenn man zur Abkürzung

$$A = a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta, \quad B = (b^2 - a^2) \sin \vartheta \cos \vartheta$$

setzt, zur Bestimmung der Richtung des ausserordentlichen Strahles:

$$\frac{\cos n_e}{\cos l_e} = \frac{a^2 \cos N_e}{(Av^2 - Aa^2 \cos^2 N_e - a^2 b^2 \cos^2 M_e)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\cos m_e}{\cos l_e} = \frac{a^2 b^2 \cos N_e}{A\,(Av^2 - Aa^2 \cos^2 N_e - a^2 b^2 \cos M_e)^{\frac{1}{2}}} - \frac{B}{A};$$

und, weil bei eintretender Brechungsgrenze für den einen wie für den andern Strahl

$$\sin^2 l_o = 1, \quad \cos^2 l_e = 0$$

ist, zur Bestimmung der Richtung der einfallenden Strahlen, welche dieser Erscheinung entsprechen:

$$v^2 \cos^2 L_o + (v^2 - b^2) \cos^2 M_o + (v^2 - b^2) \cos^2 N_o = 0,$$

$$v^2 \cos^2 L_e + \left(v^2 - \frac{a^2 b^2}{A}\right) \cos^2 M_e + (v^2 - a^2) \cos^2 N_e = 0.$$

Von diesen Strahlen sind demnach die ersteren auf der Oberfläche eines Revolutionskegels vertheilt, dessen Umdrehungsaxe die auf der brechenden Fläche normal stehende Axe der X ist; die anderen liegen auf einer Kegelfläche zweiten Grades, deren Hauptaxen dieselbe Normale und die beiden anderen Coordinatenaxen sind.

Verbindet man die beiden vorstehenden Gleichungen durch Subtraction, so wird dem Resultate

$$b^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 M + (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta) \cos^2 N = 0$$

nur durch

$$\cos^2 \vartheta = 0 \text{ und } \cos^2 N = 0$$

Genüge geleistet. Diese Kegel haben demnach nur ihre Mittelpunkte mit einander gemein, wenn anders die brechende Ebene der optischen Axe nicht parallel ist, in diesem Falle haben sie in dem Hauptschnitte zwei Erzeu-

1) $$\frac{\ldots cos^2 \lambda}{\varrho^2 - a^2} + \frac{b^2 cos^2 \mu}{\varrho^2 - b^2} + \frac{c^2 cos^2 \nu}{\varrho^2 - c^2} = 0,$$

2) $$\frac{cos^2 l}{r^2 - a^2} + \frac{cos^2 m}{r^2 - b^2} + \frac{cos^2 n}{r^2 - c^2} = 0,$$

3) $$\frac{\varrho \cos \lambda}{\varrho^2 - a^2} = \frac{r \cos l}{r^2 - a^2}, \quad \frac{\varrho \cos \mu}{\varrho^2 - b^2} = \frac{r \cos m}{r^2 - b^2}, \quad \frac{\varrho \cos \nu}{\varrho^2 - c^2} = \frac{r \cos n}{r^2 - c^2}.$$

§. 5.

Anstatt nun die allgemeinen und sehr verwickelten Formeln anzuwenden, welche die Abhängigkeit der Richtung eines einfallenden Strahls von der Richtung der gebrochenen Strahlen ausdrücken, wollen wir uns begnügen, die geometrische Construction, welche die Richtung dieser gebrochenen Strahlen in dem besonde... ...i der Eintrittsebene zurückbleiben, bestimmt, in die Sprache der Al... zu übersetzen.

§. 6.

Man nehme beispielsweise die ... ...iende Ebene normal zur Y-Axe der mittleren Elasticität an und es se... ...lie... ...ur der Einfallsebene in diese Eintrittsebene. (Fig. 55.) ...tzt man ... $= \varphi$, zieht PK senkrecht zu OP, legt hierauf durch ... an die Wellenfläche, deren Mittelpunkt O ist und ... ...hrungspunkten, so hat man im Allgemeinen den doppelt... ...l construirt.

In dem vorliegenden Fa... ...s aber jeder derselben ganz in der Eintrittsebene verbleiben, es müssen demnach (weil die Grösse OP zwei verschiedene Werthe hat, indem die Incidenz für Strahlen, welche an die Grenze der ordentlichen und der ausserordentlichen Brechung gelangen, nicht dieselbe ist) zwei Grade wie PK selbst Tangenten zur Wellenfläche oder zu den Durchschnittscurven derselben mit der brechenden Ebene sein.

Die Gleichungen der Durchschnitte der Wellenfläche mit einer zur Axe der Y normalen Ebene erhält man nun, wenn man in der Gleichung 1) $\cos \mu = 0$ setzt. Die Gleichungen dieser Durchschnittscurven sind demnach

$$\varrho^2 = b^2$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{cos^2 \lambda}{c^2} + \frac{cos^2 \nu}{a^2}.$$

Für die kreisförmige, den ordentlichen Strahlen entsprechende Durchschnittscurve, deren Gleichung

4) $$\varrho^2 = b^2$$

ist, fällt die Normale OP mit dem nach dem Berührungspunkt gezogenen Radiusvector zusammen und man hat daher als Gleichung des geometrischen Ortes der einfallenden Strahlen

$$v^2 = b^2 cos^2 M,$$

oder

5) $$(v^2 - b^2)(cos^2 L + cos^2 N) + v^2 cos^2 M = 0.$$

Bezüglich der elliptischen Durchschnittscurve, deren Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \lambda}{c^2} + \frac{\cos^2 \nu}{a^2}$$

ist, seien φ, $\cos\chi$, $\cos\psi$ Coordinaten des Punktes P. Da nun OP die Spur der Einfallsebene ist, so hat man

$$\cos L = \sin M \cos\chi, \quad \cos N = \sin M \cos\psi.$$

Die Gleichung der Tangente KP ist

$$\frac{1}{\varrho\varphi} = \frac{\cos\chi \cos\lambda}{c^2} + \frac{\cos\psi \cos\nu}{a^2}$$

und die Gleichung der Normale OP zu dieser Tangente

$$\frac{\frac{\cos\chi}{\cos\lambda}}{c^2} = \frac{\frac{\cos\psi}{\cos\nu}}{a^2}.$$

Aus dieser, sowie aus den vorhergehenden Gleichungen ergiebt sich

$$\varphi = \sqrt{c^2 \cos^2\chi + a^2 \cos^2\psi} = \frac{v}{\sin M}$$

und für die Gleichung des geometrischen Orts der einfallenden Strahlen

6) $\qquad (v^2 - c^2)\cos^2 L + (v^2 - a^2)\cos^2 N + v^2 \cos^2 M = 0.$

Von den Gleichungen 5) und 6) ist die erste die eines Revolutionskegels mit einer zur Eintrittsebene senkrechten Umdrehungsaxe, die andere die Gleichung eines Kegels zweiten Grades, dessen Gestalt noch näher zu bestimmen ist. Verbindet man die Gleichungen beider Kegel durch Subtraction, so ist das Resultat

7) $\qquad (b^2 - c^2)\cos^2 L + (b^2 - a^2)\cos^2 N = 0$

die Gleichung zweier Ebenen, welche durch die Axe der mittleren Elasticität und durch die wahren optischen Axen (Axen der inneren konischen und der äusseren cylindrischen Brechung) hindurch gehen. Die Kegel 5) und 6) haben demnach vier gemeinschaftliche Erzeugungsgraden, von denen je zwei in derselben Ebene enthalten sind, welches auch übrigens der Werth von v^2 ist, d. h. welche Gestalt auch der Kegel zweiten Grades haben mag.

Die Neigungen der die Kegel erzeugenden Graden gegen ihre Axe sind in den Azimuten der Hauptschnitte bestimmt durch

$$tg^2 M = \frac{v^2}{b^2 - v^2}$$

$$tg^2 M_x = \frac{v^2}{c^2 - v^2}$$

$$tg^2 M_z = \frac{v^2}{a^2 - v^2}.$$

Der Kegel zweiten Grades hat eine elliptische Basis, wenn

$$v^2 < c^2;$$

er reducirt sich auf zwei Ebenen, welche parallel zur Axe der X und symmetrisch gleichgeneigt zur Axe der Y sind, wenn

$$v^2 = c^2;$$

hältniss der effectiven Geschwindigkeit zu der der Druckhöhe entsprechenden Geschwindigkeit, welches eben den Geschwindigkeitscoefficienten φ giebt) $= \varphi$:

$$H_0 = \varphi^2 \cdot \frac{2h\left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right)}{1 + \left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right)^2}.$$

α können wir wieder zu 0,64 annehmen (obgleich dieser Werth eigentlich [illegible] s für das Verhältniss $\frac{F_1}{F} = 1$ im Mittel bei den gewöhnlichen Dimen- [illegible] zröhren richtig ist, insofern derselbe bei kleinerem Quer- [illegible] ichst); um φ zu bestimmen müssen wir dagegen zu folgen- [illegible] Entwickelu [illegible] nenmen, da wir nur den in Weisbach's [illegible] S. [illegible] 6, durch α bezeichneten Werth, [illegible] ezeichnen wollen, oder den Wi- [illegible] n:

$$v_1 = \varphi \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right)^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{F_1}{\alpha_1 F} - 1\right)^2}},$$

daher

$$\varphi^2 = \frac{1 + \left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right)^2}{1 + \left(\frac{F_1}{\alpha_1 F} - 1\right)^2},$$

oder, führen wir den Widerstandscoefficienten ζ ein,

$$\varphi^2 = \frac{1 + \left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right)^2}{1 + \zeta}.$$

Für das an der erwähnten Stelle in Weisbach's Mechanik berechnete Beispiel, bei welchem $\frac{F}{F_1} = \frac{9}{16}$ angenommen und daher $\alpha_1 = 0,606$ zu setzen ist, erhält man $\varphi^2 = 0,8784$, und es folgt dann

$$H_0 = 0,8784 \cdot \frac{2\left(\frac{16}{9 \cdot 0,64} - 1\right)}{1 + \left(\frac{16}{9 \cdot 0,64} - 1\right)^2} h = 0,75\, h.$$

Einfacher gelangt man auch in dem vorliegenden Falle zum Ziele, indem man die Berechnung von φ umgeht und die Bestimmung von H_0 durch die Formel $H_0 = 2\varphi^2 \left(\frac{F_1}{\alpha F} - 1\right) h$ bewirkt. Den Werth für φ findet man aus dem in Weisbach's Mechanik S. 546 angegebenen Widerstandscoefficienten ζ durch $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$ oder $\varphi^2 = \frac{1}{1+\zeta}$, da $v_1 = \varphi\sqrt{2gh}$, aber auch

$$(v^2 - c^2)(\cos^2 L + \cos^2 M) + v^2 \cos^2 N = 0,$$
$$(v^2 - b^2)\cos^2 L + (v^2 - a^2)\cos^2 M + v^2 \cos^2 N = 0.$$

In gleicher Weise giebt die Bedingungsgleichung für den Durchschnitt beider Kegel unmögliche Werthe; ebenso findet sich, dass der Kegel zweiten Grades ganz innerhalb des Revolutionskegels (so lange letzterer vorhanden ist) liegt; dass er eine elliptische Basis hat und noch mit dem Revolutionskegel coexistirt, wenn

$$v^2 < c^2;$$

dass er ohne den Revolutionskegel, der inzwischen imaginär geworden ist, besteht und dabei noch elliptische Basis hat, wenn

$$v^2 \begin{matrix} = c^2 \\ > b^2 \end{matrix};$$

dass er in zwei der X-Axe parallele und zur Z-Axe symmetrisch gleichgeneigte Ebenen übergeht, wenn

$$v^2 = b^2;$$

dass er endlich eine hyperbolische Basis erhält, wobei die grosse Axe der Hyperbel mit der Y-Axe zusammenfällt, wenn

$$v^2 = \begin{matrix} > b^2 \\ < a^2 \end{matrix}.$$

§. 9.

Steht die brechende Ebene senkrecht auf der Axe der mittleren Elasticität, so giebt es gewisse Ausnahmefälle, unter welchen sich die Bedingung für die Brechungsgrenze modificirt. Hierüber ist folgendes zu bemerken.

Die sogenannten Nabelpunkte der Wellenfläche sind in der brechenden Ebene enthalten. Da man durch einen solchen Punkt eine unendliche Menge verschiedener Tangentialebenen an diese Fläche legen kann, so ist nach den in §. 6. gegebenen Bemerkungen klar, dass einem und demselben gebrochenen Strahle eine unendliche Menge von Einfallsebenen, und folglich eine eben so grosse Menge von Einfallsstrahlen entsprechen. Die Richtung dieser letzteren soll nun bestimmt werden.

Die Nabelpunkte sind aber die Durchschnittspunkte des Kreises, dessen Gleichung

$$\varrho^2 = b^2,$$

und der Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \lambda}{c^2} + \frac{\cos^2 \nu}{a^2}.$$

Für die nach den Nabelpunkten gerichteten Radienvectoren gelten daher die Bedingungsgleichungen

$$\varrho^2 = b^2;$$

$$\cos^2 \lambda = \frac{c^2}{b^2}\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2};\quad \cos^2 \mu = 0;\quad \cos^2 \nu = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Setzt man diese Werthe in den Gleichungen 3) ein und lässt vorläufig der Einfachheit wegen die Doppelzeichen unberücksichtigt (wobei man also nur einen Nabelstrahl in Betracht zieht), so erhält man

$$r - \frac{a^2}{r} = -\frac{1}{c}\sqrt{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)}\cos l,$$

$$r - \frac{c^2}{r} = -\frac{1}{c}\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}\cos n,$$

aus

$$8)\quad \begin{aligned} \frac{r}{b} &= \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos l + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos n, \\ \frac{b}{r} &= \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos l + \frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos n. \end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich unter zwei verschiedenen Formen für die Gleichung der Kegelfläche, welche von den Richtungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die in [...] igen Nabelstrahl entsprechen, gebildet wird:

$$1 - \left(\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos l + \frac{c}{[\ldots]} [\ldots] \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos n\right)$$

$$\times\left(\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos l - [\ldots] \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos n\right) = 0$$

$$\cos^2 m + \left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2 - [\ldots]}{a^2 - [\ldots]}} [\ldots] os\, l - \frac{b}{c} [\ldots] \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos n\right)$$

$$\times\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 - [\ldots]}{a^2 - c^2}} [\ldots] \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos n\right) = 0.$$

Nimmt man aber die Richtungen der inneren Fortpflanzungsgeschwindigkeit als gegeben an, so kann man daraus leicht die Richtung der äusseren Fortpflanzungsgeschwindigkeit, d. h. die Richtung der entsprechenden Einfallsstrahlen ableiten. Man hat nämlich zwischen beiden Geschwindigkeiten folgende Beziehungen:

1. Die Richtung der inneren und äusseren Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird durch das Sinusgesetz bestimmt;
2. beide sind in derselben Ebene, der Einfallsebene, enthalten;
3. die inneren Geschwindigkeiten sind bezüglich ihrer Richtungen durch eine Funktion gegeben, für welche die Gleichung 2), oder jede andere Relation wie 8) zwischen l, n, r untergelegt werden kann.

Man hat also mit Berücksichtigung, dass $\sin m = 1$ ist,

$$9)\quad \frac{r}{v} = \frac{1}{\sin M} = \frac{\cos l}{\cos L} = \frac{\cos n}{\cos N}.$$

Eliminirt man mit Hülfe dieser Gleichungen aus 8) die Grössen r, l, n, so hat man für den geometrischen Ort aller einfallenden Strahlen, die ausnahmsweise sich zu einem einzigen gebrochenen Nabelstrahl vereinigen,

$$10)\quad \frac{v^2}{b^2} = \left(\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos L + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos N\right)^2.$$

Es bezeichne Θ den Winkel, welchen die einfallenden Strahlen mit der scheinbaren optischen Axe (Axe der uniradialen inneren, der koni-

schen äusseren Refraction) bilden. Da nun diese optische Axe mit den Hauptaxen Winkel bildet deren *cosinus* bezüglich

$$\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad 0, \quad \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

sind, so erhält man für den Winkel Θ

$$11) \qquad \cos^2\Theta = \frac{v^2}{b^2}$$

Soll diese Gleichung Bedeutung haben, muss $v^2 < b^2$ sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so giebt es also ein Bündel einfallender Strahlen, welche einen Revolutionskegel bilden, für den die Umdrehungsaxe die scheinbare optische Axe ist, und welche alle durch die Brechung zu einem einzigen mit dieser Axe zusammenfallenden Strahl vereinigt werden.

Die Gleichung 10) des Kegels kann übrigens auch unter folgenden Formen wiedergegeben werden:

$$(v^2-b^2)(\cos^2 L+\cos^2 N)$$
$$+\,b^2\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L-\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N\right)^2+v^2\cos^2 M=0,$$

$$(v^2-c^2)\cos^2 L+(v^2-a^2)\cos^2 N$$
$$+\frac{a^2c^2}{b^2}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L-\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N\right)^2+v^2\cos^2 M=0.$$

Verbindet man diese durch Subtraction entweder mit der Gleichung 5) des Revolutionskegels, oder mit der Gleichung 6) des andern Kegels, so findet man in ersterem Falle

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L-\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N=0,$$

d. i. die Gleichung einer Ebene, welche durch die mittlere Elasticitätsaxe und durch die scheinbare optische Axe gelegt ist; im andern Falle

$$\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L-\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N=0,$$

d. i. die Gleichung einer Ebene, gelegt durch die mittlere Elasticitätsaxe und durch die Durchschnittsgrade der brechenden Ebene mit derjenigen konischen Fläche (10), die eben der geometrische Ort der einfallenden Strahlen ist, welche nach der Brechung sich in einem einzigen Strahl vereinigen. Die Kegel 5) und 6) der einfallenden Strahlen haben also nur zwei Erzeugungsgraden mit dem Kegel 10) gemeinschaftlich; alle drei haben die Axe der Y als Hauptdiameter, folglich berührt der letztere (10) die beiden andern in der ganzen Länge einer der Erzeugungsgraden.

Derselbe Kegel liegt ferner ganz innerhalb der Kegel 5) und 6), so dass seine Erzeugungsgraden nach einer Stelle der brechenden Ebene führen, wo die Bedingungen der Brechungsgrenze im Allgemeinen schon überschritten sind und wo die Brechung bereits in Totalreflexion übergegangen ist.

Will man den Kegel 10) auf seine Hauptaxen beziehen, so muss man in dem neuen Coordinatensystem die scheinbare optische Axe zur Axe der X machen, die Axe der Y unverändert lassen, und als Axe der Z eine auf

den beiden ersteren senkrechte Gerade annehmen. Die Gleichung 11) geht dann über in

$$(v^2 - b^2)\cos^2 L' + v^2(\cos^2 N' + \cos^2 M) = 0.$$

Der Durchschnitt dieser Kegel mit der brechenden Ebene giebt eine Hyperbel und die Tangente des halben Asymptotenwinkels dieser Hyperbel ist gleich

$$\sqrt{\frac{b^2 - v^2}{v^2}}.$$

§. 10.

Wenn gewisse Gruppen von Einfallsstrahlen, welche im Allgemeinen an die für die Totalreflexion reservirte Stelle kommen, dessen ohngeachtet nur die Grenzbrechung erleiden (der streifenden Brechung unterworfen sind), so giebt es deren noch andere, welche, obgleich sie in das Gebiet dieser Brechungsgrenze fallen, doch ausnahmsweise nur die gewöhnliche Brechung erleiden.

Wenn nämlich

$$\varphi = \frac{v}{\sin M} = b, \text{ (vergl. §. 6)}$$

so ist ein und dieselbe Grade, wie PK, zugleich Tangente an dem kreisförmigen und elliptischen Durchschnitt der Eintrittsebene mit der Wellenfläche. Diese beiden Punkte sind aber nicht die einzigen, welche mit dieser Fläche die durch PK gelegte Tangentialebene gemeinschaftlich haben würde; die Ebene berührt dieselbe vielmehr in dem ganzen Umfange eines Kreises, so dass unzählige Grade von dem Punkte O aus nach diesem kleinen Kreise hingehen, welche eine Kegelfläche bilden und eben so viele gebrochene Strahlen vorstellen, die zu einem einzigen Einfallsstrahl gehören.

Diese gebrochenen Strahlen sind nicht alle in der brechenden Ebene enthalten; der entsprechende Einfallsstrahl ist also in Wirklichkeit nicht einer streifenden, sondern einer gewöhnlichen Brechung unterworfen worden.

Die Bedingungsgleichung

$$\varphi = \frac{v}{\sin M} = b$$

giebt zuvörderst

$$(v^2 - b^2)(\cos^2 L + \cos^2 N) + v^2 \cos^2 M = 0$$

sodann, in Betracht, dass

$$\varphi = \sqrt{c^2 \cos^2 \chi + a^2 \cos^2 \psi} \quad (§. 6),$$

$$(b^2 - c^2)\cos^2 L + (b^2 - a^2)\cos^2 N = 0.$$

Vergleicht man diese Bedingungsgleichungen mit 5) und 7), so erkennt man, dass die Einfallsstrahlen, welche mit den Durchschnittskanten der beiden Kegel 5) und 6) gleiche Richtung haben, genau dieselben sind, welche von der streifenden Brechung ausgenommen sind, und die innere konische, sowie nach ihrem Austritt die äussere cylindrische Brechung erleiden.

Ist die Austrittsebene der Eintrittsebene parallel, so bleibt die cylindrische Fläche der austretenden Strahlen dem einfallenden Strahl parallel.

doch ist 190′ als Maximum der Druckhöhe zu klein, ebenso wie 210′ zu gross war; nur soviel ist bestimmt, dass dasselbe zwischen 190′ und 210′ liegen muss und jedenfalls 190 und einige Fuss betragen wird.

Das Maximum der Druckhöhe für den vollen Ausfluss ist in dem eben berechneten Falle ziemlich gross, dagegen wird solches bedeutend herabgezogen werden, wenn durch eine weitere Röhrentour die Geschwindigkeit in einem geringeren Grade vermindert wird, wie nachstehendes Beispiel deutlich zeigt.

Die Länge der Röhrentour betrage 144′ preuss., die lichte Weite sei 15 Zoll. Für eine Druckhöhe = 144′, eine Geschwindigkeit = 40′ und somit den Reibungscoefficienten = 0,016, erhält man

$$v_1 = \frac{7{,}906\sqrt{144}}{\sqrt{1{,}5435 + \frac{144\,.\,12}{15}\,.\,0{,}016}} = \frac{94{,}872}{\sqrt{1{,}5435 + 1{,}8432}} = \frac{94{,}872}{1{,}84} = 51{,}2'.$$

Für eine Geschwindigkeit von 50′ ist nach den oben angeführten Gründen der Reibungscoefficient = 0,015 anzunehmen und dann wird

$$v_1 = \frac{94{,}872}{\sqrt{3{,}2715}} = \frac{94{,}872}{1{,}82} = 52{,}1'$$

h_n ergiebt sich nun nach Feststellung des Coefficienten $\zeta_1 = 0{,}015$

$$h_n = H\,.\,\frac{1{,}5435 + 1{,}7280}{1{,}264} = 2{,}6\,H = 85{,}4' \text{ preuss.}$$

Bei 144′ Druckhöhe findet sonach unter den gegebenen Verhältnissen **kein** voller Ausfluss statt. Führen wir daher, um das Maximum der Druckhöhe für den vollen Ausfluss näher zu bestimmen, die Rechnung für eine Druckhöhe von 100′ nochmals durch. Es lässt sich aus obiger Berechnung leicht folgern, dass einer Druckhöhe von 100′ eine Geschwindigkeit von ungefähr 42′ bis 43′ entsprechen müsse, so dass also $\zeta_1 = 0{,}016$ einzusetzen ist, und man erhält für diesen Werth

$$h_n = H\,.\,\frac{1{,}5435 + 1{,}8432}{1{,}264} = 2{,}7\,H = 88{,}5' \text{ preuss.}$$

Also auch bei 100′ Druckhöhe findet noch kein voller Ausfluss statt, vielmehr ist das gesuchte Maximum der Druckhöhe auf 90 bis 95 Fuss zu setzen.

Betrachten wir nun noch, welche Wassermenge unter Annahme des vollen Ausflusses bei letztgenanntem Beispiele ausfliessen müsste, und wieviel Wasser wirklich ausfliessen wird. Wie bereits bisher geschehen, müssen wir auch in dieser Berechnung die bei geringeren Druckhöhen beobachteten Coefficienten für die grösseren Druckhöhen anwenden, da besondere Angaben über letztere fehlen. — Die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers lässt sich unter Berücksichtigung der vorstehenden Rechnung leicht zu $\frac{5}{6} \times 51{,}2' = 42{,}7'$ ausmitteln; der Querschnitt fasst 1,2272 □′, daher gäbe der volle Ausfluss ein Wasserquantum von 52,4 C′. Der Ausfluss durch die nur $\frac{3}{4}\,.\,1{,}2272$ □′, also 0,9204 □′ haltende Mündung F giebt dagegen, setzt man voraus, dass die Reibungshindernisse dieselben bleiben, sich also die Verengung ziemlich zu Ende der Röhrentour befinde, und nimmt man, wie bisher, den Contractionscoefficienten $\alpha = 0{,}877$, den Geschwindigkeitscoef-

I. Optisch einaxige Krystalle (§. 3).

A. Repulsive oder negative.

1) Ist der Brechungsindex des auf den Krystall gelegten homogenen Mittels grösser als dessen grösster Brechungsindex:

so ist der den ordentlichen Strahlen entsprechende Farbenring (Iris) ein Kreis, der andere, den ausserordentlichen Strahlen zugehörige, eine mit demselben concentrische und von ihm eingeschlossene Ellipse, deren kleine Axe senkrecht zum Hauptschnitte steht, und unabhängig von der Neigung der brechenden Ebene zur optischen Axe ist.

In dem besondern Falle, dass die brechende Ebene senkrecht zu der optischen Axe gestellt ist, nimmt auch die zweite Iris die Kreisform an.

Wenn aber die brechende Ebene der optischen Axe parallel ist, so bleibt dieselbe elliptisch und berührt mit ihren Scheiteln den ersten kreisförmigen Farbenring.

2) Liegt der Brechungsindex des aufgelegten Mittels zwischen den beiden Hauptbrechungscoefficienten des Krystalls:

so geht der zweite Farbenring erst in zwei dem Hauptschnitt parallele Grade über und nimmt dann die Form einer Hyperbel an, deren reelle Axe senkrecht zum Hauptschnitte ist. Der erste Farbenring verschwindet dagegen.

B. Attractive oder positive Krystalle.

1) Wenn der Brechungsindex des auf den Krystall gelegten Mittels zwischen den beiden Hauptindexen des Krystalls liegt:

so ist der erste, den ordentlich gebrochenen Strahlen entsprechende Farbenring kreisförmig und von dem zweiten Farbenringe umschlossen. Letzterer ist mit ersterem concentrisch und hat die Form einer Hyperbel, deren reelle Axe dem Hauptschnitte parallel liegt.

2) Ist der Index des aufgelegten Mittels gleich dem grössten Index des Krystalls:

so ist der erste Farbenring ebenfalls kreisförmig, der zweite würde sich auf zwei zum Hauptschnitte senkrechte Grade reduciren, doch verschwinden diese im Allgemeinen.

Ein Gleiches findet statt, wenn

3) der Index des aufgelegten Mittels grösser als der grösste Index des Krystalls ist, in welchem Falle der zweite Ring, wenn er zum Vorschein käme, elliptisch wäre.

II. Optisch zweiaxige Krystalle.

A. Erscheinungen an einer zur mittleren Elasticitätsaxe senkrechten brechenden Ebene. (§. 5.)

1) Wenn der Brechungsindex des auf den Krystall gelegten Mittels grösser ist, als der grösste der drei Hauptbrechungsindexe desselben:

so ist der erste Farbenring wieder ein Kreis, der zweite eine concentrische Ellipse, deren grosse Axe der grössten Elasticitätsaxe parallel ist. Der Kreis und die Ellipse schneiden sich in vier Punkten, welche paarweise auf den wahren optischen Axen liegen.

2) Ist der Index des aufgelegten Mittels gleich dem grössten Hauptindex des Krystalls:

schiedenartigkeit der Verengungen mehr oder weniger Modificationen eintreten.

10) Werfen wir zum Schlusse dieser Abhandlung noch einen Blick auf die aufgestellte Erklärung des vollen Ausflusses durch eine theilweise Aufhebung des Atmosphärendrucks oder gleichsam Uebertragung des Druckes durch die Atmosphäre zurück, so dürfte es zur weiteren Begründung nicht unzweckmässig sein, Beispiele anzuführen, bei denen eine solche Uebertragung, wenn auch unter etwas verschiedenen Verhältnissen, ebenfalls stattfindet und bereits als richtig anerkannt wird.

1. An das Gefäss A (Fig. 54) stosse eine engere, vertikale Röhre B, so wird, beträgt die gesammte Druckhöhe h ohne Berücksichtigung der Druckhöhenverluste, das Wasser bei vollem Querschnitt (nachdem der volle Ausfluss nöthigenfalls hergestellt worden ist) mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ ausfliessen. Dieselbe Geschwindigkeit hat natürlich das Wasser im gleichgrossen Querschnitt F und doch beträgt für denselben die Druckhöhe blos $h - h_1$. Der Grund, dass das Wasser bereits im Querschnitt F eine grössere Arbeit besitzt, als der Druckhöhe $h - h_1$ entspricht, ist einfach darin zu suchen, dass die unter F befindliche Wassersäule den Atmosphärendruck in Bezug auf den Querschnitt F zum Theil aufhebt, um einen der Druckhöhe h_1 entsprechenden Druck vermindert, so dass nun die Geschwindigkeit in F bedingende Druckhöhe nicht blos $h - h_1$, sondern $h - h_1 + h_1 = h$ wird.

2. Beträgt im Gefässe A die Druckhöhe h_0 und bezeichnet H die den Atmosphärendruck messende Höhe einer Wassersäule, so wird, wenn der Zutritt der Luft in die Röhre B verhindert ist, der volle Ausfluss so lange stattfinden, als $h_0 + H > \frac{v^2}{2g}$ ist vorausgesetzt, dass v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre B bezeichnet und der Druckhöhenverlust beim Uebertritt des Wassers aus A nach B nicht berücksichtigt wird; vergl. Hülsse's Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluss", S. 580. Auch in diesem Falle tritt also eine Vermehrung des Wasserdrucks um den Atmosphärendruck durch die entgegengesetzte Aufhebung desselben ein; warum sollte man nicht berechtigt sein, den vollen Ausfluss des Wassers beim Durchgang durch Verengungen auf eine Weise zu erklären, welche mit der Erklärung der eben angeführten Beispiele bis auf den Unterschied, dass der dem Atmosphärendruck entgegenstehende und denselben zum Theil oder ganz aufhebende Druck nicht durch eine Wassersäule, sondern durch einen von dem bewegten Wasser hervorgebrachten Gegendruck gebildet wird, vollkommen übereinstimmt!

---

so fehlt der erste Ring und der zweite ist in zwei der grössten Elasticitäts-axe parallele Grade übergegangen.

4) Ist zuletzt der Index des aufgelegten Mittels kleiner als der mittlere Index des Krystalls:

so fehlt gleichfalls der erste Ring und der zweite ist eine Hyperbel, deren reelle Axe der mittleren Elasticitätsaxe parallel ist.

D. Erscheinungen in Folge konischer Refraction, wenn die brechende Ebene normal zur mittleren Elasticitäts-axe gestellt ist (§. 9 u. 10).

1) Besondere Strahlengruppen, welche ausserhalb der den beiden Farbenringen entsprechenden Strahlenkegel liegen, oder deren Einfallspunkte ausserhalb des geometrischen Orts der Brechungsgrenzen und innerhalb des der Totalreflexion vorbehaltenen Gebietes liegen, entziehen sich dieser Reflexion und sind nur der Grenzrefraction unterworfen. Diese Strahlen bilden Revolutionskegel um die scheinbaren optischen Axen und vereinigen sich nach der Brechung im Krystall zu einem einzigen Strahl, entsprechen also der äusseren konischen und inneren uniradialen Brechung. Sie treffen die brechende Ebene unter verschiedenen Incidenzen und der geometrische Ort ihrer Einfallspunkte ist eine mit beiden Farbenringen concentrische und dieselben berührende Hyperbel, deren reelle Axe parallel einer der scheinbaren optischen Axe ist.

2) Die beiden Strahlenkegel, welche den ersten und zweiten Farbenring, die sich in vier Punkten schneiden (§. 5; II. *A.*), zu Grundflächen und einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, müssen demzufolge auch vier Strahlen, deren Einfallspunkte in der brechenden Ebene eben die Durchschnitte der beiden Farbenringe sind, gemeinschaftlich haben. Diese vier Strahlen erleiden aber nicht die zur Brechungsgrenze gehörige Reflexion, sondern dringen in den Krystall ein und sind der inneren konischen Refraction unterworfen. Sie treten, falls der Krystall durch zwei parallele Flächen begrenzt ist, der Richtung ihres ursprünglichen Einfalls wieder aus und bilden nach dem Austreten einen Cylinder, dessen Grundfläche eine Hyperbel ist. Die Asymptoten dieser Hyperbel sind mit einer wahren und einer scheinbaren optischen Axe gleichgerichtet.

Die beiden der Brechungsgrenze zugehörigen Farbenringe werden um so mehr von einander getrennt erscheinen, je grösser der Unterschied zwischen je zweien der Hauptbrechungsindexe des Krystalls ist. Ausserdem sind sie noch dadurch von einander zu unterscheiden, dass sie zweierlei Strahlenbündeln entsprechen, welche rechtwinklig zu einander polarisirt sind.

Die Bedingungen für den experimentalen Nachweis sind freilich in den meisten Fällen ziemlich schwer zu erfüllen. Da nämlich der Brechungsindex des optisch homogenen Mittels grösser sein muss, als die drei oder wenigstens als zwei Hauptindexe des Krystalls, letztere aber auch merkliche Verschiedenheit unter einander haben müssen, wenn die Farbenringe getrennt hervortreten sollen, so wird man einerseits eine sehr stark brechende Flüssigkeit, andererseits einen Krystall zu suchen haben, dessen

stärkster Hauptindex gegen den der Flüssigkeit sehr schwach, von dem mittleren und kleinsten aber immer noch hinlänglich verschieden ist, wenn anders auch die Beobachtung, welche immer unter einem sehr schiefen, der streifenden Incidenz nahekommendem Winkel geschehen muss, nicht zu schwierig werden soll. Von den Flüssigkeiten wäre Schwefelkohlenstoff die geeignetste, wenn nicht die starke Dispersion desselben wieder störend einwirkte und den Farbenringen eine zu grosse Breite gäbe. Bei Anwendung von mehr homogenem Licht verschwindet zwar dieser Uebelstand theilweise, doch hat man dann wieder mit einem Mangel an Lichtintensität zu kämpfen.

Noch schwieriger ist aber die Wahl der geeigneten Krystalle, indem diese in der Regel zu stark brechend sich erweisen. Am passendsten dürften einige der künstlichen, wasserhaltigen Salze sich herausstellen, die in erwünschter Homogeneität und Grösse freilich nur durch Mittel, über welche die Industrie zu gebieten hat, herzustellen sind.

Kleinere Mittheilungen.

XXXVI. Ueber die Kreisbögen mit rationaler Tangente. Von E. Prouhet (Liouville's Journal, Maiheft 1856).

1. Wenn eine ganze Zahl N in zwei Quadrate a^2 und a'^2 zerlegt ist, so soll jeder Bogen, dessen trigonometrische Tangente einen der vier Werthe

$$+\frac{a}{a'},\quad -\frac{a}{a'},\quad +\frac{a'}{a},\quad -\frac{a'}{a}$$

besitzt, ein Argument von N heissen. Unter der unendlichen Menge von Argumenten, welche hiernach einer bestimmten Zerlegung von N entsprechen, giebt es ein einziges zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$; dieser Bogen werde das Hauptargument von $N = a^2 + a'^2$ genannt. Ist also z. B. a' die grössere der beiden Zahlen a und a', bezeichnet man ferner mit $Arctan$ den spitzen zu einer gegebenen Tangente gehörigen Bogen, und mit Arg das Hauptargument, so lässt sich das Vorige durch die Gleichung

$$Arg\, N = Arg\,(a^2 + a'^2) = Arctan\,\frac{a}{a'}$$

ausdrücken. Jedes andere Argument kann aus dem Hauptargumente hergeleitet werden, es ist nämlich

$$arg\, N = arg\,(a^2 + a'^2) = k\frac{\pi}{2} \pm Arctan\frac{a}{a'},$$

worin arg ein beliebiges anderes Argument und k eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Man kann diesen Satz auch so ausdrücken: wenn α das Hauptargument für die Zerlegung $N = a^2 + a'^2$ und α_k irgend ein anderes derselben Zerlegung entsprechendes Argument bedeutet, so ist $\alpha \pm \alpha_k$ ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ in Zeichen

$$\alpha \pm \alpha_k \equiv 0, \quad mod.\ \tfrac{1}{2}\pi.$$

2. Die Zahl N kann im Allgemeinen auf mehr als eine Weise in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden, es giebt daher soviel verschiedene Hauptargumente derselben, als solcher Zerlegungen möglich sind. So hat z. B. die Zahl 2 nur ein Hauptargument $=\frac{1}{4}\pi$; einer Primzahl von der Form $4n+1$ kommt gleichfalls nur ein Hauptargument zu, weil eine derartige Zahl bekanntlich auf nicht mehr als eine Weise in zwei Quadrate zerlegbar ist. Das Hauptargument einer Quadratzahl $=a^2+0^2$ ist $=0$. Primzahlen von der Form $4n-1$ können nicht in zwei Quadrate zerfällt werden, besitzen also überhaupt keine Argumente. Dasselbe gilt von den zusammengesetzten Zahlen, deren sämmtliche Primfaktoren der Form $4n-1$ angehören, und nur in dem Falle, wo die auf solche Weise zusammengesetzte Zahl ein Quadrat ist, entspricht ihr wieder ein reelles Argument $=0$. Hieraus folgt noch, dass die Anzahl und Grösse der Argumente irgend einer in zwei Quadrate zerlegten Zahl N dieselbe ist wie bei der Zahl m^2N, sobald m nur aus Primfaktoren von der Form $4n-1$ besteht.

3. Untersuchen wir jetzt, wie das Argument eines Produktes gebildet wird. Es sei α ein Argument von $N=a^2+a'^2$, β ein Argument von $P=b^2+b'^2$, also

$$\tan\alpha=\frac{a}{a'},\quad \tan\beta=\frac{b}{b'},$$

so ist identisch

$$NP=(ab'\pm ba')^2+(a'b'\mp ab)^2,$$

mithin wenn ω ein Argument von NP bezeichnet,

$$\tan\omega=\frac{ab'\pm ba'}{a'b'\mp ab}=\frac{\frac{a}{a'}\pm\frac{b}{b'}}{1\mp\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}}=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}=\tan(\alpha+\beta)$$

folglich kann man auch

$$\omega=\alpha\pm\beta \text{ oder } arg\,(NP)=arg\,N\pm arg\,P$$

setzen. Durch mehrmalige Anwendung dieser Formel gelangt man leicht zu der allgemeineren

$$arg\,N\pm arg\,P\pm arg\,Q\pm\ldots=arg\,(NPQ\ldots)$$

d. h. jede algebraische Summe von Argumenten mehrerer Zahlen ist ein Argument des Produktes jener Zahlen.

4. Um ferner zu untersuchen, ob dieser Satz auch umgekehrt gilt, denken wir uns wieder eine Zahl N in zwei Quadrate $a^2+a'^2$ zerlegt, wobei wir Primfaktoren von der Form $4n-1$ ausschliessen weil sie keinen Einfluss auf die Argumente haben, und bezeichnen mit α ein Argument von N. Nach einem bekannten Satze der Zahlenlehre ist jeder Divisor der Zahl $N=a^2+a'^2$ von der nämlichen Form, d. h. die Summe zweier Quadrate, man kann folglich die im Allgemeinen als zusammengesetzt gedachte Zahl N in zwei Faktoren P und Q zerlegen, sodass

$$N=PQ \text{ d. h. } a^2+a'^2=(b^2+b'^2)(c^2+c'^2)$$

oder auch

$$a^2+a'^2=(bc'\pm b'c)^2+(b'c'\mp bc)^2.$$

Es sind daher bei bekannten a, a', b, b' die sich ergebenden Ausdrücke

$$c = \frac{ab' \pm a'b}{b^2 + b'^2}, \quad c' = \frac{a'b' \mp ab}{b^2 + b'^2}$$

ganze Zahlen und zugleich ist

$$Q = \frac{N}{P} = c^2 + c'^2.$$

Nennen wir β und γ die Argumente von P und Q, so haben wir

$$\tan\gamma = \frac{c}{c'} = \frac{ab' \pm a'b}{a'b' \mp ab} = \tan(\alpha \pm \beta)$$

mithin

$$\gamma = \alpha \pm \beta \text{ oder } \alpha = \gamma \pm \beta,$$

und nach der früheren Bezeichnung

$$\arg(PQ) = \arg P \pm \arg Q.$$

Durch mehrmalige Anwendung dieser Schlussweise gelangt man leicht zu der allgemeineren Formel

$$\arg(P^p Q^q R^r \ldots) = p \cdot \arg P \pm q \cdot \arg Q \pm r \cdot \arg R \pm \ldots.$$

d. h. das Argument einer zusammengesetzten Zahl besteht aus den Argumenten ihrer Primfaktoren.

5. Um zu erfahren, ob die Argumente α und β zweier Primzahlen P und Q in einem rationalen Verhältniss zu einander stehen, setzen wir vorläufig

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n} \text{ oder } n\alpha - m\beta = 0,$$

wo m und n relative Primzahlen sind. Nun ist aber eines der Argumente von $P^n Q^m$ gleich

$$n \cdot \arg P - m \cdot \arg Q = n\alpha - m\beta = 0;$$

daraus folgt, dass $P^n Q^m$ ein Quadrat sein muss, was aber nicht möglich ist, weil wenigstens einer der Exponenten m und n ungerade ist. Man erkennt hieran die Unrichtigkeit der Voraussetzung mithin die Richtigkeit des Satzes: Die Argumente zweier Primzahlen sind incommensurabel unter einander.

Da $\frac{1}{4}\pi$ das Argument der Zahl 2 ist, so hat man den weiteren Satz: Die Argumente aller Primzahlen von der Form $4n+1$ sind incommensurabel mit der Kreisperipherie.

6. Eine naheliegende Verallgemeinerung der vorigen Schlussweise ist folgende. Sind $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Argumente der Primzahlen $P, Q, R \ldots$ und $h, i, k \ldots$ beliebige rationale Zahlen, und es sei als noch fraglich die Gleichung

$$h\alpha \pm i\beta \pm k\gamma \pm \ldots = 0$$

aufgestellt, worin immer angenommen werden kann, dass $h, i, k \ldots$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen; wäre nun die vorige Gleichung richtig, so müsste die Zahl

$$P^h Q^i R^k \ldots,$$

von welcher $h\alpha \pm i\beta \pm k\gamma \pm \ldots$ ein Argument darstellt, ein Quadrat sein, was aber nicht möglich ist, weil mindestens eine der Zahlen $h, i, k \ldots$ ungerade ist. Eine algebraische endliche Summe von Primzahlen-

$$1)\qquad \frac{a^2 \cos^2 \lambda}{\varrho^2 - a^2} + \frac{b^2 \cos^2 \mu}{\varrho^2 - b^2} + \frac{c^2 \cos^2 \nu}{\varrho^2 - c^2} = 0,$$

$$2)\qquad \frac{\cos^2 l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{r^2 - b^2} + \frac{\cos^2 n}{r^2 - c^2} = 0,$$

$$3)\qquad \frac{\varrho \cos \lambda}{\varrho^2 - a^2} = \frac{r \cos l}{r^2 - a^2},\quad \frac{\varrho \cos \mu}{\varrho^2 - b^2} = \frac{r \cos m}{r^2 - b^2},\quad \frac{\varrho \cos \nu}{\varrho^2 - c^2} = \frac{r \cos n}{r^2 - c^2}.$$

§. 5.

Anstatt nun die allgemeinen und sehr verwickelten Formeln anzuwenden, welche die Abhängigkeit der Richtung eines einfallenden Strahls von der Richtung der gebrochenen Strahlen ausdrücken, wollen wir uns begnügen, die geometrische Construction, welche die Richtung dieser gebrochenen Strahlen in dem besonderen Falle, wo sie in der Eintrittsebene zurückbleiben, bestimmt, in die Sprache der Algebra zu übersetzen.

§. 6.

Man nehme beispielsweise die brechende Ebene normal zur Y-Axe der mittleren Elasticität an und es sei OP die Spur der Einfallsebene in diese Eintrittsebene. (Fig. 55.) Setzt man $OP = \frac{v}{\sin M} = \varphi$, zieht PK senkrecht zu OP, legt hierauf durch PK Tangentialebenen an die Wellenfläche, deren Mittelpunkt O ist und verbindet O mit den Berührungspunkten, so hat man im Allgemeinen den doppelt gebrochenen Strahl construirt.

In dem vorliegenden besondern Falle muss aber jeder derselben ganz in der Eintrittsebene verbleiben, es müssen demnach (weil die Grösse OP zwei verschiedene Werthe hat, indem die Incidenz für Strahlen, welche an die Grenze der ordentlichen und der ausserordentlichen Brechung gelangen, nicht dieselbe ist) zwei Grade wie PK selbst Tangenten zur Wellenfläche oder zu den Durchschnittscurven derselben mit der brechenden Ebene sein.

Die Gleichungen der Durchschnitte der Wellenfläche mit einer zur Axe der Y normalen Ebene erhält man nun, wenn man in der Gleichung 1) $\cos \mu = 0$ setzt. Die Gleichungen dieser Durchschnittscurven sind demnach

$$\varrho^2 = b^2$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \lambda}{c^2} + \frac{\cos^2 \nu}{a^2}.$$

Für die kreisförmige, den ordentlichen Strahlen entsprechende Durchschnittscurve, deren Gleichung

$$4)\qquad \varrho^2 = b^2$$

ist, fällt die Normale OP mit dem nach dem Berührungspunkt gezogenen Radiusvector zusammen und man hat daher als Gleichung des geometrischen Ortes der einfallenden Strahlen

$$v^2 = b^2 \cos^2 M,$$

oder

$$5)\qquad (v^2 - b^2)(\cos^2 L + \cos^2 N) + v^2 \cos^2 M = 0.$$

Bezüglich der elliptischen Durchschnittscurve, deren Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \lambda}{c^2} + \frac{\cos^2 \nu}{a^2}$$

ist, seien φ, $\cos \chi$, $\cos \psi$ Coordinaten des Punktes P. Da nun OP die Spur der Einfallsebene ist, so hat man

$$\cos L = \sin M \cos \chi, \quad \cos N = \sin M \cos \psi.$$

Die Gleichung der Tangente KP ist

$$\frac{1}{\varrho \varphi} = \frac{\cos \chi \cos \lambda}{c^2} + \frac{\cos \psi \cos \nu}{a^2}$$

und die Gleichung der Normale OP zu dieser Tangente

$$\frac{\dfrac{\cos \chi}{\cos \lambda}}{c^2} = \frac{\dfrac{\cos \psi}{\cos \nu}}{a^2}.$$

Aus dieser, sowie aus den vorhergehenden Gleichungen ergiebt sich

$$\varphi = \sqrt{c^2 \cos^2 \chi + a^2 \cos^2 \psi} = \frac{v}{\sin M}$$

und für die Gleichung des geometrischen Orts der einfallenden Strahlen

$$6) \qquad (v^2 - c^2) \cos^2 L + (v^2 - a^2) \cos^2 N + v^2 \cos^2 M = 0.$$

Von den Gleichungen 5) und 6) ist die erste die eines Revolutionskegels mit einer zur Eintrittsebene senkrechten Umdrehungsaxe, die andere die Gleichung eines Kegels zweiten Grades, dessen Gestalt noch näher zu bestimmen ist. Verbindet man die Gleichungen beider Kegel durch Subtraction, so ist das Resultat

$$7) \qquad (b^2 - c^2) \cos^2 L + (b^2 - a^2) \cos^2 N = 0$$

die Gleichung zweier Ebenen, welche durch die Axe der mittleren Elasticität und durch die wahren optischen Axen (Axen der inneren konischen und der äusseren cylindrischen Brechung) hindurch gehen. Die Kegel 5) und 6) haben demnach vier gemeinschaftliche Erzeugungsgraden, von denen je zwei in derselben Ebene enthalten sind, welches auch übrigens der Werth von v^2 ist, d. h. welche Gestalt auch der Kegel zweiten Grades haben mag.

Die Neigungen der die Kegel erzeugenden Graden gegen ihre Axe sind in den Azimuten der Hauptschnitte bestimmt durch

$$tg^2 M = \frac{v^2}{b^2 - v^2}$$

$$tg^2 M_x = \frac{v^2}{c^2 - v^2}$$

$$tg^2 M_z = \frac{v^2}{a^2 - v^2}.$$

Der Kegel zweiten Grades hat eine elliptische Basis, wenn

$$v^2 < c^2;$$

er reducirt sich auf zwei Ebenen, welche parallel zur Axe der X und symmetrisch gleichgeneigt zur Axe der Y sind, wenn

$$v^2 = c^2;$$

$$r-\frac{a^2}{r}=-\frac{1}{c}\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}\cos l,$$

$$r-\frac{c^2}{r}=-\frac{1}{c}\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\cos n,$$

us

$$8)\qquad \begin{aligned}\frac{r}{b}&=\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n,\\ \frac{b}{r}&=\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n.\end{aligned}$$

raus ergiebt ch unter zwei verschiedenen Formen für die Gleichung gelfläche, welche von den Richtungen der Fortpflanzungsgeschwin-, die in une zigen Nabelstrahl entsprechen, net wird:

$$\begin{aligned}1-&\left(\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n\right)\\ &\times\left(\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n\right)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2 m+&\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos l-\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos n\right)\\ &\times\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos l-\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos n\right)=0.\end{aligned}$$

Nimmt man aber die Richtungen der inneren Fortpflanzungsgeschwindigkeit als gegeben an, so kann man daraus leicht die Richtung der äusseren Fortpflanzungsgeschwindigkeit, d. h. die Richtung der entsprechenden Einfallsstrahlen ableiten. Man hat nämlich zwischen beiden Geschwindigkeiten folgende Beziehungen:

1. Die Richtung der inneren und äusseren Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird durch das Sinusgesetz bestimmt;

2. beide sind in derselben Ebene, der Einfallsebene, enthalten;

3. die inneren Geschwindigkeiten sind bezüglich ihrer Richtungen durch eine Funktion gegeben, für welche die Gleichung 2), oder jede andere Relation wie 8) zwischen l, n, r untergelegt werden kann.

Man hat also mit Berücksichtigung, dass $\sin m=1$ ist,

$$9)\qquad \frac{r}{v}=\frac{1}{\sin M}=\frac{\cos l}{\cos L}=\frac{\cos n}{\cos N}.$$

Eliminirt man mit Hülfe dieser Gleichungen aus 8) die Grössen r, l, n, so hat man für den geometrischen Ort aller einfallenden Strahlen, die ausnahmsweise sich zu einem einzigen gebrochenen Nabelstrahl vereinigen,

$$10)\qquad \frac{v^2}{b^2}=\left(\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos L+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos N\right)^2.$$

Es bezeichne Θ den Winkel, welchen die einfallenden Strahlen mit der scheinbaren optischen Axe (Axe der uniradialen inneren, der koni-

fach ausdrücken, wenn man die Punkte G, H, I, K beachtet, in denen der **Kreis** der Reihe nach von den Seiten AO, OB, BC, CA berührt wird, es ist **nämlich**

$$AB_1 = AK + B_1K = AG + B_1H,$$
$$A_1B = A_1J + BJ = A_1G + BH,$$

mithin

$$AB_1 - A_1B = B_1H - BH - (A_1G - AG)$$
$$= BB_1 - AA_1 = (b_1 - b) - (a_1 - a).$$

Durch Substitution dieses Werthes geht die vorige Formel über in

$$2[(b_1 - b) - (a_1 - a)] = \frac{(ab_1 - a_1 b)\sin\gamma}{r},$$

woraus

$$r = \tfrac{1}{2}\frac{(ab_1 - a_1 b)\sin\gamma}{(b_1 - b) - (a_1 - a)}.$$

Die Coordinaten p und q des Kreismittelpunktes M sind folglich

$$p = q = \frac{r}{\sin\gamma} = \tfrac{1}{2}\frac{ab_1 - a_1 b}{(b_1 - b) - (a_1 - a)};$$

es genügen aber die Werthe $x = p$ und $y = q$ der für die Gerade DD_1 aufgestellten Gleichung, mithin liegt M auf DD_1 w. z. B. w.

Ueberträgt man diese Rechnung in Proportionen, wie es auch bei dem gewöhnlichen elementaren Beweise des Gauss'schen Theoremes der Fall ist, so gelangt man in der That zu einem rein geometrischen Beweise des Satzes; doch bliebe dann eine kürzere und anschaulichere Herleitung immer noch zu wünschen. SCHLÖMILCH.

XXXIX. Eine Eigenschaft der Kegelschnitte.

Construirt man zu einem centralen Kegelschnitte (Ellipse oder Hyperbel) eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt in den Mittelpunkt des ersten Kegelschnitts fällt, und deren Scheitel die Brennpunkte jenes Kegelschnittes sind, so bilden die von einem beliebigen Hyperbelpunkte aus an den Kegelschnitt gelegten Tangenten immer gleiche Winkel mit den Halbachsen des berührten Kegelschnitts. (Nämlich $\angle(t, a) = \angle(u, b)$ wenn a, b die Halbachsen des Kegelschnittes, t und u die von einem Hyperbelpunkte an ihn gelegten Tangenten sind.)

Die genannte Hyperbel wird zu zwei auf einander senkrechten Geraden, sobald der Kegelschnitt in einen Kreis übergeht. Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so muss $a > b$ sein, wenn die erwähnten Tangenten nicht imaginär werden sollen.

Der ausgesprochene Satz gilt auch für die Parabel, wenn man die gleichseitige Hyperbel durch eine im Brennpunkte senkrecht auf der Achse errichtete Gerade vertreten lässt.

Betrachtet man die Abschnitte, welche die genannten Tangenten auf den Achsen des centralen Kegelschnittes bilden, als Coordinaten eines ver-

änderlichen Punktes, so ist der Ort des letzteren eine Hyperbel mit den Halbachsen

$$\frac{\sqrt{a^4 - b^4}}{a} \text{ und } \frac{\sqrt{a^4 - b^4}}{b}.$$

XL. Veränderungen des Sonnenspectrums mit der Höhe der Sonne.

Nach den photographischen Untersuchungen über das Sonnenspectrum, welche Herr Crookes (beauftragt, die meteorologischen Beobachtungen der Sternwarte zu Oxford photographisch zu registriren) veröffentlicht hat (Bülletin der photographischen Gesellschafs zu London, vom 21. Jan. 1856, vergl. *Cosmos Tom. VIII. p.* 90), enthält das weisse Sonnenlicht eine um so grössere Anzahl Strahlen von hoher Brechbarkeit, je höher der Stand der Sonne ist, so dass die Länge des Sonnenspectrums an seinem brechbarsten Ende der Höhe der Sonne fast proportional zu sein scheint. Nicht bloss zeigt das Spectrum vom Mittag zu allen Jahreszeiten eine grössere Ausdehnung an dem stärker brechbaren Ende, als das zu anderen Stunden des Tages aufgefangene, sondern es enthält auch das Spectrum vom Mittage zur Zeit des Sommersolstitiums mehr der brechbaren Strahlen und Strahlen von höherer Brechbarkeit, als das Spectrum vom Mittage einer anderen Jahreszeit. Diese Beobachtungen wurden ermöglicht mit Hülfe eines photographischen Apparates, in welchem Prismen und Linsen von Bergkrystall, welcher den höher brechbareren Strahlen den Durchgang gestattet, statt von Glas angebracht waren.

Diese Thatsachen deuten auf einen absorbirenden Einfluss hin, welchen die Atmosphäre auf Strahlen von höherer Brechbarkeit ausübt, und geben zugleich Anlass zur Erörterung verschiedener interessanter Fragen. Würde sich die Länge des Spectrums noch vergrössern, wenn man es bei senkrechter, im Zenit stehender Sonne, oder bei ganz wolkenlosem Himmel auffinge? Würde man in dieser Richtung die Grenze der brechbaren Sonnen-(Licht-) strahlen erreichen? Oder ist es vielmehr wahrscheinlicher, dass von der Sonne Ströme von Strahlen ausgehen, die, nachdem sie die obere und späteren Schichten der Atmosphäre erreicht haben, aufgefangen und in qualitativ oder quantitativ andere Bewegungsgrössen verwandelt werden, oder deren Schwingungen mit veränderten Wellenlängen, verringerte Brechbarkeit u. s. w. in der Form von Licht und Wärme uns zugeführt werden?

XLI. Neue Methode, die Bilder in Relief zu sehen, von Prof. Zinelli.

Die hier zu beschreibende Methode wendete Professor Zinelli seit mehreren Jahren an, um irgend ein photographisches Bild in dem Effecte eines stereoskopischen Bildes zu sehen.

Das zu betrachtende Bild soll in senkrechter Stellung etwa 3 bis 4 Meter von einem Fenster entfernt auf einem Gestell angebracht werden, damit das Licht diagonal, also mehr von oben herab auf selbiges falle.

Man betrachtet das Bild sodann durch ein Theater-Doppelperspectiv, indem man hierbei durch Versuche bestimmt, welche die geeignetste Entfernung zur Betrachtung ist, denn erstere variirt nach dem Perspective und den Eigenschaften der Augen, weshalb man sich nicht die Mühe verdriessen

lassen soll, den geeigneten Standpunkt aufzusuchen, denn man wird hierfür dann reichlich belohnt, wenn man das Bild den Charakter eines stereoscopischen Bildes mit dem Relief und der Perspective der Natur annehmen sieht.

Man kann auf dieselbe Weise Gemälde und Zeichnungen betrachten; wenn sie gut gemacht sind, ist die Erscheinung dieselbe, im Gegentheil zeigen sich die Fehler im Bilde ganz deutlich.

Grosse Negativs auf diese Weise betrachtet, erzeugen einen imposanten Effekt, namentlich Gebäude, weil selbe der lichten Fenster wegen im Innern erleuchtet zu sein scheinen.

Es ist hierbei immer gut, die Bilder mit einem dunklen Rahmen zu umgeben oder sie gleich in der Camera so zu erzeugen. (Aus *La Lumière* durch Horn's photographisches Journal, 1856. Nr. 10.)

XLII. Ueber eine lange Zeit wirksam bleibende, besonders für telegraphische Zwecke sich eignende Volta'sche Batterie. Von Professor Rud. Böttger. Lässt man eine aus mehreren Elementen bestehende, mit Bunsen'schen Kohlencylindern und amalgamirtem Zink combinirte Batterie (worin beide Elektricitätserreger, durch mattgebrannte Thonzellen von einander getrennt, in verdünnter Schwefelsäure stehen, wie solche gegenwärtig auf den meisten Telegraphenlinien in Anwendung sind) längere Zeit geschlossen, so bemerkt man schon nach wenigen Tagen (ob in Folge eines Schwefeleisengehaltes der Kohle, oder einer Zersetzung der Schwefelsäure, lasse ich zur Zeit dahin gestellt sein) einen auffallenden Geruch nach Schwefelwasserstoffgas, und gleichzeitig eine ungemeine Schwächung des Stroms. Mochte ich nun statt der Bunsen'schen, aus der Fabrik des Herrn Gressler in Erfurt bezogene Kohlencylinder, reine Koaksstücke oder auch die sogenannte Gaskohle (die in den Gasretorten sich ablagernde steinharte Kohle) in Anwendung bringen, — stets machte sich nach einiger Zeit Geschlossenseins der Kette dieser auffallende Geruch nach Schwefelwasserstoffgas bemerklich und in Folge dessen allemal auch eine bedeutende Abnahme der Stromstärke. Ebenso bemerkte ich schon nach wenigen Tagen eine ähnliche Schwächung des Stroms bei geschlossener Batterie, wenn die Kohlencylinder, statt mit Bleistreifen, mit Kupferbändern leitend versehen waren, und zwar lediglich in Folge einer endosmotischen Ueberführung und Ablagerung von partiell gelöstem Kupfer auf die in den mattgebrannten Thonzellen befindlichen Zinkplatten.

Dagegen erwies sich eine nur mit 5 Procent Schwefelsäure haltigem Wasser erregte Batterie, deren Kohlencylinder zuvor in concentrirte Salpetersäure eingetaucht und dann an der Luft etwa einen halben Tag stehen gelassen worden waren, lange Zeit hindurch äusserst wirksam, und vermochte ich bei so behandelten Kohlen oder Koaks in der geschlossenen Kette niemals eine Entwickelung von Schwefelwasserstoffgas wahrzunehmen. (Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a/M. für 1854—1855.)

XLIII. Eine neue Volta'sche Batterie. Die X. Lieferung des *Cosmos* gegenwärtigen Jahrganges (*Tom. III. p.* 253) enthält folgende Beschreibung der Einrichtung und Wirkung einer neuen Volta'schen Batterie, erfunden

von den Herrn LACASSAGNE und THIERS, wobei sich der Referent auf die verschiedenen, etwas dunkel gehaltenen Beschreibungen bezieht, welche drei Lyoner Zeitschriften davon gegeben haben.

Der neue Elektricitätserreger wird aus trocknen Elementen zusammengesetzt, in welchen die sonst gebräuchlichen Flüssigkeiten durch wasserfreie Salze ersetzt sind, die zum feurigen Flusse gebracht werden. Ein Element besteht aus zwei in einander gesetzten Tiegeln, welche durch einen eisernen Cylinder von einander getrennt sind. Der äussere Tiegel wird mit Kochsalz, der innere mit einem Aluminiumsalz angefüllt, ausserdem wird in den inneren noch ein hohler oder massiver Kohlencylinder gestellt. Hierauf wird der Apparat bis zur Kirschrothgluth erhitzt, wobei die Salze in Fluss gerathen, und der Kohlencylinder mit dem Eisencylinder durch einen Leiter verbunden. Sowie letzteres geschehen, entsteht ein starker elektrischer Strom. Ein Elektromagnet, in diesen Leiter eingeschaltet, wurde eben so stark erregt, wie durch ein Bunsen'sches Element von beträchtlicher Grösse, obgleich nur ein sehr kleines dieser neuen Elemente hierzu in Anwendung gekommen war. Ein solches Element soll sich nicht blos mit andern derselben Art auf gewöhnliche Weise, sondern auch mit Elementen anderer Construction zu einer Batterie verbinden lassen. Ausserdem soll hierbei noch ein sehr bemerkenswerthes Nebenprodukt gewonnen werden. Nachdem nämlich das Element etwa zwei Stunden der Wirkung des Feuers ausgesetzt gewesen war, wurde es zerschlagen und man fand auf dem Grunde des Tiegels einen schönen Regulus von Aluminium, bedeckt mit einer Menge Kügelchen desselben Metalls.

XLIV. Mittel zur Beobachtung kleiner Zeittheilchen. Herr SANG hat der schottischen Gesellschaft der Wissensch. und Künste eine Uhr, welche er Chronophor nennt, vorgezeigt, welche sowohl die Vergleichung von Uhren und Chronometern, als auch die Beobachtung sehr kleiner Bruchtheile einer Secunde ermöglichen soll. Die gewöhnliche Art und Weise den Gang eines Chronometers kennen zu lernen erfordert eine längere Zeit hindurch sogar mehrere Tage fortgesetzte Beobachtung desselben und man erfährt dadurch immer nur seinen mittleren Gang. Das von Herrn S. vorgeschlagene Princip der Beobachtung ist dem des Verniers analog, wozu ein Chronometer dient, welches bei seinem normalen Gange innerhalb eines und desselben Zeitraums einen Schlag mehr oder weniger als ein gewöhnliches Chronometer macht, sodass z. B. das Sperrad des Chronophors 119 Schläge in der Minute giebt, während das eines Chronometers, welches halbe Secunden anzeigt, 120 Schläge macht. Vermittels dieser Vorrichtung lassen sich Bruchtheile einer Secunde genau beobachten und es kann, weil die Eintheilung eine beliebige ist, die Schärfe der Beobachtung soweit es das Gehör gestattet getrieben werden. Diese Methode soll auch eine Abkürzung der zur Beobachtung und Vergleichung der Seeuhren erforderlichen Zeit gewähren und dürfte somit für die Schifffahrt von grossem Nutzen sein.

(*Bullet. de la Société d'Encouragement*, *Tom. III. Janv.* 1856, *p.* 59. nach *Practical Mechanic's Journal*, *Tom. VIII.*)

XLV. Oréide, eine dem Golde ähnliche Metalllegirung. In der Versammlung der Mitglieder des Vereins für Gewerbfleiss zu Berlin im Februar d. J. zeigte Director Dr. DRUCKENMÜLLER Löffel und Gabel von einer dem Golde täuschend ähnlichen Mischung, in Paris gefertigt, vor. Die Metalllegirung wird Oréide genannt und besteht nach einer im Laboratorium des königl. Gewerbe-Instituts zu Berlin angestellten Analyse genau aus 90 Theilen Kupfer und 10 Theilen Zink. Seiner Bestandtheile wegen dürfte es sich weniger zu Speisegeräthen als zu Ornamenten, Beschlägen und dergleichen eignen. Wenn es erblindet, so kann es durch Putzen vollkommen goldglänzend gemacht werden. (Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen. 1856. S. 27.)

XLVI. Ueber die Beschaffenheit des Ozons. Die bisherigen Resultate der Untersuchungen über die Eigenschaften und das Verhalten dieses eigenthümlichen Körpers gehen bekanntlich darauf hinaus, dass vor allen die nähern Umstände, unter welchen sich derselbe erzeugt hat, zu berücksichtigen sind, und dass die nach verschiedenen Bereitungsarten gewonnenen gleichmässig mit dem Namen Ozon belegten Substanzen nicht identisch sind. Man hat in dieser Beziehung hauptsächlich folgende drei Entstehungsweisen des Ozons von einander zu unterscheiden sich veranlasst gesehen:

1. Wenn elekfrische Funken in atmosphärischer Luft oder in Sauerstoffgase überspringen.
2. Wenn reines oder Säuren und Salz haltiges Wasser durch den Voltaschen Strom zersetzt wird, wobei das Ozon mit dem Sauerstoff am positiven Pol auftritt.
3. Wenn gewisse Körper, namentlich Phosphor bei gewöhnlicher Temperatur langsam in der atmosphärischen Luft verbrennen.

Die meisten Untersuchungen scheinen bisher darauf hinzudeuten, dass das auf die erste Weise beim Ueberspringen elektrischer Funken entstandene Ozon blos Sauerstoff in einem allotropischen Zustande sei, dass dagegen das bei der Elektrolyse des Wassers gebildete Ozon ein Wasserstroffoxyd von der Formel HO_3 sei, und dass endlich das durch Verbrennen des Phosphors erhaltene Ozon entweder nur Sauerstoff oder auch eine Verbindung von Sauerstoff und Wasserstoff sei. Thomas Andrews, Professor der Chemie in Belfast, hat nun die Frage, ob das unter den genannten verschiedenen Umständen erzeugte Ozon eine und dieselbe oder verschiedene Substanzen vorstellt, und welche Zusammensetzung und Beschaffenheit des Ozons in dem einen oder anderen Falle hat, auf's neue zum Gegenstand einer ausführlichen und genauen Experimentaluntersuchung gemacht (Phil. Fr. f. 1855; Poggend. Annal. Bd. 98, S. 435), deren Resultate den Wasserstoff (ebenso auch den Stickstoff) als einen Bestandtheil des Ozons gänzlich verläugnen. Sie ergeben insbesondere, dass bei der Elektrolyse des Wassers keine Verbindung von der Zusammensetzung HO_3 gebildet wird, und dass Ozon, auf welche Weise es sich auch entwickelt hat, ein und dieselbe Substanz von gleicher Beschaffenheit und kein (im gewöhnlichen Sinne) zusammengesetzter Körper, sondern Sauerstoff in einer allotropischen Modification ist. Von dem Verhalten und von den Eigenschaften, welche dem Ozon, aus welcher Quelle es auch stammen mag, gleichmässig zukommen möge nur noch folgendes erwähnt werden:

Alles Ozon wird von Manganhyperoxyd in Folge katalytischer Wirkung zerstört; desgleichen wird es durch einfache Temperaturerhöhung in reinen Sauerstoff verwandelt, und zwar um so schneller, je höher die Temperatur steigt (bei gegen 240° verschwindet jede Ozonreaction). Jedes Ozon, direct mit Wasserdampf beim Siedepunkt in Berührung gebracht, wird sofort zerstört. Das Ozon, wie es auch bereitet ist, besitzt gleichen Geruch und das Bleichvermögen ohne vorhergegangene saure Reaction. Alles Ozon zersetzt in gleicher Weise das Jodkalium unter Bildung von jodsaurem Kali und bringt gelöste oxydirbare Stoffe, wie schwefelsaures Eisenoxydul, auf eine höhere Oxydationsstufe.

XLVII. Erscheinung des lange andauernden Siedens einer übersättigten Glaubersalzlösung. Der bekannte, zuerst von Löwel angeregte Versuch, eine in einem Glaskolben zuerst der Siedehitze ausgesetzte concentrirte Lösung von Glaubersalz bei Luftabschluss gehörig abkühlen zu lassen, wobei sie nicht krystallisirt, um sie dann auf verschiedene Weise plötzlich zum Krystallisiren zu bringen, — hat Herrn Rud. Böttger Gelegenheit gegeben, ein nicht uninteressantes Phänomen zu beobachten, welches wegen seiner Leichtigkeit es hervorzurufen, sowie wegen seines instructiven Charakters bekannt zu werden verdient. Füllt man nämlich ein Glaskölbchen mit etwas langem Halse bis auf etwa drei Viertel seines Raumes mit einer concentrirten Lösung von Glaubersalz, bringt diese über einer Weingeistlampe in heftiges Sieden und erhält sie darin, um jede Spur atmosphärischer Luft auszutreiben, einige Minuten lang der Art, dass ununterbrochen aus dem Halse des Kölbchens ein dichter Dampfstrahl emporsteigt, und verschliesst dann, während dieses stattfindet, so schnell als nur immer möglich den Hals des Kölbchens mit einem zuvor gehörig erweichten, der Oeffnung des Halses wohl angepassten Korkpfropfen; so sieht man, selbst nach Entfernung des Kölbchens von der Wärmequelle den Inhalt desselben oft noch nach einer halben, ja nicht selten sogar noch nach einer ganzen Stunde sieden, d. h. so lange, als die Salzlösung heisser ist, als die den luftleeren Raum des Kölbchens umschliessende Glaswandung. Hat endlich das Phänomen des Aufwallens oder Siedens aufgehört, so lässt es sich dennoch auf kurze Zeit von Neuem wieder hervorrufen, sobald man die Wandung des obern Theiles vom Kölbchen mit etwas angefeuchtetem Fliesspapier berührt. (Jahresber. des physik. Vereins zu Frankfurt a/M. Jahrg. 1855.)

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

XVIII.

Bemerkungen und Untersuchungen über einige Gegenstände der Ballistik.

Von W. H. von Rouvroy,

Königl. Sächs. General-Major.

Die Bewegung der Geschosse unserer Feuerwaffen bietet gewiss eines der schwierigsten und interessantesten Probleme der Dynamik dar. In gewisser Beziehung ist es allerdings auch eines der undankbarsten; denn die Formeln, auf welche die Theorie führt, sind für den Gebrauch in der Praxis zu verwickelt, und einige Constanten, welche in denselben vorkommen, müssen zur Zeit noch für jedes neue Geschütz oder Geschoss durch Schiessversuche ermittelt werden, welche wenigstens einen Theil von dem, was durch jene Formeln gefunden werden kann, unmittelbar geben. Man würde indessen sehr irren, wenn man diese unmittelbaren Ergebnisse der Praxis für ganz frei von kleinen Mängeln und innern Widersprüchen halten wollte. Die Temperatur und der Feuchtigkeitsgehalt der Luft bei der Bereitung des Schiesspulvers und während der Aufbewahrung desselben, namentlich in den letzten Wochen und Tagen vor den Versuchen, sind nicht ohne Einfluss auf die Stärke des Pulvers, wirken aber auch während der Versuche selbst auf deren Resultate ein, indem sie entweder das Zerfliessen oder die Verhärtung des Pulverrückstandes in den Geschützröhren und Gewehren begünstigen. Helles Sonnenlicht, welches die Gewehre erwärmend, ebenfalls die letztgedachte Wirkung hervorbringt, sich auf Visir und Korn spiegelnd, das Zielen stört, die hellere oder düstere Beleuchtung des Zieles selbst, die gerade herrschenden Winde und noch manche andere Umstände tragen zur Veränderung der Schiessresultate bei. Verallgemeinert man nun dergleichen Resultate durch Berechnung einer Schusstafel, welche in der Praxis das Rechnen überflüssig machen soll, und bedient man sich hierbei einer gewöhnlichen Interpolationsformel, so giebt die Schusstafel jene Resultate allerdings genau, aber auch mit ihren Fehlern und Widersprüchen wieder. Namentlich kann dadurch leicht der Einfluss, welchen Visirhöhenänderungen auf die Schussweiten ausüben, in dem einen Theil der Tafel zu gross und in dem anderen Theil derselben zu klein erscheinen, und gerade dies ist bei dem praktischen Gebrauch der Tafeln besonders störend. Das sicherste Mittel zur Vermeidung von dergleichen Uebelständen besteht nun offenbar darin, dass man die unmittelbaren Resultate der Schiessversuche zur Bestimmung der in den ballistischen Formeln vorkommenden Constanten benutzt, die Schusstafel selbst aber nach jenen Formeln be-

2. Di[illegible] N kann im Allgemeinen auf mehr als eine Weise in die Summe zw[illegible] Quadrate zerlegt werden, es giebt daher soviel verschiedene Hauptargumente derselben, als solcher Zerlegungen möglich sind. So hat z. B. die Zahl 2 nur ein Hauptargument $= \frac{1}{4}\pi$; einer Primzahl von der Form $4n+1$ kommt gleichfalls nur ein Hauptargument zu, weil eine derartige Zahl bekanntlich auf nicht mehr als eine Weise in zwei Quadrate zerlegbar ist. Das Hauptargument einer Quadratzahl $= a^2 + 0^2$ ist $= 0$. Primzahlen von der Form $4n-1$ können nicht in zwei Quadrate zerfällt werden, besitzen also überhaupt keine Argumente. Dasselbe gilt von den zusammengesetzten Zahlen, deren sämmtliche Primfaktoren der Form $4n-1$ angehören, und nur in dem Falle, wo die auf solche Weise zusammengesetzte Zahl ein Quadrat ist, entspricht ihr wieder ein reelles Argument $= 0$. Hieraus folgt noch, dass die Anzahl und Grösse der Argumente irgend einer in zwei Quadrate zerlegten Zahl N dieselbe ist wie bei der Zahl $m^2 N$, sobald m nur aus Primfaktoren von der Form $4n-1$ besteht.

3. Untersuchen wir jetzt, wie das Argument eines Produktes gebildet wird. Es sei α ein Argument von $N = a^2 + a'^2$, β ein Argument von $P = b^2 + b'^2$, also

$$\tan\alpha = \frac{a}{a'}, \quad \tan\beta = \frac{b}{b'},$$

so ist identisch

$$NP = (ab' \pm ba')^2 + (a'b' \mp ab)^2,$$

mithin wenn ω ein Argument von NP bezeichnet,

$$\tan\omega = \frac{ab' \pm ba'}{a'b' \mp ab} = \frac{\frac{a}{a'} \pm \frac{b}{b'}}{1 \mp \frac{a}{a'}\frac{b}{b'}} = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} = \tan(\alpha + \beta)$$

folglich kann man auch

$$\omega = \alpha \pm \beta \text{ oder } \arg(NP) = \arg N \pm \arg P$$

setzen. Durch mehrmalige Anwendung dieser Formel gelangt man leicht zu der allgemeineren

$$\arg N \pm \arg P \pm \arg Q \pm \ldots = \arg(NPQ\ldots)$$

d. h. jede algebraische Summe von Argumenten mehrerer Zahlen ist ein Argument des Produktes jener Zahlen.

4. Um ferner zu untersuchen, ob dieser Satz auch umgekehrt gilt, denken wir uns wieder eine Zahl N in zwei Quadrate $a^2 + a'^2$ zerlegt, wobei wir Primfaktoren von der Form $4n-1$ ausschliessen weil sie keinen Einfluss auf die Argumente haben, und bezeichnen mit α ein Argument von N. Nach einem bekannten Satze der Zahlenlehre ist jeder Divisor der Zahl $N = a^2 + a'^2$ von der nämlichen Form, d. h. die Summe zweier Quadrate, man kann folglich die im Allgemeinen als zusammengesetzt gedachte Zahl N in zwei Faktoren P und Q zerlegen, sodass

$$N = PQ \text{ d. h. } a^2 + a'^2 = (b^2 + b'^2)(c^2 + c'^2)$$

oder auch

$$a^2 + a'^2 = (bc' \pm b'c)^2 + (b'c' \mp bc)^2.$$

Es sind daher bei bekannten a, a', b, b' die sich ergebenden Ausdrücke

gering, als dass der Praktiker immer in der Lage sein sollte, die anfänglichen Geschwindigkeiten der Geschosse, deren Bahnen er untersuchen will, direkt bestimmen zu können, sondern er hat dazu oft keine anderen Grundlagen, als die Ergebnisse der angestellten Schiessversuche.

II. Die Richtung, welche der Schwerpunkt des Geschosses in dem Augenblicke besitzt, in welchem das Letztere aus dem Geschützrohre tritt — d. i. die Tangente des Anfangspunktes der Flugbahn — denkt man sich im Allgemeinen mit der Richtung der Seelenaxe*) zusammenfallend oder doch parallel, so dass der Neigungswinkel jener Axe gegen eine Horizontalebene — der Elevationswinkel des Geschützes — zugleich die Lage jener Tangente bestimmt. Es ist jedoch auch hierbei eine kleine Berichtigung zu machen, weil:

1. vermöge des Spielraums die Richtung des Schwerpunktes des Geschosses nicht vollständig parallel mit der Seelenaxe zu sein braucht,
2. die Seelenaxe nicht immer genau den Elevationswinkel besitzt, welchen man derselben gegeben zu haben glaubt. Am ungenauesten ist die direkte Messung der Elevationswinkel mit den dazu bestimmten Gradbögen; denn Elevationsunterschiede bis zu ¼ Grad sind dabei oft nicht mehr bemerklich. Sicherer bestimmt man — wie es gewöhnlich geschieht — jenen Winkel aus der bekannten Stellung der am Geschütz oder Gewehr angebrachten Visirpunkte gegen die Seelenaxe und aus der Entfernung und etwaigen Höhe des Zielpunktes von und über dem hinteren Visirpunkte.

Eine vollständige Genauigkeit giebt aber auch dieses Verfahren nicht, denn die Reflexion des Sonnenlichts auf den Kanten des Kornes, die Beugung des Lichts an den Kanten des Visirs, die grössere oder geringere Entfernung, hellere oder dunklere Beleuchtung des Zieles, die Helligkeit oder Dunkelheit seines Hintergrundes u. s. w. veranlassen den Zielenden unwillkürlich mit dem Auge eine etwas andere Stellung gegen die als Visirpunkte vorausgesetzten Punkte zu nehmen, und verursachen mithin eine Aenderung in der Neigung der wahren Visirlinie gegen die Seelenaxe.

Um nun alle aus den gedachten Umständen entspringende Verschiedenheiten zwischen der beabsichtigten und der wirklich eingetretenen Richtung des Geschützes soweit auszugleichen, als dies überhaupt möglich ist, kann man den Unterschied zwischen der scheinbaren Richtung der Seelenaxe und der Richtung, in welcher die Geschosse das Geschützrohr verlassen, durch das Schiessen gegen ein sehr nahes Ziel ermitteln. Allerdings kommt hierbei nicht allein die Lage der Punkte, in welcher die Zielfläche getroffen wird, gegen den eigentlichen Zielpunkt, sondern auch der Abstand des vorderen Visirpunktes von der Seelenaxe, und endlich selbst die Grösse des Raumes in Betracht, welchen die Geschosse während ihrer Bewegung bis zum Ziel vermöge der Schwerkraft durchfallen. Bei der geringen Länge der durchlaufenen Bahn ist jedoch auch dieser Fallraum nur sehr gering, so dass selbst eine ganz ungefähre Schätzung der Geschwindigkeit des Geschosses hinreicht, um denselben mit der für obigen Zweck genügenden Genauigkeit zu bestimmen.

Der Winkel, um welchen sich nach den Ergebnissen eines derartigen Versuchs die ursprüngliche Richtung des Geschosses — an der Geschütz-

*) Unter der Seele eines Geschützes oder Gewehres versteht man den hohlen Raum, welcher die Ladung und das Geschoss aufnimmt, unter dem Spielraum den Unterschied der Durchmesser der Seele und des Geschosses.

gumenten, deren jedes mit einem rationalen Faktor multicirt ist, kann daher nicht gleich Null sein.

Für $h = 1$ und $P = 2$ d. h. $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ erhält man den Zusatz: Die eisperipherie kann nicht durch eine algebraische endhe Summe von Primzahlenargumenten ausgedrückt wer-, deren jedes mit einem rationalen Faktor multiplicirt ist.

7. Nennen wir ν das Argument der zusammengesetzten Zahl

$$N = P^p Q^q R^r \dots$$

$\alpha, \beta, \gamma \dots$ die Argumente ihrer Primfaktoren $P, Q, R \dots$, so haben wir dem früheren

$$\nu = p\alpha \pm q\beta \pm r\gamma \pm \dots$$

dabei ist nicht zu [illegible], d[illegible] [illegible]öge der Gleichungen

$$N = n^2 + n'^2, \quad tan\, \nu = \frac{n}{n'}$$

Tangente des Bogens ν eine rationale Zahl sein muss. Wäre nun ν nmensurabel mit π oder mit $\frac{1}{4}\pi = arg\, 2$, so würde

$$\nu = k \tfrac{1}{4}\pi = k\,.\, arg\, 2$$

gesetzt werden können, wo k einen rationalen Faktor bedeutet, dann würde aber die vorige Gleichung in

$$k\,.\, arg\, 2 - p\alpha \mp q\beta \mp r\gamma \mp \dots = 0$$

übergehen und dies ist nach dem früheren Satze eine unmögliche Relation. Also: Jeder von $\frac{1}{4}\pi$ verschiedene Bogen, dessen Tangente in commensurablem Verhältniss zum Halbmesser steht, ist incommensurabel gegen die Peripherie; ferner: „Das Quadrat ist das einzige regelmässige Tangentenvieleck, dessen Umfang in rationalem Verhältniss zum Radius steht.

8. Um zu entscheiden, ob zwei Bögen, deren rationale Tangenten $\frac{a}{a'}$ und $\frac{b}{b'}$ sind, ein commensurables Verhältniss zu einander haben, muss man die Primfaktoren der beiden Zahlen $a^2 + a'^2$ und $b^2 + b'^2$ aufsuchen. Sind diese Primfaktoren in beiden Fällen nicht dieselben, so ist jenes Verhältniss incommensurabel. Dasselbe findet statt, wenn zwar die Primfaktoren die nämlichen, aber ihre Exponenten nicht proportional sind. Aus beiden Bemerkungen zusammen folgt: Das Verhältniss

$$Arctan\, \frac{a}{a'} \quad : \quad Arctan\, \frac{b}{b'}$$

ist nur dann ein rationales, wenn die Gleichung

$$(a^2 + a'^2)^m = (b^2 + b'^2)^n$$

stattfindet, worin m und n ganze positive Zahlen bedeuten.

Als leichte Consequenz der vorigen Sätze erwähnen wir schliesslich noch folgende: Wenn $P, Q, R \dots$ verschiedene Primzahlen von der Form $4n + 1$ und $a, b, c \dots$ beliebige ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, so kann kein aliquoter Theil des Bogens

mente der Oberfläche eines Geschosses erleiden, jedesmal in eine Mittelkraft vereinigen lassen, deren Richtung derjenigen der Bewegung gerade entgegengesetzt wäre. Von den genannten Vorbedingungen wird aber wahrscheinlich keine einzige vollständig erfüllt, und daher ist auch kein Grund vorhanden, um anzunehmen, dass die gedachte Mittelkraft die oben angeführte Richtung haben müsse. Unter allen Umständen kann man sich aber dieselbe wieder in zwei Composanten zerlegt denken, von denen die eine die gedachte Richtung und die andere eine auf diese rechtwinklige Richtung besitzt. Wir werden daher — von dieser Freiheit Gebrauch machend — jede dieser Composanten für sich discutiren.

V. Die erste Composante des Luftwiderstandes, deren Richtung derjenigen des Schwerpunktes im Geschoss entgegengesetzt ist, und die also nach der bisher gewöhnlichen Annahme, als der Gesammtwiderstand der Luft gegen ein Geschoss betrachtet wurde, hat bekanntlich bereits Newton berechnet und z. B. für ein kugelförmiges Geschoss dem Gewicht einer Luftsäule gleich gefunden, deren Grundfläche die grösste Kreisfläche der Kugel und deren Höhe die Hälfte ihrer Geschwindigkeitshöhe ist. Bei der Bestimmung dieser Kraft ist jedoch weder auf eine Verdichtung der Luft vor, noch auf eine Verdünnung derselben hinter der Kugel Rücksicht genommen, und da eines wie das andere sicherlich eintritt, so ist auch der obige Ausdruck für den Widerstand der Luft gegen ein kugelförmiges Geschoss gewiss zu klein. Wird derselbe mit N und der wirklich stattfindende Widerstand mit CN bezeichnet, so muss demnach der Coefficient C stets grösser als 1 sein. Es fragt sich aber überhaupt, ob derselbe für verschiedene Geschwindigkeiten des Geschosses constant ist, und die Erfahrung scheint dem zu widersprechen, denn Hutton fand durch eine Reihe von sehr sorgfältig angestellten Versuchen unter anderen folgende Werthe von C.

Geschwindigkeit des Geschosses in englischen Fussen.	Werth von C.
5′	1,2
25′	1,27
100′	1,36
400′	1,43
1000′	1,77
1500′	2,06
2000′	2,00

Eine vollständige Richtigkeit ist, bei der grossen Schwierigkeit derartiger Versuche obigen Resultaten an sich nicht beizumessen, und daher kann man zur Erleichterung der ballistischen Rechnungen von einem strengen Festhalten an denselben absehen. Allein so lange keine anderen Gründe dagegen sprechen, erscheint es immer zweckmässig, wenigstens bei Schüssen mit grossen anfänglichen Geschwindigkeiten für C eine solche Funktion der Geschwindigkeit v in Rechnung zu bringen, welche, ohne die Integrationen wesentlich zu erschweren, die von Hutton gefundene Zunahme von C mit v ungefähr ausdrückt, und hierzu empfiehlt sich besonders der von Euler vorgeschlagene Ausdruck

$$C = a(1 + jv^2)$$

in welchen die Constanten a und j der obigen Tabelle ungefähr entsprechend, oder nach anderen vorliegenden Gründen beliebig angenommen werden können.

Der Grund, warum der Euler'sche Ausdruck bisher nur wenig Anwendung gefunden hat, liegt wohl hauptsächlich in dem Umstande, dass bisher von dem Vorhandensein der unten betrachteten zweiten Composante des Luftwiderstandes ganz abgesehen wurde; denn dies hatte die Folge, dass Werthe von C, welche sich den Hutton'schen Angaben einigermassen näherten, bei den ballistischen Rechnungen auf Widersprüche führten. Bestimmte man nämlich aus jeder der Schussweiten, welche ein gewisses Geschoss bei unveränderten Geschützladungen, aber unter verschiedenen Elevationswinkeln erreicht hatte, die anfängliche Geschwindigkeit, so fand sich dieselbe gewöhnlich um so grösser, je grösser der Elevationswinkel war. Benutzte man umgekehrt die aus den flächeren Bahnen berechnete anfängliche Geschwindigkeit, um für die höheren Bahnen die Lage ihres Endpunktes zu bestimmen, so ergab sich diese Lage in der Regel viel tiefer als dieselbe in der Wirklichkeit gewesen war. Man suchte nun diese Widersprüche zwischen Theorie und Praxis zunächst in der über die Grösse des Luftwiderstandes gemachten Annahme; allein in neuerer Zeit hat der königl. preuss. Artillerie-Oberstlieutenant Otto in einer schönen, theils im Archiv für Officiere des königl. preussischen Ingenieurcorps (33. Band, S. 75), theils in zwei besonderen Abhandlungen*), veröffentlichten Arbeit nachgewiesen, dass jene Widersprüche durch Veränderungen in der Annahme des direkten Widerstandes der Luft nicht beseitigt werden können, sondern dass dies allein durch Berücksichtigung der zweiten Composante des Luftwiderstandes möglich ist.

Hält man sich erst hiervon überzeugt, und der Verfasser glaubt, dass auch die gegenwärtige Arbeit mit dazu beitragen werde, diese Ueberzeugung immer allgemeiner zu begründen, so schwinden auch die Bedenken und Einwürfe gegen die Anwendung des Euler'schen Ausdrucks für C und gegen die Bestimmung der darin vorkommenden Constanten aus Hutton's Versuchen, wenigstens so lange, bis genaue Zeitmessungen nach der Andeutung in Nr. III., oder andere entsprechende Versuche zu einer noch sicherern Bestimmung von C führen.

VI. Nachdem bereits in Nr. V. angedeutet wurde, dass eine Uebereinstimmung zwischen Theorie und Praxis ohne Berücksichtigung der zweiten Composante des Luftwiderstandes, welche in dem Folgenden stets mit S bezeichnet werden möge, nicht erreicht werden kann, so bleibt nur noch die Betrachtung der Gründe übrig, welche auch direkt für die Annahme einer solchen seitlichen Wirkung der Luft auf die Geschosse sprechen. Unter diesen Gründen steht die leicht erklärliche Rotation aller Geschosse oben an; es sind jedoch bei kugelförmigen Geschossen in dieser Beziehung folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1. wenn dergleichen Geschosse, deren Schwerpunkt in Folge ihrer innern Construction einen beträchtlichen Abstand vom Mittelpunkt hat, so geladen werden, dass sich ihr Schwerpunkt entweder gerade unter oder gerade über dem Mittelpunkt befindet, überdies die möglichst centrale Wirkung der Pulverladung durch deren Lage in der cylindrischen Kammer**) des Geschützrohres gesichert und dem Wiederan-

*) Hilfsmittel für ballistische Rechnungen 1. und 2. Lieferung. Berlin, 1855.

**) Kammer wird der hintere zur Aufnahme der Pulverladung bestimmte Theil der Seele eines Geschützrohres genannt, wenn derselbe enger als der übrige Theil der Seele ist.

fach ausdrücken, wenn man die Punkte G, H, I, K beachtet, in denen der Kreis der Reihe nach von den Seiten AO, OB, BC, CA berührt wird, es ist nämlich

$$AB_1 = AK + B_1K = AG + B_1H,$$
$$A_1B = A_1J + BJ = A_1G + BH,$$

mithin

$$AB_1 - A_1B = B_1H - BH - (A_1G - AG)$$
$$= BB_1 - AA_1 = (b_1 - b) - (a_1 - a).$$

Durch Substitution dieses Werthes geht die vorige Formel über in

$$2\,[(b_1 - b) - (a_1 - a)] = \frac{(ab_1 - a_1b)\sin\gamma}{r},$$

woraus

$$r = \tfrac{1}{2}\frac{(ab_1 - a_1b)\sin\gamma}{(b_1 - b) - (a_1 - a)}.$$

Die Coordinaten p und q des Kreismittelpunktes M sind folglich

$$p = q = \frac{r}{\sin\gamma} = \tfrac{1}{2}\,\frac{ab_1 - a_1b}{(b_1 - b) - (a_1 - a)};$$

es genügen aber die Werthe $x = p$ und $y = q$ der für die Gerade DD_1 aufgestellten Gleichung, mithin liegt M auf DD_1 w. z. B. w.

Ueberträgt man diese Rechnung in Proportionen, wie es auch bei dem gewöhnlichen elementaren Beweise des Gauss'schen Theoremes der Fall ist, so gelangt man in der That zu einem rein geometrischen Beweise des Satzes; doch bliebe dann eine kürzere und anschaulichere Herleitung immer noch zu wünschen. SCHLÖMILCH.

XXXIX. Eine Eigenschaft der Kegelschnitte.

Construirt man zu einem centralen Kegelschnitte (Ellipse oder Hyperbel) eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt in den Mittelpunkt des ersten Kegelschnitts fällt, und deren Scheitel die Brennpunkte jenes Kegelschnittes sind, so bilden die von einem beliebigen Hyperbelpunkte aus an den Kegelschnitt gelegten Tangenten immer gleiche Winkel mit den Halbachsen des berührten Kegelschnitts. (Nämlich $\angle(t, a) = \angle(u, b)$ wenn a, b die Halbachsen des Kegelschnittes, t und u die von einem Hyperbelpunkte an ihn gelegten Tangenten sind.]

Die genannte Hyperbel wird zu zwei auf einander senkrechten Geraden, sobald der Kegelschnitt in einen Kreis übergeht. Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so muss $a > b$ sein, wenn die erwähnten Tangenten nicht imaginär werden sollen.

Der ausgesprochene Satz gilt auch für die Parabel, wenn man die gleichseitige Hyperbel durch eine im Brennpunkte senkrecht auf der Achse errichtete Gerade vertreten lässt.

Betrachtet man die Abschnitte, welche die genannten Tangenten auf den Achsen des centralen Kegelschnittes bilden, als Coordinaten eines ve

nicht darüber in Zweifel sein, dass die resp. hoch oder weit vom Geschütz einschlagenden Geschosse von unten nach oben, und die tief oder kurz treffenden von oben nach unten rotirt haben. Soll daher eine ballistische Untersuchung über dergleichen Schüsse angestellt werden, so muss man beide Gruppen trennen, und die aus der Rotation entstehende seitliche Wirkung des Luftwiderstandes bei der ersteren Gruppe von unten nach oben wirkend und bei der zweiten Gruppe von oben nach unten wirkend annehmen.

Im dritten Falle ist die drehende Wirkung des Pulvergases auf die Geschosse durch die Einrichtung der Munition möglichst vermindert worden. Vollständig beseitigt wird dieselbe aber nicht, weil, abgesehen von nur zufälligen Unregelmässigkeiten in der Entzündung der Pulverladung u. s. w.

a) die oben gedachte Entzündung nicht in der Seelenaxe, sondern von oben erfolgt,

b) das Pulvergas über dem Geschoss wegströmt und dabei einen Druck von oben nach unten gegen dasselbe ausübt,

c) das Geschoss in dem Augenblick, in welchem es sich in Bewegung setzt, auf der unteren Seelenwand eine gewisse Reibung erleidet.

Alle diese Umstände scheinen das Eintreten der Rotationen von oben nach unten zu bedingen und wird daher die unleugbare grössere Regelmässigkeit der Schüsse mit dergleichen Munition nicht blos in der geringeren Geschwindigkeit, sondern auch in einer immergleichen Richtung ihrer Rotationen gesucht, d. h. glaubt man eine aus diesen Rotationen hervorgehende Ablenkung aller Geschosse nach einer bestimmten Richtung annehmen zu können, so sollte man meinen, diese Ablenkung müsste wie bei unterwärts gelegtem Schwerpunkt d. h. nach unten erfolgen. Dem widerspricht aber in dem vorliegenden Falle die Erfahrung auf das Bestimmteste, denn:

1. wurde, wie bereits in der vorläufigen Bemerkung Nr. II. erwähnt, mit der gleichen Munition beim Schiessen auf 30 Ellen Entfernung der Abgangswinkel $3\frac{1}{2}'$ und bei dem Schiessen auf $133\frac{1}{3}$ Ellen Entfernung ein noch grösserer Abgangswinkel beobachtet;
2. weist die unten folgende Rechnung nach, dass auf diese Geschosse während ihrer Bewegung eine bedeutende Kraft von unten nach oben drückte.

Man muss daher wohl annehmen, dass in denjenigen Geschützröhren, welche zu den gedachten Versuchen angewendet wurden, die grosse Mehrzahl der Geschosse an dem vorderen Theil der oberen Seelenwand anschlägt, und dadurch eine drehende Bewegung von unten nach oben erhält. Einzelne vorkommende grosse Abweichungen der Schüsse scheinen in dem Unterbleiben dieses oberen Anschlages ihren Grund zu haben; denn die sehr abweichenden Schussweiten sind erfahrungsmässig stets zu klein und nie zu gross, und dies erklärt sich durch den Umstand, dass der Einfluss der durch den Anschlag erzeugten Richtungsveränderung auf die Schussweite viel kleiner ist, als derjenige der damit verbundenen Rotationsumkehrung.

Es versteht sich von selbst, dass in Geschützröhren von anderer Länge oder anderem Spielraum und selbst bei anderen Pulverladungen, wie die

---

stimmtes Ziel zu treffen, so muss man sich dazu entschliessen, ausschliesslich auf eine oder die andere von beiden Treffergruppen zu speculiren, und die Schüsse, welche der zweiten Gruppe entsprechen, als Fehlschüsse anzusehen.

lassen soll, den geeigneten Standpunkt aufzusuchen, denn man wird hierfür dann reichlich belohnt, wenn man das Bild den Charakter eines stereoscopischen Bildes mit dem Relief und der Perspective der Natur annehmen sieht.

Man kann auf dieselbe Weise Gemälde und Zeichnungen betrachten; wenn sie gut gemacht sind, ist die Erscheinung dieselbe, im Gegentheil zeigen sich die Fehler im Bilde ganz deutlich.

Grosse Negativs auf diese Weise betrachtet, erzeugen einen imposanten Effekt, namentlich Gebäude, weil selbe der lichten Fenster wegen im Innern erleuchtet zu sein scheinen.

Es ist hierbei immer gut, die Bilder mit einem dunklen Rahmen zu umgeben oder sie gleich in der Camera so zu erzeugen. (Aus *La Lumière* durch Horn's photographisches Journal, 1856. Nr. 10.)

XLII. Ueber eine lange Zeit wirksam bleibende, besonders für telegraphische Zwecke sich eignende Volta'sche Batterie. Von Professor Rud. Böttger. Lässt man eine aus mehreren Elementen bestehende, mit Bunsen'schen Kohlencylindern und amalgamirtem Zink combinirte Batterie (worin beide Elektricitätserreger, durch mattgebrannte Thonzellen von einander getrennt, in verdünnter Schwefelsäure stehen, wie solche gegenwärtig auf den meisten Telegraphenlinien in Anwendung sind) längere Zeit geschlossen, so bemerkt man schon nach wenigen Tagen (ob in Folge eines Schwefeleisengehaltes der Kohle, oder einer Zersetzung der Schwefelsäure, lasse ich zur Zeit dahin gestellt sein) einen auffallenden Geruch nach Schwefelwasserstoffgas, und gleichzeitig eine ungemeine Schwächung des Stroms. Mochte ich nun statt der Bunsen'schen, aus der Fabrik des Herrn Gressler in Erfurt bezogene Kohlencylinder, reine Koaksstücke oder auch die sogenannte Gaskohle (die in den Gasretorten sich ablagernde steinharte Kohle) in Anwendung bringen, — stets machte sich nach einiger Zeit Geschlossenseins der Kette dieser auffallende Geruch nach Schwefelwasserstoffgas bemerklich und in Folge dessen allemal auch eine bedeutende Abnahme der Stromstärke. Ebenso bemerkte ich schon nach wenigen Tagen eine ähnliche Schwächung des Stroms bei geschlossener Batterie, wenn die Kohlencylinder, statt mit Bleistreifen, mit Kupferbändern leitend versehen waren, und zwar lediglich in Folge einer endosmotischen Ueberführung und Ablagerung von partiell gelöstem Kupfer auf die in den mattgebrannten Thonzellen befindlichen Zinkplatten.

Dagegen erwies sich eine nur mit 5 Procent Schwefelsäure haltigem Wasser erregte Batterie, deren Kohlencylinder zuvor in concentrirte Salpetersäure eingetaucht und dann an der Luft etwa einen halben Tag stehen gelassen worden waren, lange Zeit hindurch äusserst wirksam, und vermochte ich bei so behandelten Kohlen oder Koaks in der geschlossenen Kette niemals eine Entwickelung von Schwefelwasserstoffgas wahrzunehmen. (Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a/M. für 1854—1855.)

XLIII. Eine neue Volta'sche Batterie. Die X. Lieferung des *Cosmos* gegenwärtigen Jahrganges (*Tom. III. p.* 253) enthält folgende Beschreibung der Einrichtung und Wirkung einer neuen Volta'schen Batterie, erfunden

von den Herrn Lacassagne und Thiers, wobei sich der Referent auf die verschiedenen, etwas dunkel gehaltenen Beschreibungen bezieht, welche drei Lyoner Zeitschriften davon gegeben haben.

Der neue Elektricitätserreger wird aus trocknen Elementen zusammengesetzt, in welchen die sonst gebräuchlichen Flüssigkeiten durch wasserfreie Salze ersetzt sind, die zum feurigen Flusse gebracht werden. Ein Element besteht aus zwei in einander gesetzten Tiegeln, welche durch einen eisernen Cylinder von einander getrennt sind. Der äussere Tiegel wird mit Kochsalz, der innere mit einem Aluminiumsalz angefüllt, ausserdem wird in den inneren noch ein hohler oder massiver Kohlencylinder gestellt. Hierauf wird der Apparat bis zur Kirschrothgluth erhitzt, wobei die Salze in Fluss gerathen, und der Kohlencylinder mit dem Eisencylinder durch einen Leiter verbunden. Sowie letzteres geschehen, entsteht ein starker elektrischer Strom. Ein Elektromagnet, in diesen Leiter eingeschaltet, wurde eben so stark erregt, wie durch ein Bunsen'sches Element von beträchtlicher Grösse, obgleich nur ein sehr kleines dieser neuen Elemente hierzu in Anwendung gekommen war. Ein solches Element soll sich nicht blos mit andern derselben Art auf gewöhnliche Weise, sondern auch mit Elementen anderer Construction zu einer Batterie verbinden lassen. Ausserdem soll hierbei noch ein sehr bemerkenswerthes Nebenprodukt gewonnen werden. Nachdem nämlich das Element etwa zwei Stunden der Wirkung des Feuers ausgesetzt gewesen war, wurde es zerschlagen und man fand auf dem Grunde des Tiegels einen schönen Regulus von Aluminium, bedeckt mit einer Menge Kügelchen desselben Metalls.

XLIV. Mittel zur Beobachtung kleiner Zeittheilchen. Herr Sang hat der schottischen Gesellschaft der Wissensch. und Künste eine Uhr, welche er Chronophor nennt, vorgezeigt, welche sowohl die Vergleichung von Uhren und Chronometern, als auch die Beobachtung sehr kleiner Bruchtheile einer Secunde ermöglichen soll. Die gewöhnliche Art und Weise den Gang eines Chronometers kennen zu lernen erfordert eine längere Zeit hindurch sogar mehrere Tage fortgesetzte Beobachtung desselben und man erfährt dadurch immer nur seinen mittleren Gang. Das von Herrn S. vorgeschlagene Princip der Beobachtung ist dem des Verniers analog, wozu ein Chronometer dient, welches bei seinem normalen Gange innerhalb eines und desselben Zeitraums einen Schlag mehr oder weniger als ein gewöhnliches Chronometer macht, sodass z. B. das Sperrad des Chronophors 119 Schläge in der Minute giebt, während das eines Chronometers, welches halbe Secunden anzeigt, 120 Schläge macht. Vermittels dieser Vorrichtung lassen sich Bruchtheile einer Secunde genau beobachten und es kann, weil die Eintheilung eine beliebige ist, die Schärfe der Beobachtung soweit es das Gehör gestattet getrieben werden. Diese Methode soll auch eine Abkürzung der zur Beobachtung und Vergleichung der Seeuhren erforderlichen Zeit gewähren und dürfte somit für die Schifffahrt von grossem Nutzen sein.

(*Bullet. de la Société d'Encouragement*, *Tom. III. Janv.* 1856, *p.* 59. nach *Practical Mechanic's Journal*, *Tom. VIII.*)

XLV. Oréide, eine dem Golde ähnliche Metalllegirung. In der Versammlung der Mitglieder des Vereins für Gewerbfleiss zu Berlin im Februar d. J. zeigte Director Dr. Druckenmüller Löffel und Gabel von einer dem Golde täuschend ähnlichen Mischung, in Paris gefertigt, vor. Die Metalllegirung wird Oréide genannt und besteht nach einer im Laboratorium des königl. Gewerbe-Instituts zu Berlin angestellten Analyse genau aus 90 Theilen Kupfer und 10 Theilen Zink. Seiner Bestandtheile wegen dürfte es sich weniger zu Speisegeräthen als zu Ornamenten, Beschlägen und dergleichen eignen. Wenn es erblindet, so kann es durch Putzen vollkommen goldglänzend gemacht werden. (Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen. 1856. S. 27.)

XLVI. Ueber die Beschaffenheit des Ozons. Die bisherigen Resultate der Untersuchungen über die Eigenschaften und das Verhalten dieses eigenthümlichen Körpers gehen bekanntlich darauf hinaus, dass vor allen die nähern Umstände, unter welchen sich derselbe erzeugt hat, zu berücksichtigen sind, und dass die nach verschiedenen Bereitungsarten gewonnenen gleichmässig mit dem Namen Ozon belegten Substanzen nicht identisch sind. Man hat in dieser Beziehung hauptsächlich folgende drei Entstehungsweisen des Ozons von einander zu unterscheiden sich veranlasst gesehen:

1. Wenn elektrische Funken in atmosphärischer Luft oder in Sauerstoffgase überspringen.
2. Wenn reines oder Säuren und Salz haltiges Wasser durch den Voltaschen Strom zersetzt wird, wobei das Ozon mit dem Sauerstoff am positiven Pol auftritt.
3. Wenn gewisse Körper, namentlich Phosphor bei gewöhnlicher Temperatur langsam in der atmosphärischen Luft verbrennen.

Die meisten Untersuchungen scheinen bisher darauf hinzudeuten, dass das auf die erste Weise beim Ueberspringen elektrischer Funken entstandene Ozon blos Sauerstoff in einem allotropischen Zustande sei, dass dagegen das bei der Elektrolyse des Wassers gebildete Ozon ein Wasserstroffoxyd von der Formel HO_3 sei, und dass endlich das durch Verbrennen des Phosphors erhaltene Ozon entweder nur Sauerstoff oder auch eine Verbindung von Sauerstoff und Wasserstoff sei. Thomas Andrews, Professor der Chemie in Belfast, hat nun die Frage, ob das unter den genannten verschiedenen Umständen erzeugte Ozon eine und dieselbe oder verschiedene Substanzen vorstellt, und welche Zusammensetzung und Beschaffenheit des Ozons in dem einen oder anderen Falle hat, auf's neue zum Gegenstand einer ausführlichen und genauen Experimentaluntersuchung gemacht (Phil. Fr. f. 1855; Poggend. Annal. Bd. 98, S. 435), deren Resultate den Wasserstoff (ebenso auch den Stickstoff) als einen Bestandtheil des Ozons gänzlich verläugnen. Sie ergeben insbesondere, dass bei der Elektrolyse des Wassers keine Verbindung von der Zusammensetzung HO_3 gebildet wird, und dass Ozon, auf welche Weise es sich auch entwickelt hat, ein und dieselbe Substanz von gleicher Beschaffenheit und kein (im gewöhnlichen Sinne) zusammengesetzter Körper, sondern Sauerstoff in einer allotropischen Modification ist. Von dem Verhalten und von den Eigenschaften, welche dem Ozon, aus welcher Quelle es auch stammen mag, gleichmässig zukommen möge nur noch folgendes erwähnt werden:

In dem Punkte D endlich erreicht ψ seinen grössten Werth, sodann nimmt es nach und nach immer mehr ab, und kann zuletzt selbst negativ werden. Da indessen der hinter D liegende Theil der Flugbahn nur kurz in Vergleich mit dem anderen Theil derselben ist, so sieht man leicht, dass ψ nicht beträchtliche negative Werthe enthalten kann.

Der Ausdruck für die Beschleunigung der zweiten Composante S des Luftwiderstandes soll, dem Vorschlag des Herrn Oberstlieutenant Otto entsprechend, aus einem wenigstens beinahe constanten und aus einem wesentlichen veränderlichen Gliede zusammengesetzt werden. Unter der Voraussetzung, dass positive Vorzeichen einen Druck nach oben und negative Vorzeichen einen Druck nach unten andeuten, sei nämlich die Beschleunigung der Kraft S

$$= -m\frac{dx}{ds} + h\varphi \cdot \frac{d\,[-tg\,\beta]}{dx}\frac{dx}{ds},$$

$$= -\left[m + h\varphi \cdot \frac{d^2y}{dx^2}\right]\frac{dx}{ds}.$$

Hierbei bezeichnen m und h Grössen, welche bei jedem Geschoss so lange constant bleiben, als dasselbe aus dem nämlichen Geschütz und mit der nämlichen Ladung geschossen wird, und deren positive oder negative Werthe aus den entsprechenden Bahnen selbst zu bestimmen sind. Der Kürze wegen soll sich indessen die nachstehende Untersuchung zunächst nur auf den Fall beschränken, dass h positiv ist.

Mit φ endlich soll eine Funktion von x bezeichnet werden, über deren Beschaffenheit zur Zeit nur so viel festgesetzt wird, dass ihr Werth nie beträchtlich von der Einheit abweicht. Zur Rechtfertigung aller dieser Annahmen sei endlich noch Folgendes bemerkt:

1. der von Herrn Oberstlieutenant Otto für flache Bahnen bewährt gefundene empirische Ausdruck kann auch unter der Form

$$-m + h\frac{g}{v^2} = -m + h\frac{g\,dt^2}{ds^2} = -m + h\frac{g\,dt^2}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{ds^2}$$

dargestellt werden, und für $m = 0$ und $h = 0$ wird, wie sich aus der unten folgenden Entwickelung leicht übersehen lässt:

$$-\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{g\,dt^2}{dx^2} \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Der erste Ausdruck ist demnach dem zweiten sehr ähnlich und wird bei den flachen Bahnen, bei welchen letzteren sich bereits bewährte, ungefähr eben so gut passen als dieser.

2. Denkt man sich unter Benutzung des zweiten Ausdrucks die Werthe der Constanten m und h aus kürzeren und flächeren Bahnen bestimmt, und sodann bei der Untersuchung über eine höhere und wesentlich längere Bahn angewendet, so kann die Rechnung möglicherweise gegen das Ende der Bahn hin für $\frac{d^2y}{dx^2}$ positive Werthe geben; dies würde aber eine Wiederabnahme der Neigungswinkel der Geschossrichtungen im absteigenden Aste der Bahn ausdrücken und mithin widersinnig sein. Bei Anwendung des ersten Ausdrucks kann dies hingegen, wie der unten entwickelte Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ zeigt, nie eintre-

XVIII.

Bemerkungen und Untersuchungen über einige Gegenstände der Ballistik.

Von. W. H. von Rouvroy,

Königl. Sächs. General-Major.

Die Bewegung der Geschosse unserer Feuerwaffen bietet gewiss eines der schwierigsten und interessantesten Probleme der Dynamik dar. In gewisser Beziehung ist es allerdings auch eines der undankbarsten; denn die Formeln, auf welche die Theorie führt, sind für den Gebrauch in der Praxis zu verwickelt, und einige Constanten, welche in denselben vorkommen, müssen zur Zeit noch für jedes neue Geschütz oder Geschoss durch Schiessversuche ermittelt werden, welche wenigstens einen Theil von dem, was durch jene Formeln gefunden werden kann, unmittelbar geben. Man würde indessen sehr irren, wenn man diese unmittelbaren Ergebnisse der Praxis für ganz frei von kleinen Mängeln und innern Widersprüchen halten wollte. Die Temperatur und der Feuchtigkeitsgehalt der Luft bei der Bereitung des Schiesspulvers und während der Aufbewahrung desselben, namentlich in den letzten Wochen und Tagen vor den Versuchen, sind nicht ohne Einfluss auf die Stärke des Pulvers, wirken aber auch während der Versuche selbst auf deren Resultate ein, indem sie entweder das Zerfliessen oder die Verhärtung des Pulverrückstandes in den Geschützröhren und Gewehren begünstigen. Helles Sonnenlicht, welches die Gewehre erwärmend, ebenfalls die letztgedachte Wirkung hervorbringt, sich auf Visir und Korn spiegelnd, das Zielen stört, die hellere oder düstere Beleuchtung des Zieles selbst, die gerade herrschenden Winde und noch manche andere Umstände tragen zur Veränderung der Schiessresultate bei. Verallgemeinert man nun dergleichen Resultate durch Berechnung einer Schusstafel, welche in der Praxis das Rechnen überflüssig machen soll, und bedient man sich hierbei einer gewöhnlichen Interpolationsformel, so giebt die Schusstafel jene Resultate allerdings genau, aber auch mit ihren Fehlern und Widersprüchen wieder. Namentlich kann dadurch leicht der Einfluss, welchen Visirhöhenänderungen auf die Schussweiten ausüben, in dem einen Theil der Tafel zu gross und in dem anderen Theil derselben zu klein erscheinen, und gerade dies ist bei dem praktischen Gebrauch der Tafeln besonders störend. Das sicherste Mittel zur Vermeidung von dergleichen Uebelständen besteht nun offenbar darin, dass man die unmittelbaren Resultate der Schiessversuche zur Bestimmung der in den ballistischen Formeln vorkommenden Constanten benutzt, die Schusstafel selbst aber nach jenen Formeln be-

rechnet, und je genauer die letzteren der Natur der Sache entsprechen, um so besser wird die Schusstafel mit der Praxis übereinstimmen. Diess ist indessen nicht der einzige Nutzen der Ballistik, sondern die Untersuchungen über dieselbe schärfen und berichtigen auch das Urtheil über die Wirkung der Feuerwaffen unter verschiedenen Terrainverhältnissen, und über viele andere den Gebrauch dieser Waffen, sowie die Taktik und die Befestigungskunst betreffende Fragen. Es dürften daher vielleicht auch die nachstehenden Auseinandersetzungen und Untersuchungen, zu welchen einige in den Jahren 1854 und 1856 allerdings zu andern Zwecken angestellte Versuche Veranlassung gaben, nicht ganz ohne Interesse sein.

Die Schwierigkeiten der Untersuchungen über die Bewegung geworfener und geschossener Körper sind zweifacher Art. Erstlich können nämlich die Integrale, auf welche dieselben führen, zum Theil nur durch Reihen ausgedrückt werden, deren Convergenz bei hohen und sehr gekrümmten Bahnen sich nicht über die ganze Länge der letzteren erstreckt. Zweitens kennt man aber auch die Kräfte, welche auf die Geschosse wirken, mit Ausnahme der Schwerkraft nur unvollständig und von den Bahnen selbst kaum etwas mehr als den Anfangspunkt und den Endpunkt. Folgende Erörterungen werden dies noch heller in das Licht setzen:

I. Die Bewegung der Geschosse innerhalb der Geschützröhre und unter Einwirkung der Pulvergase erfolgt natürlich nach ganz anderen Gesetzen als die weitere Bewegung derselben durch die Luft; man beginnt daher die Untersuchungen über diese letztere Bewegung bei dem Moment, in welchem die Geschosse das Geschützrohr verlassen, und versteht deshalb unter ihrer anfänglichen Geschwindigkeit diejenige Geschwindigkeit, welche sie in diesem Augenblick besitzen. Wenn nun dabei natürlich stillschweigend die Voraussetzung gemacht wird, dass mit diesem Moment jede Einwirkung der Pulvergase auf die Geschosse aufhöre, so ist dies allerdings nicht ganz richtig, aber doch nur sehr wenig von der Wahrheit entfernt; denn man weiss aus der Erfahrung, dass eine beträchtliche Verlängerung der Geschützröhre, durch welche die Pulvergase viel länger als jetzt hinter der Kugel zusammengehalten werden, die Geschwindigkeit der letzteren verhältnissmässig nur sehr wenig vergrössert, um wie viel geringer muss also noch diejenige Zunahme jener Geschwindigkeit sein, welche in denselben Abständen vom Ursprung der Bewegung eintritt, wenn die Gase dort nicht mehr durch die Wände der Geschützbohrung zusammen gehalten werden. Auf welche Weise endlich auch die sogenannte anfängliche Geschwindigkeit gemessen werden möge, das Resultat der Messung wird immer mindestens den grössten Theil der Geschwindigkeitszunahmen mit enthalten, welche erst vor der Geschützmündung eingetreten sind und die Annahme, das Geschoss habe diese ganze Geschwindigkeit schon an der Mündung besessen, kann daher höchstens bei der Berechnung der Flugzeit, nicht aber bei der Bestimmung der Gestalt und Länge der Flugbahn einen einigermassen merklichen Fehler verursachen.

Hat man nun auch durch die obigen Annahmen für ballistische Untersuchungen die Gesammtwirkung des Pulvergases gleichsam auf einen Stoss zurückgeführt, welcher dem Geschoss seine anfängliche Geschwindigkeit ertheilt, so ist doch diese Geschwindigkeit in den wenigsten Fällen bekannt; denn die Anschaffung und Anwendung der Maschinen, welche zur Bestimmung derselben dienen, sind zu kostspielig und zu zeitraubend, und die dabei für die Lösung von praktischen Fragen zu erlangenden Vortheile oft zu

gering, als dass der Praktiker immer in der Lage sein sollte, die anfänglichen Geschwindigkeiten der Geschosse, deren Bahnen er untersuchen will, direkt bestimmen zu können, sondern er hat dazu oft keine anderen Grundlagen, als die Ergebnisse der angestellten Schiessversuche.

II. Die Richtung, welche der Schwerpunkt des Geschosses in dem Augenblicke besitzt, in welchem das Letztere aus dem Geschützrohre tritt — d. i. die Tangente des Anfangspunktes der Flugbahn — denkt man sich im Allgemeinen mit der Richtung der Seelenaxe*) zusammenfallend oder doch parallel, so dass der Neigungswinkel jener Axe gegen eine Horizontalebene — der Elevationswinkel des Geschützes — zugleich die Lage jener Tangente bestimmt. Es ist jedoch auch hierbei eine kleine Berichtigung zu machen, weil:

1. vermöge des Spielraums die Richtung des Schwerpunktes des Geschosses nicht vollständig parallel mit der Seelenaxe zu sein braucht,
2. die Seelenaxe nicht immer genau den Elevationswinkel besitzt, welchen man derselben gegeben zu haben glaubt. Am ungenauesten ist die direkte Messung der Elevationswinkel mit den dazu bestimmten Gradbögen; denn Elevationsunterschiede bis zu ¼ Grad sind dabei oft nicht mehr bemerklich. Sicherer bestimmt man — wie es gewöhnlich geschieht — jenen Winkel aus der bekannten Stellung der am Geschütz oder Gewehr angebrachten Visirpunkte gegen die Seelenaxe und aus der Entfernung und etwaigen Höhe des Zielpunktes von und über dem hinteren Visirpunkte.

Eine vollständige Genauigkeit giebt aber auch dieses Verfahren nicht, denn die Reflexion des Sonnenlichts auf den Kanten des Kornes, die Beugung des Lichts an den Kanten des Visirs, die grössere oder geringere Entfernung, hellere oder dunklere Beleuchtung des Zieles, die Helligkeit oder Dunkelheit seines Hintergrundes u. s. w. veranlassen den Zielenden unwillkürlich mit dem Auge eine etwas andere Stellung gegen die als Visirpunkte vorausgesetzten Punkte zu nehmen, und verursachen mithin eine Aenderung in der Neigung der wahren Visirlinie gegen die Seelenaxe.

Um nun alle aus den gedachten Umständen entspringende Verschiedenheiten zwischen der beabsichtigten und der wirklich eingetretenen Richtung des Geschützes soweit auszugleichen, als dies überhaupt möglich ist, kann man den Unterschied zwischen der scheinbaren Richtung der Seelenaxe und der Richtung, in welcher die Geschosse das Geschützrohr verlassen, durch das Schiessen gegen ein sehr nahes Ziel ermitteln. Allerdings kommt hierbei nicht allein die Lage der Punkte, in welcher die Zielfläche getroffen wird, gegen den eigentlichen Zielpunkt, sondern auch der Abstand des vorderen Visirpunktes von der Seelenaxe, und endlich selbst die Grösse des Raumes in Betracht, welchen die Geschosse während ihrer Bewegung bis zum Ziel vermöge der Schwerkraft durchfallen. Bei der geringen Länge der durchlaufenen Bahn ist jedoch auch dieser Fallraum nur sehr gering, so dass selbst eine ganz ungefähre Schätzung der Geschwindigkeit des Geschosses hinreicht, um denselben mit der für obigen Zweck genügenden Genauigkeit zu bestimmen.

Der Winkel, um welchen sich nach den Ergebnissen eines derartigen Versuchs die ursprüngliche Richtung des Geschosses — an der Geschütz-

*) Unter der Seele eines Geschützes oder Gewehres versteht man den hohlen Raum, welcher die Ladung und das Geschoss aufnimmt, unter dem Spielraum den Unterschied der Durchmesser der Seele und des Geschosses.

$$9) \qquad u = \frac{\alpha h}{V^2 \cos^2 w}$$

so kommt:

$$10) \qquad \frac{d^2 y}{dx} = -\frac{\varrho}{\cos w}\left[\frac{(e^{z+\varepsilon} - \delta)}{1 + u\varphi(e^{z+\varepsilon} - \delta)}\right] d\xi.$$

Betrachtet man nun zuvörderst den Fall, dass keine zweite Composante S des Luftwiderstandes existirt, folglich $h = 0$, $u = 0$ und $\varepsilon = 0$ ist, und bezeichnet man das diesem Falle entsprechende y zur Unterscheidung durch y_1, so wird:

$$\frac{d^2 y_1}{dx} = -\frac{\varrho}{\cos w}(e^z - \delta)\, d\xi$$

$$11) \qquad = -\frac{\varrho}{\cos w}(e^{\xi - \psi} - \delta)\, d\xi$$

und in dieser Gleichung muss zuvörderst ψ durch ξ ausgedrückt werden. Da aber ψ nur sehr klein ist, und erst dann merkbare Werthe erhält, wenn e^ξ beträchtlich grösser als δ geworden ist, so genügt ein Näherugswerth von ψ, bei dessen Berechnung

$$\frac{d^2 y_1}{dx} = -\frac{\varrho}{\cos w} e^\xi\, d\xi$$

gesetzt wird. Aus dieser letzteren Gleichung folgt nun, da für $\xi = 0$ $\frac{dy_1}{dx} = tg\, w$ wird:

$$\frac{dy_1}{dx} = tg\, w - \frac{\varrho}{\cos w}(e^\xi - 1)$$

und hieraus:

$$dz = \frac{ds}{k} = \frac{dx}{k}\left(1 + \frac{dy_1^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{dx}{k}\left(1 + tg^2 w - \frac{2\varrho \sin w}{\cos^2 w}(e^\xi - 1) + \frac{\varrho^2}{\cos^2 w}(e^{2\xi} - 2e^\xi + 1)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= d\xi\,[1 - (2\varrho \sin w\,(e^\xi - 1) - \varrho^2 (e^{2\xi} - 2e^\xi + 1))]^{\frac{1}{2}}$$

Die durch den Exponenten $\frac{1}{2}$ angedeutete Quadratwurzelausziehung kann durch Entwickelung in eine Reihe, deren erstes Glied 1 ist, so lange ausgeführt werden als

$$2\varrho \sin w\,(e^\xi - 1) - \varrho^2 (e^\xi - 1)^2 < 1$$

bleibt, und dies ist der Fall so lange als

$$\varrho\,(e^\xi - 1) < (\sin w + \cos w)$$

oder

$$tg\,\beta = \frac{dy_1}{dx} > -1$$

$$\beta > -45^\circ \text{ ist.}$$

Bei Schüssen unter keinem grösseren Elevationswinkel als 15°, höchstens 20° ist dies mit Sicherheit anzunehmen, und daher kann:

$$dz = d\xi\,[1 - (\varrho \sin w\,(e^\xi - 1) - \tfrac{1}{2}\varrho^2 (e^{2\xi} - 2e^\xi + 1))]$$

mente der Oberfläche eines Geschosses erleiden, jedesmal in eine Mittelkraft vereinigen lassen, deren Richtung derjenigen der Bewegung gerade entgegengesetzt wäre. Von den genannten Vorbedingungen wird aber wahrscheinlich keine einzige vollständig erfüllt, und daher ist auch kein Grund vorhanden, um anzunehmen, dass die gedachte Mittelkraft die oben angeführte Richtung haben müsse. Unter allen Umständen kann man sich aber dieselbe wieder in zwei Composanten zerlegt denken, von denen die eine die gedachte Richtung und die andere eine auf diese rechtwinklige Richtung besitzt. Wir werden daher — von dieser Freiheit Gebrauch machend — jede dieser Composanten für sich discutiren.

V. Die erste Composante des Luftwiderstandes, deren Richtung derjenigen des Schwerpunktes im Geschoss entgegengesetzt ist, und die also nach der bisher gewöhnlichen Annahme, als der Gesammtwiderstand der Luft gegen ein Geschoss betrachtet wurde, hat bekanntlich bereits Newton berechnet und z. B. für ein kugelförmiges Geschoss dem Gewicht einer Luftsäule gleich gefunden, deren Grundfläche die grösste Kreisfläche der Kugel und deren Höhe die Hälfte ihrer Geschwindigkeitshöhe ist. Bei der Bestimmung dieser Kraft ist jedoch weder auf eine Verdichtung der Luft vor, noch auf eine Verdünnung derselben hinter der Kugel Rücksicht genommen, und da eines wie das andere sicherlich eintritt, so ist auch der obige Ausdruck für den Widerstand der Luft gegen ein kugelförmiges Geschoss gewiss zu klein. Wird derselbe mit N und der wirklich stattfindende Widerstand mit CN bezeichnet, so muss demnach der Coefficient C stets grösser als 1 sein. Es fragt sich aber überhaupt, ob derselbe für verschiedene Geschwindigkeiten des Geschosses constant ist, und die Erfahrung scheint dem zu widersprechen, denn Hutton fand durch eine Reihe von sehr sorgfältig angestellten Versuchen unter anderen folgende Werthe von C.

Geschwindigkeit des Geschosses in englischen Fussen.	Werth von C.
5′	1,2
25′	1,27
100′	1,36
400′	1,43
1000′	1,77
1500′	2,06
2000′	2,00

Eine vollständige Richtigkeit ist, bei der grossen Schwierigkeit derartiger Versuche obigen Resultaten an sich nicht beizumessen, und daher kann man zur Erleichterung der ballistischen Rechnungen von einem strengen Festhalten an denselben absehen. Allein so lange keine anderen Gründe dagegen sprechen, erscheint es immer zweckmässig, wenigstens bei Schüssen mit grossen anfänglichen Geschwindigkeiten für C eine solche Funktion der Geschwindigkeit v in Rechnung zu bringen, welche, ohne die Integrationen wesentlich zu erschweren, die von Hutton gefundene Zunahme von C mit v ungefähr ausdrückt, und hierzu empfiehlt sich besonders der von Euler vorgeschlagene Ausdruck

$$C = a(1 + jv^2)$$

in welchen die Constanten a und j der obigen Tabelle ungefähr entsprechend, oder nach anderen vorliegenden Gründen beliebig angenommen werden können.

Reihe, und daher ist die Abnahme dieser letzteren Glieder eine scheinbar sehr unregelmässige. Dasselbe trägt sich aber, wenn auch in geringerem Maasse, auf die aus ihr durch Integration hervorgehenden Reihen für $\frac{dy_1}{dx}$ und für y_1 über. So würde man z. B. in dieser letzteren Reihe, deren Anfang die Gleichung 13)*) giebt, durch willkürliches Abbrechen derselben bei dem dritten Gliede in manchen Fällen einen grössern Fehler begehen, als wenn man auch sogleich das zweite Glied mit wegliesse.

Wendet man sich nun wieder zu dem Falle einer seitlichen Wirkung des Luftwiderstandes auf die Geschosse und setzt man in der Gleichung 10) für z seinen Werth $\xi - \psi$ ein, so kommt:

$$14)\qquad \frac{d^2y}{dx} = -\frac{\varrho}{\cos w}\left[\frac{e^{\xi-\psi+\varepsilon}-\delta}{1+u\varphi(e^{\xi-\psi+\varepsilon}-\delta)}\right]d\xi$$

In dieser Gleichung kommt die noch unbestimmte Funktion φ vor, für welche bei der empirischen Aufstellung des Ausdrucks für die zweite Componante S des Luftwiderstandes keine andere Bedingung vorbehalten wurde, als dass φ während der ganzen Dauer der Bewegung keine von der Einheit sehr verschiedenen Werthe annehmen solle. Dieser Bedingung aber wird genügt, wenn man

$$15)\qquad \frac{e^{\xi-\psi+\varepsilon}-\delta}{1+u\varphi(e^{\xi-\psi+\varepsilon}-\delta)} = \frac{e^{\xi}-\delta}{1+u(e^{\xi}-\delta)}$$

setzt. Da nämlich ψ und ε für den Anfang der Bewegung Null und überhaupt in der ersten Periode derselben die Differenz $(\psi - \varepsilon)$, wie oben erwiesen wurde, sehr klein ist und φ nicht selbst bestimmt, sondern nur eine ungefähre Grenze der Werthe, die es annehmen kann, gefunden werden soll, so kann δ gegen $e^{\xi-\psi+\varepsilon}$ vernachlässigt, und indem man die Brüche auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens umkehrt, die Gleichung folgendermassen geschrieben werden

$$\frac{1+u\varphi e^{\xi-\psi+\varepsilon}}{e^{\xi-\psi+\varepsilon}} = \frac{1+ue^{\xi}}{e^{\xi}}$$

d. i. auch:

$$e^{(\psi-\varepsilon)-\xi} + u\varphi = e^{-\xi} + u,$$

oder

$$\varphi = 1 - \frac{e^{\psi-\varepsilon}-1}{ue^{\xi}}$$

Oben wurde ferner bereits gezeigt, dass $\psi - \varepsilon$ bei Flugbahnen von nicht sehr grosser Länge während der ganzen Dauer der Bewegung, und bei ungewöhnlich langen Bahnen in dem ganzen aufsteigenden Ast und einem beträchtlichen Theil des absteigenden Astes ein sehr kleiner Bruch bleibt. So oft und so lange dies stattfindet, kann man daher setzen

$$\varphi = 1 - \frac{\psi-\varepsilon}{ue^{\xi}}$$

---

*) Wird die Reihe nach Potenzen von ϱ noch weiter fortgesetzt, so gehört auch zu dem in Nr. 13 aufgeführten letzten Gliede noch ein Theil, welcher ebenfalls ϱ^3 zum Faktor hat, dessen Weglassung aber durch das oben Gesagte, sowie durch den ganzen Gang der Entwickelung gerechtfertigt sein dürfte.

treffen der einmal in Bewegung gesetzten Geschosse an den Seelenwänden durch die Kürze des Rohres vorgebeugt ist.

2. Wenn beim Laden der Geschosse die Lage ihrer Schwerpunkte dem Zufall überlassen bleibt, oder doch bei eintretender Drehung derselben während des Ladens, wegen der Länge der Geschützröhre weder beobachtet noch berichtigt werden kann, und überdies auch die anderen oben angeführten Bedingungen für den Eintritt und ungestörten Fortgang der Rotationen in einer bestimmten Richtung unerfüllt bleiben.
3. Wenn Geschosse, welche nicht durch die innere Construction, sondern nur durch die Unvollkommenheiten des Gusses etwas excentrisch sind, in cylindrische Spiegel so eingesetzt werden, dass beim Laden derselben ihr Schwerpunkt stets hinter ihrem Mittelpunkt bleiben muss, wie sich auch die Spiegel mit den Geschossen um ihre Axe drehen.

In dem ersten Falle ist sowohl die Existenz als die Richtung einer seitlich auf das Geschoss wirkenden Kraft durch die Erfahrung unzweifelhaft festgestellt. Lag z. B. der Schwerpunkt des Geschosses im Geschützrohr unter dem Mittelpunkt und geht also die Rotation desselben vorn*) von oben nach unten, so äussert sich diese Kraft als ein Druck von oben nach unten, welcher die Krümmung der Bahn vergrössernd, die Schussweite verkürzt. Bei der entgegengesetzten Lage des Schwerpunktes tritt auch der entgegengesetzte Erfolg ein, und jene Kraft hat daher ebenfalls die entgegengesetzte Richtung.

Im zweiten Falle kann vom regelmässigen Eintritt der Rotationen in einer bestimmten Richtung nicht die Rede sein, sondern dieselben erfolgen im Allgemeinen um mehr oder weniger schräg liegende Axen, bald von oben nach unten, bald in umgekehrter Richtung. Dies spricht sich denn auch bereits bei dem Schiessen auf kleinere Entfernungen durch grosse Verschiedenheiten der einzelnen Schüsse aus, und will man dennoch auch in diesem Falle eine durch die Rotation der Geschosse hervorgerufene seitliche Wirkung auf dieselben in einer bestimmten Richtung in Rechnung bringen, so kann dies nur unter der Voraussetzung geschehen, dass noch andere Umstände, als die Lage der Schwerpunkte die Rotationsrichtung bedingen, und wenn auch nicht bei allen Schüssen, aber wenigstens bei der Mehrzahl derselben vorwalten. Was hierüber zu sagen wäre, ist bei Betrachtung des dritten Falles erörtert. Bei dem Schiessen auf grosse Entfernungen gestaltet sich endlich — in dem ebenbetrachteten zweiten Falle — die Sache oft noch ganz anders, namentlich wenn die Geschosse aus excentrischen Hohlkugeln bestehen. Alsdann bilden nämlich sehr oft die Treffpunkte der grossen Mehrzahl der einzelnen Schüsse auf der vertikalen oder horizontalen Fläche, auf welchen dieselben markirt werden, zwei weit auseinander liegende Gruppen, von denen die eine resp. höher oder weiter und die zweite tiefer oder näher am Geschütz liegt**). Alsdann kann man wohl

*) Wir werden überall, wo in dem Folgenden von der Richtung der Rotationen die Rede sein wird, die Bewegung der vorderen Halbkugel also entweder von oben nach unten oder von unten nach oben anführen, ohne diese Halbkugel jedesmal besonders wieder zu benennen.

**) Es sind dies die Fälle, in denen die Bestimmung eines mittleren Treffpunktes aus allen Schüssen unstatthaft wird, und beabsichtigt man unter Umständen, welche erfahrungsmässig zu derartigen Ergebnissen führen ein be-

...ation ...ung giebt, da für $\xi=0$, $\frac{dy}{dx}=tg\,\beta=tg\,w$ wird,

$$tg\,\beta=\frac{dy}{dx}=tg\,w-\frac{\varrho}{u\,r\cos w}\left(-\delta\xi+\frac{1}{u}\log nat\left(\frac{1+\frac{1}{r}e^{\xi}}{1+\frac{1}{r}}\right)\right)$$

...durch die Multiplication mit dx erhält man hieraus, wenn zugleich die Lo... ...en von Zähler und Nenner des obigen Bruchs getrennt werden,

$$\text{...)}\quad dy=dx\,tg\,w-\frac{\varrho k}{ur}d\xi\left[-\delta\xi+\frac{1}{u}\log nat\left(1+\frac{1}{r}e^{\xi}\right)-\frac{1}{u}\log nat\left(1+\frac{1}{r}\right)\right]$$

... demnach einstweilen:

$$\int_0^{\xi} d\xi\,\log nat\left(1+\frac{1}{\ldots}\right)=X$$

...r Gleichung 20), in welcher

gesetzt, so finde... dann für $x=0$ ...

$$21)\quad y=x\,tg\,w-\ldots\left[-\tfrac{1}{2}\delta\xi^2-\frac{\xi}{u}\log nat\left(1+\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{u}X\right]$$

Zur Bestimmung von X sei

$$22)\quad \log nat\, r=\lambda$$

und für jeden beliebigen positiven ächten Bruch b

$$23)\quad \int_0^b\frac{\log nat(1+t)}{t}dt=\int_0^b\left(1-\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{3}t^2-\tfrac{1}{4}t^3\ldots.\right)dt$$
$$=b-\tfrac{1}{4}b^2+\tfrac{1}{9}b^3-\tfrac{1}{16}b^4\ldots.=f(b).$$

Ferner hat man bei der Bestimmung von X die Fälle

$$e^{\xi}\leqq r \text{ d. i. } \xi\leqq\lambda \text{ und}$$
$$e^{\xi}>r \text{ „ „ } \xi>\lambda$$

zu unterscheiden. Im ersten Falle ist sogleich

$$X=\int_0^{\xi}\left(\frac{e^{\xi}}{r}-\tfrac{1}{2}\frac{e^{2\xi}}{r^2}+\tfrac{1}{3}\frac{e^{3\xi}}{r^3}-\tfrac{1}{4}\frac{e^{4\xi}}{r^4}\ldots.\right)d\xi$$
$$=\left(\frac{e^{\xi}}{r}-\tfrac{1}{4}\frac{e^{2\xi}}{r^2}+\tfrac{1}{9}\frac{e^{3\xi}}{r^3}-\tfrac{1}{16}\frac{e^{4\xi}}{r^4}\ldots.\right)-\left(\frac{1}{r}-\tfrac{1}{4}\frac{1}{r^2}+\tfrac{1}{9}\frac{1}{r^3}-\tfrac{1}{16}\ldots\right)$$
$$=f\left(\frac{e^{\xi}}{r}\right)-f\left(\frac{1}{r}\right)$$

Auch folgt hieraus noch:

$$\int_0^{\lambda}\log nat\left(1+\frac{1}{r}e^{\xi}\right)d\xi=f(1)-f\left(\frac{1}{r}\right)$$

bei den genannten Versuchen gebrauchten, auch andere Anschläge der Geschosse an den Seelenwänden eintreten, und dadurch die Richtungen der seitlich auf die Geschosse wirkenden Kräfte sich verändern können. Nach vielfachen schon in früherer Zeit theils von Herrn Oberstlieut. Otto, theils von dem Verfasser, theils bei der französischen Artillerie angestellten Untersuchungen ist indessen bei Kanonen die Richtung der gedachten Kraft von unten nach oben die gewöhnlichere, indem die ohne Berücksichtigung dieser Kraft geführten Rechnungen in der Regel für höhere Elevationswinkel grössere anfängliche Geschwindigkeiten als für niedrigere Richtungswinkel geben.

Der Verfasser legte sich auch die Frage vor, ob vielleicht ausser der Rotation noch ein zweiter Umstand zu einer ungleichen Dichtheit der Luft vor dem Geschoss, und dadurch zu einer veränderten Richtung der Resultante aller gegen die Oberflächenelemente desselben ausgeübten Widerstände beitrage. Der einzige denkbare Grund hierzu*) schien ihm die unausgesetzte Richtungsveränderung des Geschosses, welche vielleicht den Abfluss der verdrängten Luft auf der unteren Seite mehr als auf der oberen erschwerend, eine derartige Wirkung hervorbringen könnte. Bei näherer Bestimmung der Grösse der Kraft, welche hebend auf die in Rede stehenden Geschosse gewirkt hatte, musste er sich indessen sagen, dass ein so grosser Erfolg jenem Umstande schwerlich beigemessen werden kann, und so bleibt wohl nichts übrig, als die Annahme, dass die gedachten Geschosse ungeachtet der scheinbar dagegen sprechenden Umstände doch von unten nach oben rotirt haben.

Wie dem aber auch sei, der Calcül hat damit nichts zu thun; denn zur Zeit kann bei demselben für die Beschleunigung der Kraft S nur ein empirisch aufgestellter Ausdruck in Ansatz gebracht werden und die Erfahrung allein hat darüber zu entscheiden, ob durch die für denselben gewählte Form die gewünschte Uebereinstimmung zwischen Theorie und Praxis erzielt wird, oder nicht.

Nach diesen vorläufigen Auseinandersetzungen, welche allerdings grösstentheils schon Bekanntes enthielten, aber gleichwohl nothwendig schienen, um genau den Standpunkt festzustellen, von welchem in der nachstehenden Untersuchung ausgegangen wurde, kann nun zur Entwickelung einer Gleichung für die Flugbahn übergegangen werden.

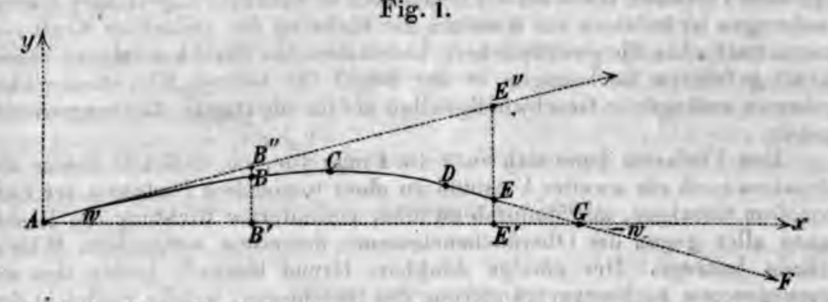
Diese Gleichung soll auch auf eine bei 15° Elevation beschriebene ungewöhnlich lange Bahn angewendet werden und — vielleicht mit etwas weniger Genauigkeit — auch bei Schüssen unter 20° Elevation, d. h. also auf alle bei Kanonen und Haubitzen gewöhnlich vorkommende Fälle anwendbar sein. Der letztere Zweck ist indessen zunächst nur Nebensache, und der Verfasser beschränkt sich daher der Kürze wegen bei der speciellen Discussion auf den Elevationswinkel 15°. Die Bezeichnungen und Voraus-

*) Die Abnahme der Beschleunigung der Schwere und der Dichtheit der Luft in den oberen Luftschichten hat allerdings auch den Erfolg, dass die unter höheren Elevationswinkeln abgeschossenen Kugeln etwas weiter gehen, als es die ohne Berücksichtigung jener Veränderungen angestellten Rechnungen geben, und der Einfluss dieser Veränderungen vermengt sich daher mit demjenigen einer seitlich auf die Geschosse wirkenden, hebenden Kraft. Man kann sich indessen durch eine leichte Rechnung überzeugen, dass in denjenigen Höhen über der Erdoberfläche, welche die Geschosse erreichen, jene Veränderungen noch zu geringfügig sind, um merkliche Veränderungen der Flugbahnen hervorzubringen.

setzungen, welche in der folgenden Entwickelung in Anwendung kommen, bestehen zunächst in Folgendem:

Der Mittelpunkt A (Fig. 1) der Geschützmündung sei der Anfang der rechtwinkligen Coordinaten, die Richtung der x horizontal, diejenige der

Fig. 1.



y vertikal, die anfängliche Geschwindigkeit des Geschosses, welches in der Ebene der x, y, und in der Richtung AE'' in Bewegung gesetzt wird, V. Der Elevationswinkel $E'AE''$ sei w, die Zeit in welcher das Geschoss, den Bogen s durchlaufend, den Punkt xy erreicht t, und in diesem Punkte der Neigungswinkel seiner Richtung gegen die Richtung der x, β und seine Geschwindigkeit v. Endlich bezeichne g die Beschleunigung der Schwere, e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen und π das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser des Kreises. Als unabhängige Veränderliche werde die Coordinate x betrachtet.

Der bereits in Nr. V. gedachte Coefficient C für den Widerstand der Luft sei $a[1+jv^2]$ und die ihm entsprechende Beschleunigung der Bewegung in der Richtung der Bahntangente $= -\frac{v^2}{2k}[1+jv^2]$. Bei der unten folgenden Anwendung der entwickelten Formeln auf einige Flugbahnen, bei denen die anfängliche Geschwindigkeit V gegen 700 Ellen*) zu schätzen war, wurde $a = 1{,}2$ und $j = \frac{1}{2V^2}$ gesetzt, so dass C ungefähr die den Hutton'schen Angaben entsprechenden Werthe erhielt. Zugleich fand sich dabei — wenn alle Längen in Ellen ausgedrückt sind — für die angewendeten Geschosse $\frac{1}{k} = 0{,}00075$. Hiernach lassen sich die Zahlenwerthe beurtheilen, welche die Grössen k und j in der Praxis ungefähr annehmen können. Da endlich der Elevationswinkel w nicht über 15° bis höchstens 20° betragen soll, so kann annäherungsweise anstatt $[1+jv^2]$ der Ausdruck

$$\left[1+\frac{\cos^2\beta}{\cos^2 w}jv^2\right] = \left(1+\frac{j}{\cos^2 w}\cdot\frac{dx^2}{dt^2}\right)$$

gesetzt werden; denn anfänglich sind beide Ausdrücke völlig gleich und selbst im Scheitel C der Bahn wird ihr Unterschied erst $jv^2 tg^2 w$ d. i. z. B. für $j = \frac{1}{2V^2}$ und $w = 15°$, $0{,}065\frac{v^2}{V^2}$. Vom Scheitel aus convergirt dann dieser Unterschied wieder gegen die Grenze 0, welche er für $\beta = -w$ er-

*) Bei allen hier und in der Folge in Ellen angegebenen Maasse sind Dresdner Ellen zu verstehen; 1 Dresdner Elle $= 0{,}56638$ Meter.

reicht; sodann wechselt derselbe das Zeichen, bleibt aber wegen der fortwährenden Abnahme von $\frac{v^2}{V^2}$ nur sehr klein, wenn auch $\cos\beta$ beträchtlich kleiner als $\cos w$ wird. Demnach kann die obige Beschleunigung

$$= -\frac{v^2}{2k}\left[1 + \frac{j}{\cos^2 w}\frac{dx^2}{dt^2}\right] = -\frac{1}{2k}\frac{ds^2}{dt^2}\left[1 + \frac{j}{\cos^2 w}\frac{dx^2}{dt^2}\right]$$

geschrieben werden.

Bevor endlich zu den übrigen Grundlagen der Untersuchung übergegangen wird, mögen hier noch einige Bemerkungen folgen, welche wesentlich auf der Grösse der Werthe beruhen, die, der oben gegebenen Andeutung gemäss, die Constante k in der Praxis erhalten kann. Wird durch den Punkt xy, welchen in Fig. 1 B vorstelle, eine Senkrechte $B''BB'$ gezogen und drückt man die drei durch diese Gerade begrenzten Linien, nämlich die Geraden AB' und AB'' und den Bogen AB in demjenigen Maasse aus, dessen Einheit $= k$ ist, so erhält man für dieselben:

$$AB' = \frac{x}{k}$$

$$\text{Bogen } AB = \frac{s}{k}, \text{ was } = z \text{ sei}$$

$$AB'' = \frac{x}{k \cos w}, \text{ was } = \xi \text{ sei,}$$

und die Zahlenwerthe dieser Grössen enthalten wegen des angewendeten grossen Maassstabes höchstens einige Einheiten. So wird z. B. selbst an den Enden der unten untersuchten vier Bahnen nur:

in der ersten Bahn $\xi = 0{,}6751$
„ „ zweiten „ $\xi = 1{,}0508$
„ „ dritten „ $\xi = 1{,}4276$
„ „ vierten „ $\xi = 3{,}4873$.

Denkt man sich ferner die Länge $\frac{x}{k}$ in unendlich kleine Elemente $\Delta\left(\frac{x}{k}\right)$ getheilt, und durch die Endpunkte jedes dergleichen Elements zwei Parallelen zu $B'B''$ dergestalt gezogen, dass dieselben auch auf dem Bogen AB und auf der Geraden AB'' entsprechende Elemente Δz und $\Delta\xi$ abschneiden, so hat man zunächst für die ganze Ausdehnung der Bahn:

$$\Delta\xi = \Delta\left(\frac{x}{k}\right).\frac{1}{\cos w}.$$

Stellt ferner D denjenigen Punkt der Bahn vor, dessen Tangente mit der Axe der x den Winkel $FGx = -w$ bildet, so ist für jedes zwischen A und D liegende Element von z

$$\Delta\frac{x}{k} < \Delta z < \Delta\xi,$$

jedes zwischen D und dem Ende der Bahn liegende Element von z hingegen grösser als das entsprechende Element von ξ. Setzt man daher:

$$\xi - z = \psi,$$

so ist von dem Anfangspunkt A bis zu dem Punkt D der Bahn

$$0 < \psi < \xi[1 - \cos w] \text{ z. B. für } w = 15^\circ, \text{ kleiner als } 0{,}04\,\xi.$$

In dem Punkte D endlich erreicht ψ seinen grössten Werth, sodann nimmt es nach und nach immer mehr ab, und kann zuletzt selbst negativ werden. Da indessen der hinter D liegende Theil der Flugbahn nur kurz in Vergleich mit dem anderen Theil derselben ist, so sieht man leicht, dass ψ nicht beträchtliche negative Werthe enthalten kann.

Der Ausdruck für die Beschleunigung der zweiten Composante S des Luftwiderstandes soll, dem Vorschlag des Herrn Oberstlieutenant Otto entsprechend, aus einem wenigstens beinahe constanten und aus einem wesentlichen veränderlichen Gliede zusammengesetzt werden. Unter der Voraussetzung, dass positive Vorzeichen einen Druck nach oben und negative Vorzeichen einen Druck nach unten andeuten, sei nämlich die Beschleunigung der Kraft S

$$= - m \frac{dx}{ds} + h\varphi \cdot \frac{d\,[- tg\,\beta]}{dx} \frac{dx}{ds},$$

$$= - \left[m + h\varphi \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \right] \frac{dx}{ds}.$$

Hierbei bezeichnen m und h Grössen, welche bei jedem Geschoss so lange constant bleiben, als dasselbe aus dem nämlichen Geschütz und mit der nämlichen Ladung geschossen wird, und deren positive oder negative Werthe aus den entsprechenden Bahnen selbst zu bestimmen sind. Der Kürze wegen soll sich indessen die nachstehende Untersuchung zunächst nur auf den Fall beschränken, dass h positiv ist.

Mit φ endlich soll eine Funktion von x bezeichnet werden, über deren Beschaffenheit zur Zeit nur so viel festgesetzt wird, dass ihr Werth nie beträchtlich von der Einheit abweicht. Zur Rechtfertigung aller dieser Annahmen sei endlich noch Folgendes bemerkt:

1. der von Herrn Oberstlieutenant Otto für flache Bahnen bewährt gefundene empirische Ausdruck kann auch unter der Form

$$- m + h \frac{g}{v^2} = - m + h \frac{g\,dt^2}{ds^2} = - m + h \frac{g\,dt^2}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{ds^2}$$

dargestellt werden, und für $m = 0$ und $h = 0$ wird, wie sich aus der unten folgenden Entwickelung leicht übersehen lässt:

$$- \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{g\,dt^2}{dx^2} \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Der erste Ausdruck ist demnach dem zweiten sehr ähnlich und wird bei den flachen Bahnen, bei welchen letzteren sich bereits bewährte, ungefähr eben so gut passen als dieser.

2. Denkt man sich unter Benutzung des zweiten Ausdrucks die Werthe der Constanten m und h aus kürzeren und flächeren Bahnen bestimmt, und sodann bei der Untersuchung über eine höhere und wesentlich längere Bahn angewendet, so kann die Rechnung möglicherweise gegen das Ende der Bahn hin für $\frac{d^2 y}{dx^2}$ positive Werthe geben; dies würde aber eine Wiederabnahme der Neigungswinkel der Geschossrichtungen im absteigenden Aste der Bahn ausdrücken und mithin widersinnig sein. Bei Anwendung des ersten Ausdrucks kann dies hingegen, wie der unten entwickelte Werth von $\frac{d^2 y}{dx^2}$ zeigt, nie eintre-

ten, und dieser Ausdruck scheint daher einer allgemeinern Anwendung fähig, als der zweite.

Aus den im Vorstehenden gemachten Voraussetzungen ergeben sich nun für die Geschwindigkeitszunahmen in beiden Coordinatenrichtungen und während der Zeit dt, die Differenzialgleichungen:

$$1)\quad d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{dx\,d^2t}{dt^2} = -\frac{1}{2k}\frac{dx\,ds}{dt^2}\left(1+\frac{j}{\cos^2 w}\cdot\frac{dx^2}{dt^2}\right)dt$$
$$+\left(m+h\varphi\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{dx\,dy}{ds^2}dt$$

und

$$2)\quad d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt} - \frac{dy\,d^2t}{dt^2} = -g\,dt - \frac{1}{2k}\frac{dy\,ds}{dt^2}\left(1+\frac{j}{\cos^2 w}\cdot\frac{dx^2}{dt^2}\right)dt$$
$$-\left(m+h\varphi\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{ds^2}dt$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $-dy$ und die zweite mit dx und addirt man dann dieselben, so kommt:

$$\frac{dx\,d^2y}{dt} = -g\,dx\,dt - \left(m+h\varphi\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx\,dt$$

und hieraus folgt:

$$3)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -(g+m)\frac{\frac{dt^2}{dx^2}}{1+h\varphi\frac{dt^2}{dx^2}}.$$

Lässt man ferner in der Gleichung 1) das letzte auf die zweite Composante S des Luftwiderstandes bezügliche Glied für den Augenblick weg, so kann wegen $\frac{s}{k} = z$ diese Gleichung auch auf nachstehende Weise geschrieben werden:

$$\frac{2\frac{dt}{dx}\cdot\frac{d^2t}{dx}}{\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{j}{\cos^2 w}} = dz$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man durch A die Constante des Integrals bezeichnet:

$$\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{j}{\cos^2 w} = e^A e^z$$

Für $z=0$ wird $\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{V^2\cos^2 w}$ und setzt man:

$$4)\quad 1+jV^2 = \alpha,$$

$$5)\quad \frac{jV^2}{1+jV^2} = \delta,$$

wobei noch bemerkt werden möge, dass z. B. bei der unten gemachten Anwendung der entwickelten Formeln $\alpha = \frac{4}{3}$ und $\delta = \frac{1}{4}$ wird, so erhält man:

$$e^{A} = \frac{\alpha}{V^2 \cos^2 w}$$

und

$$\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{\alpha}{V^2 \cos^2 w}(e^{z} - \delta)$$

Dieser Ausdruck ist durch die Vernachlässigung der horizontalen Composante von S ungenau, und setzt man den wahren Werth von $\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{v^2 \cos^2 \beta}$

6) $$\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{\alpha}{V^2 \cos^2 w}(e^{z+\varepsilon} - \delta)$$

so ist in Betreff der Grösse von ε folgendes zu bemerken:

Bezeichnet man den zuerst erhaltenen unrichtigen Werth von $\frac{dx}{dt} = v \cos\beta$ durch $v_{,}$ und den wahren Werth dieser Grösse durch $v_{,} - v_{,,}$ so kann nur gegen das Ende sehr langer Flugbahnen, bei denen $v_{,}$ vielmal kleiner als $V \cos w$ wird, $v_{,,}$ sehr beträchtlich gegen $v_{,}$ ausfallen.

Wird demnach dieser letztere Fall vor der Hand ausgeschlossen, so ist $(v_{,} - v_{,,})^2$ nahe $v_{,}^2 - 2 v_{,} v_{,,}$.

Ferner kann $v_{,,}$ nicht eher beträchtliche Werthe erhalten, als bis die horizontale Composante der Kraft S eine Zeit lang wirksam gewesen, und mithin e^{z} viel grösser als δ geworden ist. Zur Ermittelung der ungefähren Werthe von ε kann man demnach setzen:

$$\frac{1}{v_{,}^2} = \frac{\alpha e^{z}}{V^2 \cos^2 w}$$

$$\frac{1}{v_{,}^2 - 2 v_{,} v_{,,}} = \frac{\alpha e^{z+\varepsilon}}{V^2 \cos^2 w}$$

und mithin

$$1 - 2\frac{v_{,,}}{v_{,}} = e^{-\varepsilon}$$

oder nahe

$$\varepsilon = 2\frac{v_{,,}}{v_{,}}$$

Die Geschwindigkeit $v_{,}$ nimmt vom Anfang der Bewegung an unausgesetzt ab, $v_{,,}$ hingegen ist anfänglich Null, und wächst dann, wegen der abnehmenden Neigung der Richtung von S, nur sehr langsam bis zum Scheitel der Bahn. Von hier an nimmt die horizontale Composante von S die entgegengesetzte Richtung an, und mithin $v_{,,}$ wieder ab. Anfänglich geschieht dies nur langsam, aber wegen der zunehmenden Neigung der Richtung und der fortwährenden Zunahme von S nach und nach immer schneller, so dass $v_{,,}$ bald negativ wird. Die Grösse $\varepsilon = 2\frac{v_{,,}}{v_{,}}$ ist daher im ganzen aufsteigenden Ast der Bahn ein positiver und kleiner ächter Bruch, erreicht im absteigenden Ast der Bahn, nicht weit vom Scheitel ihr Maximum, wird alsdann sehr bald negativ, und kann gegen das Ende sehr langer und sehr gekrümmter Bahnen beträchtliche negative Werthe erhalten.

Um dies an einem recht in die Augen fallenden Beispiel zu zeigen, liegt ein ganz ungewöhnlicher Fall vor, in welchem die Zunahme von ε ge-

abgeleiteten Elevationswinkels, so erhält man den Fehler, welcher bei der Bestimmung von w durch den Versuch stattgefunden hätte, wenn die der Rechnung zum Grunde liegende Hypothese über den Luftwiderstand die richtige wäre. Endlich zeigt die Vergleichung der auf solche Art bestimmten Fehler von $tg\,w$ mit den vorn aufgeführten ungefähren Grenzen der wahrscheinlichen Fehler von $tg\,w$, wie die angewendete Hypothese über den Widerstand der Luft auf die drei ersten Versuche passt. In Beziehung auf den vierten Versuch ist dieses Verfahren nicht anwendbar; weil sich dabei so grosse Fehler von w herausstellen könnten, dass dadurch auch ξ, u und r wesentliche Aenderungen erlitten. Hier muss daher der Elevationswinkel w als richtig, und dagegen als möglicherweise fehlerhaft die Höhe EE'' Fig. 1. angesehen werden, um welche am Ende der Bahn das Geschoss aus seiner ursprünglichen Richtung herabgesunken ist. Aus den Versuchen selbst ergiebt sich diese Höhe, welche wir der Kürze wegen den Fallraum nennen, und mit F bezeichnen wollen $= 4490\, tg\, 15^0\, 3\frac{1}{2}' - 34$ Ellen $= 1174$ Ellen, mit der ungefähren Grenze von 20 Ellen für wahrscheinliche Fehler, und berechnet man dagegen unter Annahme der zu prüfenden Hypothese über den Widerstand der Luft und des derselben entsprechenden, aus den Versuchen I., II. und III. abgeleiteten Mittelwerthes A_1 denselben Fallraum

$$F = x\, tg\, w - y,$$

so zeigt der Vergleich dieses berechneten F mit dem durch Beobachtung gefundenen $F = 1174$ Ellen, in wie weit die angewendete Hypothese über den Widerstand der Luft geeignet ist, das Verhältniss der bei allen vier Versuchen erreichten Schussweiten darzustellen und mithin die Theorie mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bringen.

Dem vorliegenden Zweck gemäss wurde zuvörderst versucht, ob diese Uebereinstimmung auch ohne Annahme eines seitlichen Luftwiderstandes S erreichbar sei, und daher bei allen vier Versuchen die Gleichung 13) unter verschiedenen Annahmen über k und δ angewendet. Bezeichnet wieder, wie in der vorläufigen Bemerkung Nr. V., C den Faktor, mit welchem der von Newton angegebene Widerstand der Luft multiplicirt werden muss, um den wahren Widerstand derselben zu erhalten, so wurde zuvörderst

$$C = 1{,}2\left(1 + \frac{v^2}{2V^2}\right)$$

gesetzt, um ungefähr den von Hutton gefundenen Werthen dieses Faktors zu entsprechen, und hierbei erhielt $\frac{1}{k}$ den Werth 0,00075, δ den Werth $\frac{1}{3}$ und α den Werth $\frac{3}{2}$, wie schon oben zur Beurtheilung der Convergenz der vorkommenden Reihen u.s.w. bemerkt wurde; der bei dieser Voraussetzung gefundene Fallraum F war jedoch in Vergleich mit dem von den Geschossen wirklich durchfallenen viel zu gross, und daher wurde die Rechnung zuerst unter der Annahme $C = 1{,}2$ und da auch hier F noch zu gross kam, noch einmal für $C = 1$ wiederholt.

Die Ergebnisse dieser drei Rechnungen enthält die nachstehende Tabelle und in derselben bezeichnen

I., II., III. und IV. die Nummern der Versuche, über welche die Rechnung angestellt wurde,

x die erreichte Schussweite,

$\triangle\, tg\, w$ = Tangente des oben angegebenen, unmittelbar aus dem Versuch abgeleiteten — Tangente des durch die Rechnung gefundenen Elevationswinkels,

V die aus dem Mittelwerth $A_1 = \varrho k$ berechnete anfängliche Geschwindigkeit, und ebenfalls unter der Annahme von $\varrho = \frac{1}{k} A_1$:

$$X_{,} = \varrho k (e^{\xi} - \tfrac{1}{2} \delta \xi^2 - \xi - 1)$$
$$X_{,,} = \varrho^2 k \sin w (\tfrac{1}{4} e^{2\xi} - (\xi - 1) e^{\xi} - \tfrac{1}{2} \xi - \tfrac{5}{4})$$
$$X_{,,,} = \varrho^3 k (\tfrac{1}{36} e^{3\xi} - \tfrac{1}{4} e^{2\xi} + (\tfrac{1}{2} \xi - \tfrac{1}{4}) e^{\xi} + \tfrac{1}{6} \xi + \tfrac{17}{36})$$
$$F = X_{,} - X_{,,} + X_{,,,}$$

endlich

$\triangle F = F - 1174$ Ellen, das ist also das, um was die ballistische Formel den von dem Geschoss am Ende der Bahn durchfallenen Raum zu gross giebt:

	$C = 1{,}2\left[1 + \frac{v^2}{2V^2}\right]$, für den Anfang der Bewegung also = 1,8.			$C = 1{,}2$, mithin $\alpha = 1$ und $\delta = 0$.			$C = 1$, mithin $\alpha = 1$ und $\delta = 0$.		
	I.	II.	III.	I.	II.	III.	I.	II.	III.
$x =$	900 Ell.	1400 Ell.	1900 Ell.	900 Ell.	1400 Ell.	1900 Ell.	900 Ell.	1400 Ell.	1900 Ell.
$A =$	87,240	85,785	82,547	64,305	65,962	66,427	96,54	101,67	105,42
$\triangle\, tg\, w =$	0,0005	0,0003	−0,002	−0,0005	0,0002	0,0008	−0,001	0,0002	0,002
A_1	85,190			65,565			101,21		
V	736 Ellen			685 Ellen			660 Ellen		
IV. $x = 4490$ Ellen.									
$X_{,}$	+ 2231 Ellen			+ 1849,5 Ellen			+ 1455,2 Ellen		
$-X_{,,}$	− 258,7 „			− 153,3 „			− 76,5 „		
$+X_{,,,}$	+ 261,9 „			+ 119,5 „			+ 44,3 „		
F	2234,2 Ellen			1815,7 Ellen			1423 Ellen		
$\triangle F$	1060,2 Ellen			641,7 Ellen			249 Ellen		

Aus der Betrachtung dieser Ergebnisse der Rechnung geht Folgendes hervor.

1. Solange es sich allein um die drei ersten Versuche handelt, gewährt jede der drei verschiedenen Hypothesen über C insoweit eine Uebereinstimmung zwischen Theorie und Praxis, als die dabei übrig bleibenden Fehler von $tg\, w$ die oben angeführten Grenzen der wahrscheinlichen Fehler nicht, oder doch höchstens nur wenig überschreiten. Bei der zweiten Hypothese sind aber diese Fehler am kleinsten, und es ist eigenthümlich, dass überhaupt ähnliche Annahmen über C zur Zusammenstellung von dergleichen flachen Bahnen, ohne Annahme eines seitlichen Luftwiderstandes der Luft

am besten zu passen scheinen. So erhielt z. B. der Verfasser schon in früherer Zeit bei einer Untersuchung über Bahnen derselben, jedoch mit grösseren Pulverladungen wie bei den obigen Versuchen abgeschossenen Geschützkugeln durch die Methode der kleinsten Quadrate $C = 1,15$. Am wenigsten passt endlich unter den drei oben angeführten Hypothesen die letzte $C = 1$; inwiefern ein so kleiner Werth von C auch aus theoretischen Gründen unwahrscheinlich ist, wurde bereits in der Einleitung bemerkt.

2. Bei der Anwendung des aus den Versuchen I., II. und III. abgeleiteten Mittelwerthes $A_1 = \varrho k$ auf den Versuch IV. fällt wohl zunächst die geringe Verschiedenheit der Glieder $X_{,,}$ und $X_{,,,}$ in das Auge, welche sich in allen drei Fällen zum grössten Theil aufheben, so dass der Fehler der gleichzeitigen Weglassung beider Glieder weit geringer sein würde, als der aus der alleinigen Weglassung des letzten Gliedes entstehende Fehler. Dies liegt zunächst darin, dass die angewendete Formel überhaupt nicht mit dem Ergebniss der Praxis übereinstimmt, sondern der Endpunkt der Bahn viel zu tief, mithin auch der Bogen s in Vergleich mit ξ zu gross giebt, es bestätigt aber auch die oben über die Convergenz der Otto'schen Reihe gemachte Bemerkung.

3. Für alle drei Hypothesen giebt die Rechnung die durchfallenen Räume viel zu gross. Die Fehler $\triangle F$ nehmen allerdings mit den dem Faktor C beigelegten Werthen ab, allein selbst die kleinste Annahme über C, welche allenfalls noch mit einigem Schein von Wahrscheinlichkeit gemacht werden kann, und auf die Versuche I., II., III. schon weniger gut als die andern Hypothesen passt, nämlich $C = 1$, giebt doch noch $\triangle F$ viel zu gross.

Die obigen Ergebnisse beweisen daher wohl unverkennbar, dass bei Schüssen, welche mit gleichen Pulverladungen, aber unter so verschiedenen Elevationswinkeln, wie bei den Versuchen I. bis IV. geschehen, die Erlangung der gewünschten Uebereinstimmung zwischen Theorie und Praxis ohne Annahme einer seitlichen Wirkung der Luft auf die Geschosse auch dann unmöglich ist, wenn beim Laden der letzteren ihr Schwerpunkt genau hinter dem Mittelpunkt gelegt worden war. Bei der Annahme eines seitlichen Luftwiderstandes S war keine Veranlassung zu einem Wechsel mit den Werthen von C vorhanden, sondern es wurde

$$C = 1,2 \left[1 + \frac{v^2}{2V^2}\right]$$

und

$$\frac{1}{k} = 0,00075,$$

was den Hutton'schen Angaben ungefähr entspricht, überall beibehalten. Dagegen wurden nach und nach verschiedene Hypothesen über die Grösse von S, d. h. verschiedene Werthe von $\frac{V^2}{\alpha h}$ versucht. Die Ergebnisse dieser Untersuchung enthält die folgende Tabelle, welche nach dem bereits oben Bemerkten von selbst verständlich sein wird.

Reihe, und daher ist die Abnahme dieser letzteren Glieder eine scheinbar sehr unregelmässige. Dasselbe trägt sich aber, wenn auch in geringerem Maasse, auf die aus ihr durch Integration hervorgehenden Reihen für $\frac{dy_1}{dx}$ und für y_1 über. So würde man z. B. in dieser letzteren Reihe, deren Anfang die Gleichung 13)*) giebt, durch willkürliches Abbrechen derselben bei dem dritten Gliede in manchen Fällen einen grössern Fehler begehen, als wenn man auch sogleich das zweite Glied mit wegliesse.

Wendet man sich nun wieder zu dem Falle einer seitlichen Wirkung des Luftwiderstandes auf die Geschosse und setzt man in der Gleichung 10) für z seinen Werth $\xi - \psi$ ein, so kommt:

$$14)\qquad \frac{d^2y}{dx} = -\frac{\varrho}{\cos w}\left[\frac{e^{\xi-\psi+\varepsilon}-\delta}{1+u\varphi(e^{\xi-\psi+\varepsilon}-\delta)}\right]d\xi$$

In dieser Gleichung kommt die noch unbestimmte Funktion φ vor, für welche bei der empirischen Aufstellung des Ausdrucks für die zweite Composante S des Luftwiderstandes keine andere Bedingung vorbehalten wurde, als dass φ während der ganzen Dauer der Bewegung keine von der Einheit sehr verschiedenen Werthe annehmen solle. Dieser Bedingung aber wird genügt, wenn man

$$15)\qquad \frac{e^{\xi-\psi+\varepsilon}-\delta}{1+u\varphi(e^{\xi-\psi+\varepsilon}-\delta)} = \frac{e^{\xi}-\delta}{1+u(e^{\xi}-\delta)}$$

setzt. Da nämlich ψ und ε für den Anfang der Bewegung Null und überhaupt in der ersten Periode derselben die Differenz $(\psi-\varepsilon)$, wie oben erwiesen wurde, sehr klein ist und φ nicht selbst bestimmt, sondern nur eine ungefähre Grenze der Werthe, die es annehmen kann, gefunden werden soll, so kann δ gegen $e^{\xi-\psi+\varepsilon}$ vernachlässigt, und indem man die Brüche auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens umkehrt, die Gleichung folgendermassen geschrieben werden

$$\frac{1+u\varphi e^{\xi-\psi+\varepsilon}}{e^{\xi-\psi+\varepsilon}} = \frac{1+ue^{\xi}}{e^{\xi}}$$

d. i. auch:

$$e^{(\psi-\varepsilon)-\xi} + u\varphi = e^{-\xi} + u,$$

oder

$$\varphi = 1 - \frac{e^{\psi-\varepsilon}-1}{ue^{\xi}}$$

Oben wurde ferner bereits gezeigt, dass $\psi - \varepsilon$ bei Flugbahnen von nicht sehr grosser Länge während der ganzen Dauer der Bewegung, und bei ungewöhnlich langen Bahnen in dem ganzen aufsteigenden Ast und einem beträchtlichen Theil des absteigenden Astes ein sehr kleiner Bruch bleibt. So oft und so lange dies stattfindet, kann man daher setzen

$$\varphi = 1 - \frac{\psi-\varepsilon}{ue^{\xi}}$$

*) Wird die Reihe nach Potenzen von ϱ noch weiter fortgesetzt, so gehört auch zu dem in Nr. 13 aufgeführten letzten Gliede noch ein Theil, welcher ebenfalls ϱ^3 zum Faktor hat, dessen Weglassung aber durch das oben Gesagte, sowie durch den ganzen Gang der Entwickelung gerechtfertigt sein dürfte.

mung des Elevationswinkels w für die Schussweite 1900 Ellen die Einfallswinkel der schon vor der Zielfläche aufgeschlagenen Kugeln nur nach der gewöhnlichen ballistischen Theorie, ohne Rücksicht auf einen seitlichen Luftwiderstand berechnet werden konnten, weil man die Richtung und die Grösse dieses Widerstandes noch nicht kannte; denn auf diese Weise mussten die Einfallswinkel zu gross, und mithin die Treffpunkte in der Zielfläche zu tief in Rechnung kommen, der passende Elevationswinkel w folglich zu gross gefunden werden.

3. Aus einer kleinen Anzahl von Schüssen, welche bei einer späteren Gelegenheit auf die Schussweite von 2600 Ellen geschehen sind, und deren Resultate allerdings nicht zu einer genauen Bestimmung des jener Entfernung entsprechenden Elevationswinkels w ausreichen, geht doch so viel hervor, dass in diesem Abstand vom Geschütz $\triangle\, tg\, w$ bestimmt schon negativ geworden ist, mithin ein fortwährendes Wachsen von $\triangle\, tg\, w$ weit über die Schussweite 1900 Ellen hinaus nicht eintritt. Die Hypothese $\frac{V^2}{\alpha h}$ dürfte daher bei der Zusammenstellung der vier Versuche I., II., III. und IV. die gewünschte Uebereinstimmung zwischen Theorie und Praxis wenigstens insoweit gewähren, als es für die letztere von Nutzen ist, und ohne Anwendung von sehr weitläufigen, nach den Potenzen von ϱk u. s. w. entwickelten Formeln überhaupt beansprucht werden kann. Es mögen daher hier noch einige weitere auf dieselbe Hypothese gegründete Erörterungen folgen:

Da in dem erhaltenen Mittelwerth

$$A_1 = \varrho k = \frac{(g+m)\,\alpha k^2}{V^2}$$

die noch unbekannte Grösse m vorkommt, so konnte die anfängliche Geschwindigkeit V nicht hieraus, sondern nur aus den beobachteten Flugzeiten vermittelst der Gleichung 28) oder 29) berechnet werden.

Man erhielt hierbei, je nachdem die Flugzeit des ersten, zweiten oder dritten Versuchs zum Grunde gelegt wurde:

Aus der Flugzeit I. $V = 715$ Ellen
„ „ „ II. $V = 721$ „
„ „ „ III. $V = 758$ „

Nach dem bereits oben über die Beobachtung der gedachten Zeiten und über die anfänglichen Geschwindigkeiten der Geschosse Bemerkten ist $V = 759$ Ellen bestimmt zu gross, und mithin die entsprechende Zeit zu klein. Auch die anderen beiden Zeiten sind wahrscheinlich wenigstens insofern zu klein, als die zu denselben gehörigen Hunderttheile von Secunden nicht mit beobachtet werden konnten. Da nun auch die beiden aus ihnen abgeleiteten Geschwindigkeiten im Vergleich mit der bei dem längern französischen Geschütz erhaltenen noch etwas zu gross erscheinen, so wird man gewiss wenig fehlgreifen, wenn man jene Zeiten anstatt 1,6″ und 2,8″ etwa 1,64″ und 2,87″ annimmt. Alsdann folgt aus der ersten Zeit $V = 698$ Ellen und aus der zweiten Zeit $V = 703$ Ellen; im Durchschnitt also $V = 700{,}5$ Ellen. Benutzt man diese letztere Geschwindigkeit, um nach den Gleichungen 30), 31) und 32) m, G und G_0 zu berechnen, so ergiebt sich $m = 2$ Ellen und

$$= \left[-2 + 19{,}32\left(\frac{e\xi - \delta}{5{,}4 + (e\xi - \delta)}\right)\right] \text{ Ellen,}$$

das i ... n Versuch III. am Ende der Bahn $G = 6{,}025$ Ellen. Endlich ... Anfang der Bewegung die Beschleunigung der Kraft S:

$$G_0 = 0{,}1 \text{ Ellen,}$$

das ist also ganz unmerklich.

Nimmt man die anfängliche Geschwindigkeit V so an, wie sich dieselbe aus den beiden ersten ohne Hunderttheile von Secunden angeführten Flugzeiten ergiebt, so wird die Beschleunigung der Kraft S für den Anfang der Bewegung $= -0{,}76$ Ellen und erst nach einiger Zeit positiv. Die Kraft S müsste also im Anfang der Bewegung von oben nach unten drücken, und dann, durch Null hindurchgehend, ihre Richtung umkehren, und da dies nicht wahrscheinlich ist, so spricht auch dieser Umstand für die oben allerdings nur willkürlich vorgenommene Hinzufügung von Hunderttheilen der Secunden zu den nur bis zu den Zehntheilsecunden angegebenen Zeiten.

XIX.

Ueber die Reduction gewisser vielfacher Integrale.

(Nach *Liouville's Mémoire sur la réduction de classes très-étendues d'integrales multiples. Journal de Mathématiques; deuxième série, Tome I. Aout* 1856).

Mittelst eines von Liouville angegebenen und im 3. Hefte dieser Zeitschrift S. 184 mitgetheilten Verfahrens findet sich der Werth des (n — fachen Integrales

$$1)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty .. e^{-\left(x+y+..+t+\frac{k^n}{xy..t}\right)} x^{\frac{1}{n}-1} y^{\frac{2}{n}-1} .. t^{\frac{n-1}{n}-1}\, dx\, dy \dots dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk};$$

Hieraus können nach einer späteren Bemerkung des Verfassers noch mehrere interessante Ergebnisse abgeleitet werden.

Führt man in das $n$fache Integral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty .. e^{-(x+y+..+t+u)} \varphi(xy..tu)\, x^{\frac{0}{n}} y^{\frac{1}{n}} \dots u^{\frac{n-1}{n}}\, dx\, dy \dots du,$$

worin φ eine beliebige Funktion bezeichnet (natürlich der Art, dass das Integral einen bestimmten Werth erhält) die neue Variabele k mittelst der Substitution

In dem zweiten der obigen Fälle ist

$$X = \int_0^{\xi} \log nat\left(1 + \frac{1}{r} e^{\xi}\right) d\xi$$

$$= \int_0^{\lambda} \log nat\left(1 + \frac{1}{r} e^{\xi}\right) d\xi + \int_{\lambda}^{\xi} \log nat\left(1 + \frac{1}{r} e^{\xi}\right) d\xi$$

$$= f(1) - f\left(\frac{1}{r}\right) + \int_{\lambda}^{\xi} \left(\log nat\left(\frac{r}{e^{\xi}} + 1\right) + (\xi - \lambda)\right) d\xi$$

$$= f(1) - f\left(\frac{1}{r}\right) + \tfrac{1}{2}(\xi - \lambda)^2 + \int_{\lambda}^{\xi} \left(\frac{r}{e^{\xi}} - \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{e^{2\xi}} + \tfrac{1}{3}\frac{r^3}{e^{3\xi}} \cdots\right) d\xi$$

$$= f(1) - f\left(\frac{1}{r}\right) + \tfrac{1}{2}(\xi - \lambda)^2 + \left(f(1) - f\left(\frac{r}{e^{\xi}}\right)\right)$$

$$= 2f(1) - f\left(\frac{1}{r}\right) - f\left(\frac{r}{e^{\xi}}\right) + \tfrac{1}{2}(\xi - \lambda)^2$$

Endlich hat man noch $f(1) = \frac{1}{12}\pi^2$ und mithin:

$$X = \tfrac{1}{6}\pi^2 - f\left(\frac{1}{r}\right) - f\left(\frac{r}{e^{\xi}}\right) + \tfrac{1}{2}(\xi - \lambda)^2$$

Setzt man nun diese Werthe von X in die Gleichung 21) ein, so ergiebt sich:

a) für den Fall, dass $e^{\xi} \leqq r$ d. h. $\xi \leqq \lambda$ ist

$$24)\quad y = x\, tg\, w - \frac{\varrho k}{u r}\left[-\tfrac{1}{2}\delta\xi^2 + \frac{1}{u}\left(f\left(\frac{e^{\xi}}{r}\right) - f\left(\frac{1}{r}\right) - \xi \log nat\left(1 + \frac{1}{r}\right)\right)\right]$$

b) wenn $e^{\xi} > r$ d. h. $\xi > \lambda$ ist

$$25)\quad y = x\, tg\, w - \frac{\varrho k}{u r}\left[-\tfrac{1}{2}\delta\xi^2 + \frac{1}{u}\left(\tfrac{1}{6}\pi^2 - f\left(\frac{1}{r}\right) - f\left(\frac{r}{e^{\xi}}\right) + \tfrac{1}{2}(\xi - \lambda)^2 - \xi \log nat\left(1 + \frac{1}{r}\right)\right)\right]$$

Bei der Entwickelung aller vorstehenden Gleichungen wurde, wie gleich anfänglich bemerkt, die Voraussetzung gemacht, dass h und mithin den Gleichungen 9) und 17) gemäss auch u und r positiv sei. Tritt der entgegengesetzte Fall ein, so erhält ε ebenfalls entgegengesetzte Vorzeichen. Bei der Bestimmung von $\psi - \varepsilon$ sind alsdann die Zahlenwerthe der einzelnen Grössen ψ und ε da zu addiren, wo dieselben im ersten Falle subtrahirt wurden, und so umgekehrt. Die Differenz $\psi - \varepsilon$ wird mithin nun im aufsteigenden Ast der Bahn und in dem nächst daran grenzenden Theil des absteigenden Astes grösser als bei der oben geführten Untersuchung, in dem hinteren Theil des absteigenden Astes hingegen kleiner als oben. Da aber gerade während des ersten Theils der Bewegung sowohl ψ, als das nun negative ε nur sehr kleine Werthe haben, und mithin auch $\psi - \varepsilon$ doch nur

der Bedingung $b > w > 0$ d. h. $b > xy \ldots u > 0$ nicht genügen, und das Integral bezieht sich dann nur auf alle positiven die Ungleichung

$$3)\qquad b > xy \ldots . u > 0$$

befriedigenden Werthe der Variabelen $x, y \ldots u$; dies giebt die Integralformel

$$4)\qquad \int\int \ldots e^{-(x+y+\ldots+u)}\,\varphi(xy\ldots u)\,x^{\frac{0}{n}}\,y^{\frac{1}{n}}\ldots u^{\frac{n-1}{n}}\,dx\,dy\ldots du$$
$$= \sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^c e^{-nk}\,\varphi(k^n)\,k^{n-1}\,dk,$$

wo $c = \sqrt[n]{b}$ gesetzt und die Bedingung 3) festzuhalten ist.

Das Verfahren, welches früher zur Entwickelung der anfangs erwähnten Fundamentalformel angewendet wurde, führt auch zur Reduction des $(n-1)$ fachen Integrales

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots f\left(h+x+y+\ldots+t+\frac{k^n}{xy\ldots t}\right) x^{\frac{1}{n}-1}\,y^{\frac{2}{n}-1}\ldots t^{\frac{n-1}{n}-1}\,dx\,dy\ldots dt,$$

worin h und k beliebige Constanten bezeichnen. Nennen wir V den Werth des Integrales, so finden wir leicht

$$\frac{dV}{dh} = \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots f'\left(h+x+\ldots+t+\frac{k^n}{xy\ldots t}\right) x^{\frac{1}{n}-1}\ldots t^{\frac{n-1}{n}-1}\,dx\ldots dt,$$

$$\frac{dV}{dk} = nk^{n-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots f'\left(h+x+\ldots+t+\frac{k^n}{x\ldots t}\right) x^{\frac{1}{n}-1}\ldots t^{\frac{n-1}{n}-1}\,\frac{dx\ldots dt}{x\ldots t}.$$

Führen wir in das vorstehende Integral eine neue Variabele ξ ein mittelst der Substitution

$$x = \frac{k^n}{yz\ldots t.\xi},$$

so erhalten wir

$$\frac{dV}{dk} =$$
$$n\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots f'\left(h+y+\ldots+t+\xi+\frac{k^n}{y\ldots t\xi}\right) y^{\frac{1}{n}-1}\ldots t^{\frac{n-2}{n}-1}\,\xi^{\frac{n-1}{n}-1}\,dy\ldots dt\,d\xi,$$

wobei es nun auch erlaubt ist, $y, z \ldots \xi$ durch $x, y \ldots t$ zu ersetzen. Dann haben wir aber

$$\frac{dV}{dk} = n\,\frac{dV}{dh}$$

und das vollständige Integral dieser partiellen Differentialgleichung lautet

$$V = \psi(h + nk),$$

worin ψ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Diese bestimmt sich durch

$$Vt = \alpha^{\frac{1}{2}} k \left[2\sqrt{q-\delta} - \delta \int \frac{dq}{q\sqrt{q-\delta}}\right]$$

$$= 2\alpha^{\frac{1}{2}} k \left[\sqrt{q-\delta} - \sqrt{\delta} \,.\, arc\,tg\left(= \frac{\sqrt{q-\delta}}{\delta}\right) + A\right]$$

oder da $q = e^{\xi}$ und für $\xi = 0$ auch $t = 0$ ist

$$28)\quad Vt = 2\alpha^{\frac{1}{2}} k \left[\sqrt{e^{\xi} - \delta} - \sqrt{1-\delta} - \sqrt{\delta}\left(arc\,tg\left(= \frac{\sqrt{e^{\xi}-\delta}}{\delta}\right) - arc\,tg\left(= \frac{\sqrt{1-\delta}}{\delta}\right)\right)\right]$$

Eine zur Anwendung bequeme Formel für das Produkt Vt erhält man, wenn in der obigen Gleichung $(e^{\xi} - \delta)^{\frac{1}{2}}$ in einer Reihe entwickelt wird. Dies giebt:

$$29)\quad V dt = \alpha^{\frac{1}{2}} k \left(e^{\frac{1}{2}\xi} - \tfrac{1}{2}\delta e^{-\frac{1}{2}\xi} - \tfrac{1}{8}\delta^2 e^{-\frac{3}{2}\xi} \ldots\right) d\xi$$

und

$$Vt = 2\alpha^{\frac{1}{2}} k \left(\left(e^{\frac{1}{2}\xi} + \tfrac{1}{2}\delta e^{-\frac{1}{2}\xi} + \tfrac{1}{8}\delta^2 e^{-\frac{3}{2}\xi} \ldots\right) - \left(1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{8}\delta^2 \ldots\right)\right)$$

wobei natürlich beide Parenthesen mit gleichen Potenzen von δ abgebrochen werden müssen.

Ist V aus der Gleichung 28 oder 29, oder auf andere Weise gefunden worden, und aus den bei gleichen Pulverladungeu aber verschiedenen Elevationswinkeln beschriebenen Bahnen eines Geschosses

$$8)\quad \varrho k = \frac{(g+m)\,\alpha k^2}{V^2} = A$$

bestimmt worden, so erhält man

$$30)\quad m = \frac{A}{\alpha}\left(\frac{V}{k}\right)^2 - g.$$

Wurde dann aus denselben Bahnen auch:

$$9)\quad u = \frac{\alpha h}{V^2 \cos^2 w}$$

berechnet, so ergiebt sich die Beschleunigung der Kraft S, welche durch G bezeichnet werden möge, aus dem sogleich ursprünglich für dieselbe aufgestellten Ausdruck, in Verbindung mit den Gleichungen 16) und 8).

Unter der, bereits bei der Bestimmung von V gemachten Voraussetzung eines kleinen Elevationswinkels kann hierbei $\frac{dx}{ds} = 1$ und $\varphi = 1$ gesetzt werden, und man erhält daher:

$$31)\quad G = -m - h\frac{d^2y}{dx^2} = -m + \frac{(g+m)\,\alpha h}{V^2 \cos^2 w}\left(\frac{e^{\xi} - \delta}{1 + u(e^{\xi} - \delta)}\right)$$

$$= -m + (g+m)\,u\left(\frac{e^{\xi} - \delta}{1 + u(e^{\xi} - \delta)}\right)$$

$$= -m + (g+m)\left(\frac{e^{\xi} - \delta}{\frac{1}{u} + e^{\xi} - \delta}\right)$$

$\triangle tg w$ = Tangente des oben angegebenen, unmittelbar aus dem Versuch abgeleiteten — Tangente des durch die Rechnung gefundenen Elevationswinkels,

V die aus dem Mittelwerth $A_1 = \varrho k$ berechnete anfängliche Geschwindigkeit, und ebenfalls unter der Annahme von $\varrho = \frac{1}{k} A_1$:

$$X_{,} = \varrho k (e^{\xi} - \tfrac{1}{2}\delta\xi^2 - \xi - 1)$$
$$X_{,,} = \varrho^2 k \sin w (\tfrac{1}{4} e^{2\xi} - (\xi - 1) e^{\xi} - \tfrac{1}{2}\xi - \tfrac{5}{4})$$
$$X_{,,,} = \varrho^3 k (\tfrac{1}{36} e^{3\xi} - \tfrac{1}{4} e^{2\xi} + (\tfrac{1}{2}\xi - \tfrac{1}{4}) e^{\xi} + \tfrac{1}{6}\xi + \tfrac{17}{36})$$
$$F = X_{,} - X_{,,} + X_{,,,}$$

endlich

$\triangle F = F - 1174$ Ellen, das ist also das, um was die ballistische Formel den von dem Geschoss am Ende der Bahn durchfallenen Raum zu gross giebt:

	$C = 1,2\left[1 + \frac{v^2}{2V^2}\right]$, für den Anfang der Bewegung also = 1,8.			$C = 1,2$, mithin $\alpha = 1$ und $\delta = 0$.			$C = 1$, mithin $\alpha = 1$ und $\delta = 0$.		
	I.	II.	III.	I.	II.	III.	I.	II.	III.
$x =$	900 Ell.	1400 Ell.	1900 Ell.	900 Ell.	1400 Ell.	1900 Ell.	900 Ell.	1400 Ell.	1900 Ell.
$A =$	87,240	85,785	82,547	64,305	65,962	66,427	96,54	101,67	105,42
$\triangle tg w =$	0,0005	0,0003	−0,002	−0,0005	0,0002	0,0008	−0,001	0,0002	0,002
A_1	85,190			65,565			101,21		
V	736 Ellen			685 Ellen			660 Ellen		
IV. $x = 4490$ Ellen.									
$X_{,}$	+ 2231 Ellen			+ 1849,5 Ellen			+ 1455,2 Ellen		
$-X_{,,}$	− 258,7 „			− 153,3 „			− 76,5 „		
$+X_{,,,}$	+ 261,9 „			+ 119,5 „			+ 44,3 „		
F	2234,2 Ellen			1815,7 Ellen			1423 Ellen		
$\triangle F$	1060,2 Ellen			641,7 Ellen			249 Ellen		

Aus der Betrachtung dieser Ergebnisse der Rechnung geht Folgendes hervor.

1. Solange es sich allein um die drei ersten Versuche handelt, gewährt jede der drei verschiedenen Hypothesen über C insoweit eine Uebereinstimmung zwischen Theorie und Praxis, als die dabei übrig bleibenden Fehler von $tg w$ die oben angeführten Grenzen der wahrscheinlichen Fehler nicht, oder doch höchstens nur wenig überschreiten. Bei der zweiten Hypothese sind aber diese Fehler am kleinsten, und es ist eigenthümlich, dass überhaupt ähnliche Annahmen über C zur Zusammenstellung von dergleichen flachen Bahnen, ohne Annahme eines seitlichen Luftwiderstandes der Luft

am besten zu passen scheinen. So erhielt z. B. der Verfasser schon in früherer Zeit bei einer Untersuchung über Bahnen derselben, jedoch mit grösseren Pulverladungen wie bei den obigen Versuchen abgeschossenen Geschützkugeln durch die Methode der kleinsten Quadrate $C = 1{,}15$. Am wenigsten passt endlich unter den drei oben angeführten Hypothesen die letzte $C = 1$; inwiefern ein so kleiner Werth von C anch aus theoretischen Gründen unwahrscheinlich ist, wurde bereits in der Einleitung bemerkt.

2. Bei der Anwendung des aus den Versuchen I., II. und III. abgeleiteten Mittelwerthes $A_1 = \varrho k$ auf den Versuch IV. fällt wohl zunächst die geringe Verschiedenheit der Glieder $X_{,,}$ und $X_{,,,}$ in das Auge, welche sich in allen drei Fällen zum grössten Theil aufheben, so dass der Fehler der gleichzeitigen Weglassung beider Glieder weit geringer sein würde, als der aus der alleinigen Weglassung des letzten Gliedes entstehende Fehler. Dies liegt zunächst darin, dass die angewendete Formel überhaupt nicht mit dem Ergebniss der Praxis übereinstimmt, sondern der Endpunkt der Bahn viel zu tief, mithin auch der Bogen s in Vergleich mit ξ zu gross giebt, es bestätigt aber auch die oben über die Convergenz der Otto'schen Reihe gemachte Bemerkung.

3. Für alle drei Hypothesen giebt die Rechnung die durchfallenen Räume viel zu gross. Die Fehler $\triangle F$ nehmen allerdings mit den dem Faktor C beigelegten Werthen ab, allein selbst die kleinste Annahme über C, welche allenfalls noch mit einigem Schein von Wahrscheinlichkeit gemacht werden kann, und auf die Versuche I., II., III. schon weniger gut als die andern Hypothesen passt. nämlich $C = 1$, giebt doch noch $\triangle F$ viel zu gross.

Die obigen Ergebnisse beweisen daher wohl unverkennbar, dass bei Schüssen, welche mit gleichen Pulverladungen, aber unter so verschiedenen Elevationswinkeln, wie bei den Versuchen I. bis IV. geschehen, die Erlangung der gewünschten Uebereinstimmung zwischen Theorie und Praxis ohne Annahme einer seitlichen Wirkung der Luft auf die Geschosse auch dann unmöglich ist, wenn beim Laden der letzteren ihr Schwerpunkt genau hinter dem Mittelpunkt gelegt worden war. Bei der Annahme eines seitlichen Luftwiderstandes S war keine Veranlassung zu einem Wechsel mit den Werthen von C vorhanden, sondern es wurde

$$C = 1{,}2\left[1 + \frac{v^2}{2V^2}\right]$$

und

$$\frac{1}{k} = 0{,}00075,$$

was den Hutton'schen Angaben ungefähr entspricht, überall beibehalten. Dagegen wurden nach und nach verschiedene Hypothesen über die Grösse von S, d. h. verschiedene Werthe von $\frac{V^2}{\alpha h}$ versucht. Die Ergebnisse dieser Untersuchung enthält die folgende Tabelle, welche nach dem bereits oben Bemerkten von selbst verständlich sein wird.

$$12)\quad \int\int\ldots f(x+y+\ldots+u)\,\varphi(xy\ldots u)\,x^{\frac{0}{n}}y^{\frac{1}{n}}\ldots u^{\frac{n-1}{n}}\,dx\,dy\ldots du$$

$$=\frac{\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^k\int_0^{h-n\xi} f(n\xi+\eta)\,\varphi(\xi^n)\,\xi^{n-1}\eta^{\frac{n-1}{2}-1}\,d\xi\,d\eta.$$

Für $n=2$ kann man diese merkwürdige Formel leicht verificiren und die Integrale geometrisch deuten. Das Doppelintegral

$$V=\int\int f(x+y)\,\varphi(xy)\,y^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy$$

$$Conditt.\ h>x+y>0,\quad k^2>xy>0$$

lässt sich nämlich als ein Volumen betrachten, welches oberhalb durch die Fläche $z=f(x+y)\,\varphi(xy)\sqrt{y}$ begrenzt wird und zur Basis eine aus dem Durchschnitte einer Geraden mit einer gleichseitigen Hyperbel entspringenden Figur hat. Um letztere zu construiren, denke man sich zunächst eine Gerade, die von der x-Achse das Stück $OA=h$ und von der y-Achse das gleiche Stück $OB=h$ abschneidet; die erste Bedingung $h>x+y>0$ charakterisirt dann alle innerhalb des Dreiecks AOB liegenden Punkte xy. Die zweite Bedingung $k^2>xy>0$ sagt, dass der Punkt zwischen den Coordinatenachsen und der durch die Gleichung $xy=k^2$ bestimmten gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die Coordinatenachsen sind, liegen muss. Wenn nun die Gerade AB die Hyperbel in zwei Punkten C und D schneidet, was für $k<\frac{1}{2}h$ der Fall ist, so können beide Bedingungen zusammen bestehen und der Punkt xy hat die Fläche des gemischtlinigen Fünfecks $AOBDCA$ zum Spielraum; dieses Fünfeck ist die Basis des Volumens V. Bei der Symmetrie der Figur bleibt V Dasselbe, wenn auch die Coordinaten vertauscht werden, also

$$V=\int\int f(x+y)\,\varphi(xy)\,x^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy$$

und ferner

$$V=\tfrac{1}{2}\int\int f(x+y)\,\varphi(xy)\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dx\,dy.$$

Mittelst der Substitutionen

$$x+y=2\xi+\eta,\quad xy=\xi^2$$

erhält man

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\sqrt{4\xi+\eta},$$

$$x=\tfrac{1}{2}(2\xi+\eta+\sqrt{4\xi\eta+\eta^2}),\quad y=\tfrac{1}{2}(2\xi+\eta-\sqrt{4\xi\eta+\eta^2})$$

und nach der bekannten Regel für die Einführung neuer Variabelen

$$dx\,dy=\left(\frac{dx}{d\xi}\frac{dy}{d\eta}-\frac{dx}{d\eta}\frac{dy}{d\xi}\right)d\xi\,d\eta$$

$$=\frac{2\xi}{\sqrt{4\xi\eta+\eta^2}}\,d\xi\,d\eta.$$

Demnach wird

$$V=2\int\int f(2\xi+\eta)\,\varphi(\xi^2)\frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\,d\xi\,d\eta$$

und hier beziehen sich die Integrationen auf alle positiven ξ und η, welche den Bedingungen

$$h > 2\xi + \eta > 0, \quad k^2 > \xi^2 > 0$$

gleichzeitig genügen; daraus ergeben sich die Grenzen $\xi = 0$ und $\xi = k$, sowie $\eta = 0$ und $\eta = h - 2\xi$, endlich ist

$$V = 2\int\limits_0^k\int\limits_0^{h-2\xi} f(2\xi + \eta)\,\varphi(\xi^2)\frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\,d\xi\,d\eta$$

und dieses Resultat stimmt mit der Formel 12) für $n = 2$ überein. In der letzten Form bedeutet V das Doppelte eines anderen Volumens mit trapezförmiger Basis; dieses Trapez wird von den Coordinatenachsen der ξ und η, von einer in der Entfernung k parallel zur η-Achse gehenden Geraden und endlich von einer Geraden gebildet, die auf der ξ-Achse die Strecke $\frac{1}{2}h$ und auf der η-Achse die Strecke h abschneidet.

XX.

Ueber einige Arten der mechanischen Beschreibung der Ellipse und über den Satz von Fagnano.

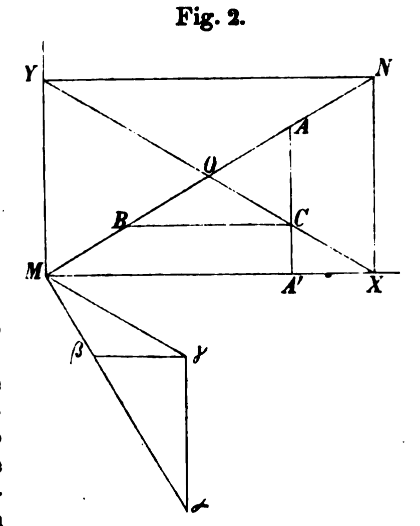
Von C. KÜPPER in Trier.

Ich knüpfe meine Betrachtungen an folgenden Satz an:

Wenn eine gerade Linie von unveränderlicher Länge mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleitet, so beschreibt irgend ein Punkt derselben eine Ellipse, deren Halbachsen die Segmente sind, in welche dieser Punkt die bewegliche Linie theilt.

Fig. 2. XY sei die bewegliche Gerade, MX, MY die Schenkel des rechten Winkels, C der beschreibende Punkt. Stellen wir uns vor, das Rechteck $MXNY$ sei mit XY beweglich, so beschreibt die Ecke N einen Kreis um den Punkt M, dessen Radius XY ist. Ziehen wir nun CA normal auf MX, CB normal auf MY, so erhalten wir auf der Diagonale MN zwei Punkte, A, B, deren Oerter zwei Kreise sind, welche M zum Mittelpunkt und zu Radien beziehlich $MA = CY = a$, und $MB = CX = b$ haben.

Fig. 2.



Dass nun der Ort von C eine Ellipse ist, welche a, b zu Halbachsen hat, ergiebt sich daraus, dass $AA' : CA = a : b = Const.$, und somit die Curve, welche C beschreibt, als rechtwinklige Projektion des Kreises erscheint, auf welchem

$$G = \left[-2 + 19{,}32\left(\frac{e\xi - \delta}{5{,}4 + (e\xi - \delta)}\right)\right] \text{ Ellen},$$

das ist z. B. beim Versuch III. am Ende der Bahn $G = 6{,}025$ Ellen. Endlich ist für den Anfang der Bewegung die Beschleunigung der Kraft S:

$$G_0 = 0{,}1 \text{ Ellen},$$

das ist also ganz unmerklich.

Nimmt man die anfängliche Geschwindigkeit V so an, wie sich dieselbe aus den beiden ersten ohne Hunderttheile von Secunden angeführten Flugzeiten ergiebt, so wird die Beschleunigung der Kraft S für den Anfang der Bewegung $= -0{,}76$ Ellen und erst nach einiger Zeit positiv. Die Kraft S müsste also im Anfang der Bewegung von oben nach unten drücken, und dann, durch Null hindurchgehend, ihre Richtung umkehren, und da dies nicht wahrscheinlich ist, so spricht auch dieser Umstand für die oben allerdings nur willkürlich vorgenommene Hinzufügung von Hunderttheilen der Secunden zu den nur bis zu den Zehntheilsecunden angegebenen Zeiten.

XIX.

Ueber die Reduction gewisser vielfacher Integrale.

(Nach Liouville's *Mémoire sur la réduction de classes très-étendues d'integrales multiples. Journal de Mathématiques; deuxième série, Tome I. Aout* 1856).

Mittelst eines von Liouville angegebenen und im 3. Hefte dieser Zeitschrift S. 184 mitgetheilten Verfahrens findet sich der Werth des $(n-1)$ fachen Integrales

$$1)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty ..e^{-\left(x+y+..+t+\frac{k^n}{xy..t}\right)} x^{\frac{1}{n}-1} y^{\frac{2}{n}-1} .. t^{\frac{n-1}{n}-1} dx\, dy \ldots dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk};$$

Hieraus können nach einer späteren Bemerkung des Verfassers noch mehrere interessante Ergebnisse abgeleitet werden.

Führt man in das n fache Integral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty ..e^{-(x+y+..+t+u)} \varphi(xy..tu)\, x^{\frac{0}{n}} y^{\frac{1}{n}} \ldots u^{\frac{n-1}{n}} dx\, dy \ldots du,$$

worin φ eine beliebige Funktion bezeichnet (natürlich der Art, dass das Integral einen bestimmten Werth erhält) die neue Variabele k mittelst der Substitution

Kreise, dessen Radius $OC = \frac{a-b}{2}$; ferner bilden die Radien MO, OC mit MX nach entgegengesetzter Seite gleiche Winkel. Also:

> Wenn eine Gerade MO von unveränderlicher Länge um einen ihrer Endpunkte (M) sich dreht, während eine andere constante Gerade OC um den andern Endpunkt O sich in entgegengesetztem Sinne, aber mit gleicher Winkelgeschwindigkeit dreht, so beschreibt der freie Endpunkt C dieser Geraden eine Ellipse, deren beide Halbachsen $MO + OC$ und $MO - OC$ sind. Die Normale der Ellipse erhält man, wenn man den ersten Radius MO um ein gleiches Stück ON über O hinaus verlängert und N mit C verbindet.

Betrachten wir das Parallelogramm, $MOCO'$, so giebt dieses:

> Wenn eine Ecke eines Parallelogrammes festgehalten wird, und die beiden, in dieser Ecke zusammenstossenden Seiten in entgegengesetztem Sinne, mit gleicher Winkelgeschwindigkeit rotiren, so beschreibt die gegenüberliegende Ecke eine Ellipse, deren Achsen in den unveränderlichen Halbirungslinien des innern und äussern Winkels an der festen Ecke liegen, deren grosse Halbachse der Summe, deren kleine Halbachse der Differenz zweier zusammenstossender Seiten im Parallelogramme gleich ist.

3) Betrachten wir das gleichschenkelige Dreieck MOX (oder MOX'):

> Wenn ein gleichschenkliches Dreieck, dessen gleiche Seiten unveränderlich sind, so seine Gestalt verändert, dass ein Endpunkt seiner Grundlinie fest bleibt, während der andere die Gerade durchläuft, in welcher die Grundlinie liegt, so beschreibt irgend ein Punkt der der festen Ecke gegenüberliegenden Seite eine Ellipse.

4) Mit MO beschreibe um M einen Kreis, und lasse eine Gerade MX gleich dem Radius MO sich so bewegen, dass der eine Endpunkt den Kreis, der andere eine durch den Mittelpunkt des Kreises gehende Gerade durchläuft, so beschreibt jeder Punkt dieser Geraden eine Ellipse.

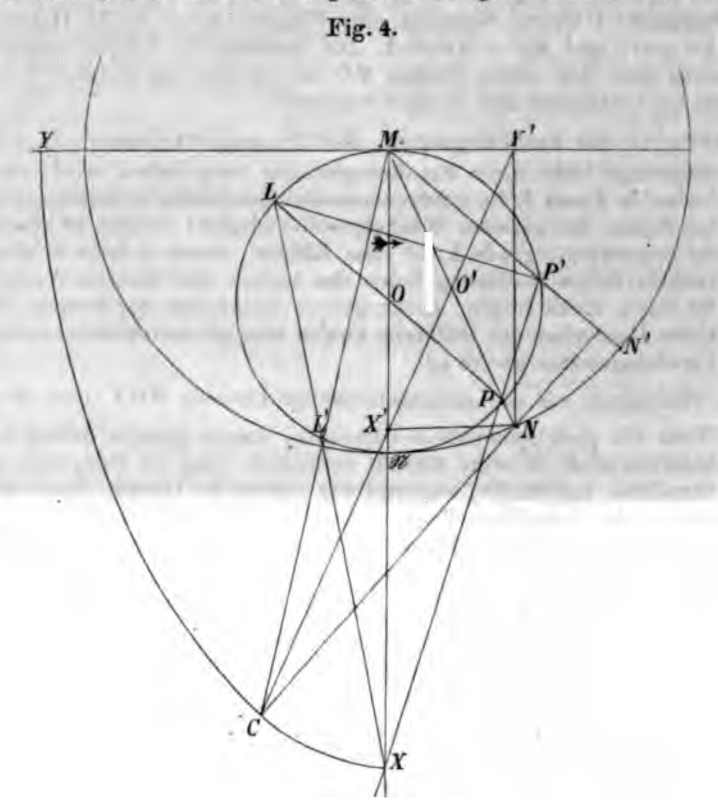
5) Fig. 4. Wenn ein Kreis O in einem andern (M) von doppeltem Umfange rollt, so beschreibt bekanntlich jeder Punkt des Umfanges jenes Kreises eine Gerade und zwar einen Durchmesser des Grundkreises (M). Die Endpunkte eines Durchmessers des Kreises (O) gleiten mithin bei der Bewegung dieses Kreises auf den Schenkeln eines rechten Winkels. Demnach beschreibt jeder Punkt eines solchen Durchmessers eine Ellipse. Wenn man die Ebene als ein festes mit dem rollenden Kreise (O) unveränderlich verbundenes System betrachtet, so beschreibt jeder Punkt derselben eine Ellipse, deren Halbachsen die grösste und kleinste Linie sind, welche von diesem Punkt nach dem Umfang des rollenden Kreises sich ziehen lassen. Das Stück der Normale zwischen dem beschreibenden Punkt C und dem augenblicklichen Drehpunkt N des Systems ist der Hälfte des zu CM gehörigen conjugirten Durchmessers gleich.

Denken wir uns durch den beschreibenden Punkt eine beliebige Sekante für den Kreis (O), so bleiben die Endpunkte der in ihr liegenden Sehne auf zwei Geraden, und man überzeugt sich, dass, wenn eine Gerade von constanter Länge L mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines Winkels von beliebiger Grösse φ gleitet, jeder Punkt derselben eine El-

lipse beschreibt, für welche der Ausdruck $\frac{L}{\sin\varphi}$ entweder die Halbachsen-Summe oder deren Differenz angiebt, je nachdem der beschreibende Punkt auf der constanten Strecke selbst, oder auf deren Verlängerung liegt. Es ist leicht zu erkennen, wie die Achsen der Ellipse construirt werden.

6) In Fig. 4. sei (O) die Lage des rollenden Kreises, bei welcher der beschreibende Punkt mit dem Endpunkt X der grossen Achse der von ihm

Fig. 4.



beschriebenen Ellipse zusammenfällt. Der Kreis (O) möge in der Richtung des Pfeils rollen. Zieht man die Gerade MPN, so wird einmal der Punkt P mit dem Punkte N zusammenfallen, und um die Lage C zu bekommen, welche dann der beschreibende Punkt einnimmt, verfahre man so: der Durchmesser PL fällt mit NM zusammen und weil $\angle NML' = \angle PLL'$, so nimmt die Seite LX des Dreiecks PLX die Lage ML' an; mithin hat man immer ML' zu verlängern und darauf $MC = XL$ abzuschneiden. Nach dem, was oben bewiesen worden, ist CN im Punkte C normal auf der Ellipse und zugleich halb so lang, wie der zu CM gehörige conjugirte Durchmesser. Die Lage dieses Durchmessers lässt sich finden, wie folgt:

Ich verlängere XP, bis diese Linie den Kreis wieder in P' trifft, u ziehe $MP'N'$. Bei der Bewegung des Kreises (O) wird das Dreie XLP auf das ihm congruente CMN gelegt. Da aber $\angle PLP' = \angle PM$

die Supposition $k=0$; man hat dann vermöge der ursprünglichen Bedeutung von V

$$\psi(h)=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots f(h+x+y+\ldots+t)\,x^{\frac{1}{n}-1}y^{\frac{2}{n}-1}\ldots t^{\frac{n-1}{n}-1}\,dx\,dy\ldots dt$$

d. i. nach einer bekannten Formel*)

*) Im 2ten Hefte S. 75 findet sich die Formel

$$\int\int\xi^{m-1}\eta^{n-1}\ldots\varphi(\xi+\eta+\ldots)\,d\xi\,d\eta\ldots.$$
$$=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(m+n+\ldots)}\int_0^1\varrho^{m+n+\ldots-1}\varphi(\varrho)\,d\varrho$$

bei welcher vorausgesetzt ist, dass die Integrationen linker Hand auf alle positiven, der Ungleichung

$$1>\xi+\eta+\ldots>0$$

genügenden $\xi,\eta\ldots$ bezogen werden. Setzt man $\xi=\frac{x}{a}$, $\eta=\frac{y}{a}$ etc., $\varphi(\varrho)=F(a\varrho)$, so wird

$$\frac{1}{a^{m+n+\ldots}}\int\int x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(x+y+\ldots)\,dx\,dy\ldots.$$
$$=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(m+n+\ldots)}\int_0^1\varrho^{m+n+\ldots-1}F(a\varrho)\,d\varrho$$

mit der Bedingung

$$a>x+y+\ldots>0;$$

mittelst der Substitutionen $\varrho=\frac{\tau}{a}$, $F(\tau)=f(k+\tau)$ folgt weiter unter derselben Bedingung

$$\int\int\ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots f(k+x+y+\ldots)\,dx\,dy\ldots.$$
$$=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(m+n+\ldots)}\int_0^a\tau^{m+n+\ldots-1}f(k+\tau)\,d\tau.$$

Nimmt man endlich $a=\infty$ und schreibt $\frac{1}{n},\frac{2}{n}\ldots$ für $m,n\ldots$, so gelangt man zu der Formel

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots x^{\frac{1}{n}-1}y^{\frac{2}{n}-1}\ldots t^{\frac{n-1}{n}-1}f(k+x+y+\ldots+t)\,dx\,dy\ldots dt$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty\tau^{\frac{n-1}{2}-1}f(k+\tau)\,d\tau$$
$$=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty\tau^{\frac{n-1}{2}-1}f(k+\tau)\,d\tau,$$

welche im Texte angewendet wurde.

le von d Endpunkten des Durchmessers der grossen und kleinen ıse der I ɔse gleich sind, so ist:

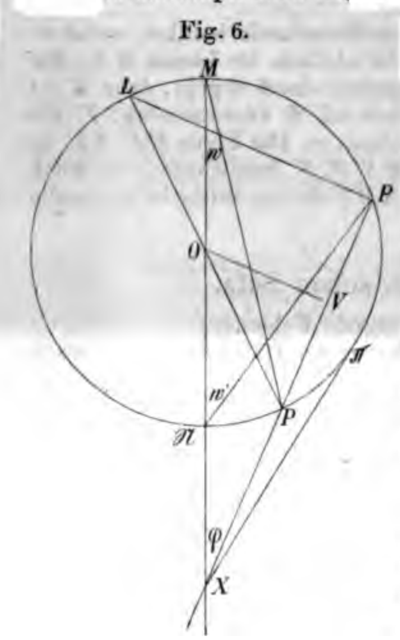
der Abstand des Punktes X von irgend einem Punkte P des Kreises B eines bestimmten Durchmessers der Ellipse gleich.

t XMP ist die excentrische Anomalie für die Endpunkte messers der Ellipse.

bstan des Punktes X vom andern Endpunkt L des zu P gehö- I nessers des Kreises ist der Hälfte des zu jenem Durch- er llipse conjugirten Durchmessers gleich.

n wı Sekante XPP' des Kreises (O) und construiren nach 6) n Punkte C, C' der Ellipse, für welche die Hälften der zugehöri- ugirten Durchmesser beziehlich XP und XP' sind, dann wird die ız der elliptischen Bögen YC' und XC sich construiren lassen.

Fig. 6.



Nennt man p den veränder- ınd des Punktes X von de Bogens $\mathfrak{N}P$, ω die excen- nalie des Punktes C, so läss infache Betrachtung der Be- Punktes X, während de n Kreise (M) rollt, zeigen,

dass das Integral $\int_0^\omega p \, . \, d\omega$ den ellipti sche n XC ausdrückt. (Wen der Krei O) auf seiner Tangente im Punkte $\mathfrak{N}$ fortrollte, so würde der Punkt X ein Stück einer Cykloide beschrei ben, welches zum Maass $2 \, . \int_0^\omega p \, . \, d\omega$ hat).

Bezeichnet man durch p' den ver- änderlichen Abstand des Punktes X von den Punkten des Bogens MP', durch ω' den Winkel $M\mathfrak{N}P'$ oder das Complement der excentrischen Anoma- lie des Punktes C, so erhält man ebenso:

$$YC = \int_0^{\omega'} p' \, . \, d\omega'.$$

Man kann auch leicht diese Integrale mit den auf gewöhnlichem Wege er- haltenen identificiren, indem man p' durch a, b, ω' ausdrückt. Die Diffe- renz der beiden Integrale ergiebt sich nun sogleich, wenn man erwägt, dass $p : p' = d\omega : d\omega'$ und somit:

$$p' d\omega' - p \, d\omega = (p + p') \, (d\omega - d\omega).$$

Führen wir nun den Winkel $MXP = \varphi = \omega' - \omega$ ein, so hat man

$$d\omega' - d\omega = d\varphi, \quad p + p' = (a + b) \cos \varphi,$$

folglich

setzung hinzubringt, dass die Funktionen f und φ ausserhalb gewisser Intervalle verschwinden. Wir wollen diese Andeutung noch etwas ausführen.

Wenn erstens $f(w)$ für alle ausserhalb des Intervalles $w = 0$ bis $w = h$ liegende w verschwindet, so bleiben in dem vielfachen Integrale nur diejenigen Elemente übrig, für welche $h > x + y + \ldots + u > 0$; in dem Doppelintegrale rechter Hand sind dann gleichfalls nur die der Bedingung $h > n\xi + \eta > 0$ genügenden Elemente zu behalten und es werden daher die Integrationsgrenzen $\eta = 0$ bis $\eta = h - n\xi$ für η sowie $\xi = 0$ bis $\xi = \frac{1}{n}h$ für ξ. Dies giebt den Satz: wenn sich die nach $x, y, z \ldots u$ zu verrichtenden n Integrationen auf alle positiven der Ungleichung

$$7)\qquad h > x + y + z + \ldots + u > 0$$

genügenden Werthe der Variabelen beziehen, so ist

$$8)\qquad \iint \ldots f(x+y+\ldots+u)\,\varphi(xy\ldots u)\,x^{\frac{0}{n}}y^{\frac{1}{n}}\ldots u^{\frac{n-1}{n}}\,dx\,dy\ldots du$$

$$= \frac{\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^{\frac{1}{n}h}\int\limits_0^{h-n\xi} f(n\xi+\eta)\,\varphi(\xi^n)\,\xi^{n-1}\,\eta^{\frac{n-1}{2}-1}\,d\xi\,d\eta.$$

Wir betrachten zweitens den Fall, dass die Funktion $\varphi(w)$ für alle w ausserhalb des Intervalles $w = 0$ bis $w = k^n$ verschwindet; es sind dann rechter Hand alle Elemente auszuscheiden, für welche $\xi^n > k^n$ d. h. $\xi > k$. Die übrige bleibende Gleichung enthält den Satz: wenn sich die Integrationen auf alle positiven der Ungleichung

$$9)\qquad k^n > xyz\ldots u > 0$$

genügenden $x, y, z \ldots u$ beziehen, so ist

$$10)\qquad \iint \ldots f(x+y+\ldots+u)\,\varphi(xy\ldots u)\,x^{\frac{0}{n}}y^{\frac{1}{n}}\ldots u^{\frac{n-1}{n}}\,dx\,dy\ldots du$$

$$= \frac{\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^{k}\int\limits_0^{\infty} f(n\xi+\eta)\,\varphi(\xi^n)\,\xi^{n-1}\,\eta^{\frac{n-1}{2}-1}\,d\xi\,d\eta.$$

Am eigenthümlichsten wird die Sache im dritten Falle, wenn man nämlich voraussetzt, dass die vorhin betrachteten einzelnen Bedingungen des Verschwindens von $f(w)$ und $\varphi(w)$ zusammen bestehen ohne einander zu widersprechen. Die Integrationen linker Hand beziehen sich dann auf alle positiven $x, y, z \ldots u$, welche den Ungleichungen

$$11)\qquad h > x + y + z + \ldots + u > 0, \quad k^n > xyz\ldots u > 0$$

gleichzeitig genügen, und rechter Hand sind die Integrationen nach ξ und η auf alle ξ und η zu erstrecken, für die gleichzeitig $h > n\xi + \eta > 0$ und $k > \xi > 0$; dies giebt die Integrationsgrenzen $\xi = 0$ bis $\xi = k$, $\eta = 0$ bis $\eta = h - n\xi$, was voraussetzt, dass der kleinste Werth von η, nämlich $h - nk$, noch positiv folglich $k < \frac{1}{n}h$ sei. Unter den in Nr. 11) verzeichneten Bedingungen ist nun

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \sin\varphi^2}} = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{d\omega'}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\omega'^2}}.$$

Setzen wir $\frac{a+b}{a-b}=k$,

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = \frac{2}{1+k} \cdot \frac{d\omega'}{\sqrt{1-\frac{4k}{(1+k)^2}\sin\omega'^2}}$$

Hier ist

$$k^2 > 1, \quad \frac{4k}{(1+k)^2} < k^2, \quad \varphi < \omega'.$$

Nimmt man den P[illegible] eines Kreises an, dessen Durchmesser $a+b$ ist, so lass[illegible] [illegible]oge Betrachtungen anstellen, und man erhält bei übereinstim[illegible] [illegible]nung: $\varphi = \omega + \omega'$,

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \sin\varphi^2}} = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{d\omega'}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\omega'^2}};$$

$\frac{a-b}{a+b}=k$ gesetzt, giebt:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = \frac{2}{1+k} \frac{d\omega'}{\sqrt{1-\frac{4k}{(1+k)^2}\sin\omega'^2}}$$

Hier ist

$$k^2 < 1, \quad \frac{4k}{(1+k)^2} > k^2, \quad \varphi > \omega'.$$

(Vergl. Jacobi, *lettre à M. Hermite.*)

Trier, den 1. September 1856.

(In Fig. 6 ist ω und ω' statt w und w' zu lesen.)

---

und hier beziehen sich die Integrationen auf alle positiven ξ und η, welche den Bedingungen

$$h > 2\xi + \eta > 0, \quad k^2 > \xi^2 > 0$$

gleichzeitig genügen; daraus ergeben sich die Grenzen $\xi = 0$ und $\xi = k$, sowie $\eta = 0$ und $\eta = h - 2\xi$, endlich ist

$$V = 2\int_0^k\int_0^{h-2\xi} f(2\xi + \eta)\,\varphi(\xi^2)\frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\,d\xi\,d\eta$$

und dieses Resultat stimmt mit der Formel 12) für $n = 2$ überein. In der letzten Form bedeutet V das Doppelte eines anderen Volumens mit trapezförmiger Basis; dieses Trapez wird von den Coordinatenachsen der ξ und η, von einer in der Entfernung k parallel zur η-Achse gehenden Geraden und endlich von einer Geraden gebildet, die auf der ξ-Achse die Strecke $\frac{1}{2}h$ und auf der η-Achse die Strecke h abschneidet.

XX.

Ueber einige Arten der mechanischen Beschreibung der Ellipse und über den Satz von Fagnano.

Von C. KÜPPER in Trier.

Ich knüpfe meine Betrachtungen an folgenden Satz an:

Wenn eine gerade Linie von unveränderlicher Länge mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleitet, so beschreibt irgend ein Punkt derselben eine Ellipse, deren Halbachsen die Segmente sind, in welche dieser Punkt die bewegliche Linie theilt.

Fig. 2. XY sei die bewegliche Gerade, MX, MY die Schenkel des rechten Winkels, C der beschreibende Punkt. Stellen wir uns vor, das Rechteck $MXNY$ sei mit XY beweglich, so beschreibt die Ecke N einen Kreis um den Punkt M, dessen Radius XY ist. Ziehen wir nun CA normal auf MX, CB normal auf MY, so erhalten wir auf der Diagonale MN zwei Punkte, A, B, deren Oerter zwei Kreise sind, welche M zum Mittelpunkt und zu Radien beziehlich $MA = CY = a$, und $MB = CX = b$ haben.

Fig. 2.

Dass nun der Ort von C eine Ellipse ist, welche a, b zu Halbachsen hat, ergiebt sich daraus, dass $AA' : CA = a : b = Const.$, und somit die Curve, welche C beschreibt, als rechtwinklige Projektion des Kreises erscheint, auf welchem

Mittelst einer ähnlichen Betrachtungsweise lässt sich entscheiden, unter welchen Umständen die Gleichungen

$$\left(1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}\right)^2+1=p^m$$

und

$$1.2.3\ldots(s-1).1.2.3\ldots(p-s)=p^m\pm 1$$

auflösbar sind oder nicht.

(Liouville im *Journal des Mathématiques*. Septbr. 1856).

XLIX. Ueber das Additionstheorem für elliptische Integrale erster Gattung. Das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

kann man in algebraischer Form auf folgendem Wege erhalten, der nur die theilweise Integration verlangt. Man hat zunächst

$$dx\sqrt{1-y^2}+dy\sqrt{1-x^2}=0$$

folglich

$$\int dx\sqrt{1-y^2}+\int dy\sqrt{1-x^2}=Const.$$

Bei theilweiser Integration ist aber

$$\int dx\sqrt{1-y^2}=x\sqrt{1-y^2}+\int\frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\int dx\sqrt{1-x^2}=y\sqrt{1-x^2}+\int\frac{yx\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

mithin durch Addition

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}+\int xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)=Const.$$

Hier verschwindet der vorausgesetzten Differentialgleichung zufolge der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck und es bleibt daher

$$1)\qquad x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=Const.$$

als gesuchte Integralgleichung übrig.

Nehmen wir

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\alpha \text{ folglich } x=\sin\alpha,\ \sqrt{1-x^2}=\cos\alpha,$$

$$\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\beta \text{ folglich } y=\sin\beta,\ \sqrt{1-y^2}=\cos\beta,$$

so verwandelt sich die ursprüngliche Differentialgleichung in

$$d\alpha+d\beta=0,$$

Kreise, dessen Radius $OC = \frac{a - b}{2}$; ferner bilden die Radien MO, OC mit MX nach entgegengesetzter Seite gleiche Winkel. Also:

> Wenn eine Gerade MO von unveränderlicher Länge um einen ihrer Endpunkte (M) sich dreht, während eine andere constante Gerade OC um den andern Endpunkt O sich in entgegengesetztem Sinne, aber mit gleicher Winkelgeschwindigkeit dreht, so beschreibt der freie Endpunkt C dieser Geraden eine Ellipse, deren beide Halbachsen $MO + OC$ und $MO - OC$ sind. Die Normale der Ellipse erhält man, wenn man den ersten Radius MO um ein gleiches Stück ON über O hinaus verlängert und N mit C verbindet.

Betrachten wir das Parallelogramm, $MOCO'$, so giebt dieses:

> Wenn eine Ecke eines Parallelogrammes festgehalten wird, und die beiden, in dieser Ecke zusammenstossenden Seiten in entgegengesetztem Sinne, mit gleicher Winkelgeschwindigkeit rotiren, so beschreibt die gegenüberliegende Ecke eine Ellipse, deren Achsen in den unveränderlichen Halbirungslinien des innern und äussern Winkels an der festen Ecke liegen, deren grosse Halbachse der Summe, deren kleine Halbachse der Differenz zweier zusammenstossender Seiten im Parallelogramme gleich ist.

3) Betrachten wir das gleichschenkelige Dreieck MOX (oder MOX'):

> Wenn ein gleichschenkliches Dreieck, dessen gleiche Seiten unveränderlich sind, so seine Gestalt verändert, dass ein Endpunkt seiner Grundlinie fest bleibt, während der andere die Gerade durchläuft, in welcher die Grundlinie liegt, so beschreibt irgend ein Punkt der der festen Ecke gegenüberliegenden Seite eine Ellipse.

4) Mit MO beschreibe um M einen Kreis, und lasse eine Gerade MX gleich dem Radius MO sich so bewegen, dass der eine Endpunkt den Kreis, der andere eine durch den Mittelpunkt des Kreises gehende Gerade durchläuft, so beschreibt jeder Punkt dieser Geraden eine Ellipse.

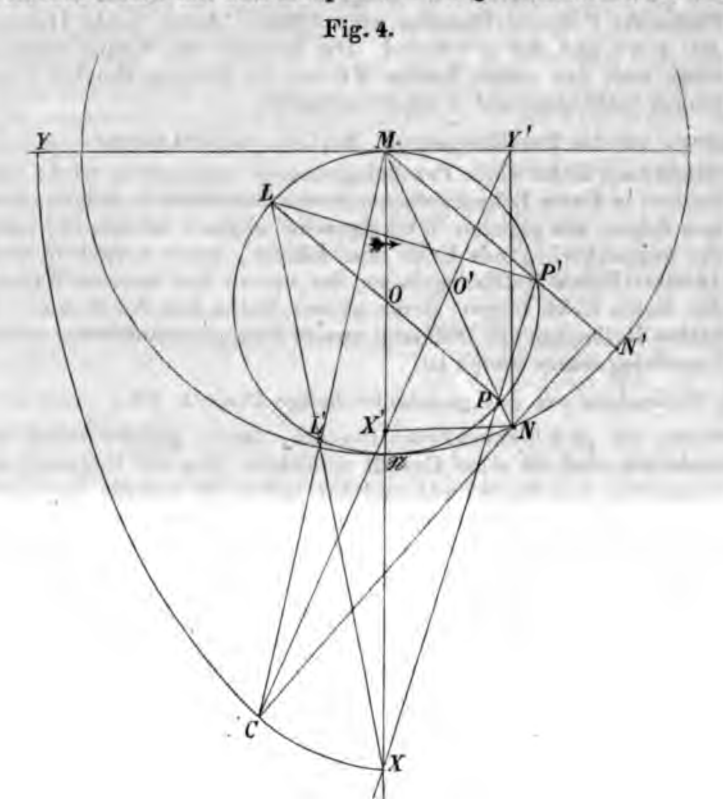
5) Fig. 4. Wenn ein Kreis O in einem andern (M) von doppeltem Umfange rollt, so beschreibt bekanntlich jeder Punkt des Umfanges jenes Kreises eine Gerade und zwar einen Durchmesser des Grundkreises (M). Die Endpunkte eines Durchmessers des Kreises (O) gleiten mithin bei der Bewegung dieses Kreises auf den Schenkeln eines rechten Winkels. Demnach beschreibt jeder Punkt eines solchen Durchmessers eine Ellipse. Wenn man die Ebene als ein festes mit dem rollenden Kreise (O) unveränderlich verbundenes System betrachtet, so beschreibt jeder Punkt derselben eine Ellipse, deren Halbachsen die grösste und kleinste Linie sind, welche von diesem Punkt nach dem Umfang des rollenden Kreises sich ziehen lassen. Das Stück der Normale zwischen dem beschreibenden Punkt C und dem augenblicklichen Drehpunkt N des Systems ist der Hälfte des zu CM gehörigen conjugirten Durchmessers gleich.

Denken wir uns durch den beschreibenden Punkt eine beliebige Sekante für den Kreis (O), so bleiben die Endpunkte der in ihr liegenden Sehne auf zwei Geraden, und man überzeugt sich, dass, wenn eine Gerade von constanter Länge L mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines Winkels von beliebiger Grösse φ gleitet, jeder Punkt derselben eine El-

lipse beschreibt, für welche der Ausdruck $\frac{L}{\sin\varphi}$ entweder die Halbachsen-Summe oder deren Differenz angiebt, je nachdem der beschreibende Punkt auf der constanten Strecke selbst, oder auf deren Verlängerung liegt. Es ist leicht zu erkennen, wie die Achsen der Ellipse construirt werden.

6) In Fig. 4. sei (O) die Lage des rollenden Kreises, bei welcher der beschreibende Punkt mit dem Endpunkt X der grossen Achse der von ihm

Fig. 4.



beschriebenen Ellipse zusammenfällt. Der Kreis (O) möge in der Richtung des Pfeils rollen. Zieht man die Gerade MPN, so wird einmal der Punkt P mit dem Punkte N zusammenfallen, und um die Lage C zu bekommen, welche dann der beschreibende Punkt einnimmt, verfahre man so: der Durchmesser PL fällt mit NM zusammen und weil $\angle NML' = \angle PLL'$, so nimmt die Seite LX des Dreiecks PLX die Lage ML' an; mithin hat man immer ML' zu verlängern und darauf $MC = XL$ abzuschneiden. Nach dem, was oben bewiesen worden, ist CN im Punkte C normal auf der Ellipse und zugleich halb so lang, wie der zu CM gehörige conjugirte Durchmesser. Die Lage dieses Durchmessers lässt sich finden, wie folgt:

> Ich verlängere XP, bis diese Linie den Kreis wieder in P' trifft, und ziehe $MP'N'$. Bei der Bewegung des Kreises (O) wird das Dreieck XLP auf das ihm congruente CMN gelegt. Da aber $\angle PLP' = \angle PMN'$,

so wird auch die Kathete LP' des rechtwinkligen Dreiecks XLP' auf die Linie MN' fallen. Folglich ist CN normal auf MN', oder MN' fällt in die Richtung des zu C gehörigen conjugirten Durchmessers der Ellipse.

Wenn man also in einem Kreise (O) beliebige Durchmesser zieht (wie LP), und deren Endpunkte mit einem willkürlichen Punkte X verbindet, so sind diese Verbindungslinien jedesmal die Hälften von zwei conjugirten Durchmessern einer Ellipse, deren Halbachsen die kürzeste und längste Linie sind, welche von X aus sich an jenen Kreis ziehen lassen. Wenn L', P' die beiden Punkte sind, in welchen die Geraden XL, XP den Kreis zum zweiten Male treffen, so hat man nur ML', MP' zu ziehen, und auf diesen Geraden auf beiden Seiten von M die Stücke XL, XP abzutragen, um vier Punkte der Ellipse zu erhalten, nämlich die vier Endpunkte eines Paars conjugirter Durchmesser.

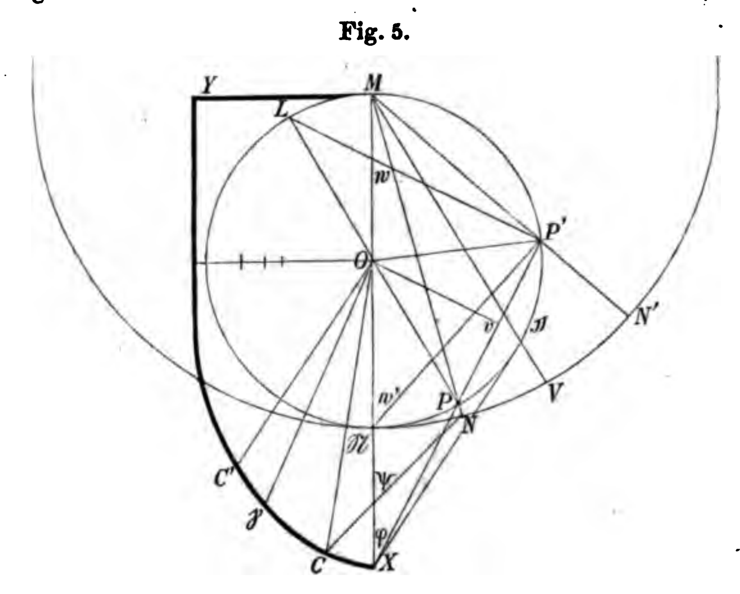
Wenn der Kreis (O) im Punkte N den Grundkreis berührt, so ist O' die Lage seines Mittelpunktes, er schneidet alsdann die Linien MX, MY in zwei Punkten, X', Y', deren Verbindungslinie durch C geht, denn X' ist die Lage des Punktes, welcher ursprünglich mit $\mathfrak{N}$ zusammenlag, Y' die Lage des Punktes, der früher in M sich befand. — Die Figur $MX'NY'$ ist ein Rechteck und zwar das in Fig. 3. mit $MX'N'Y'$ bezeichnete; ein Blick auf diese Figur lehrt, dass $\angle X'MO' = \angle XMN$ die excentrische Anomalie des Punktes C ist.

Ueber den Fagnano'schen Satz.

Die in Nr. 6. geführte Untersuchung ergiebt Folgendes:

Fig. 5 u. 6. Wenn man über der Differenz der Halbachsen a, b einer

Fig. 5.



Ellipse als Durchmesser einen Kreis (O) beschreibt, und auf der Verlängerung eines Durchmessers dieses Kreises den Punkt X so wählt, dass seine

12. Auf dem Quadranten einer Ellipse giebt es einen Punkt, dessen Normalabstand ein Maximum ist, und der folgende Eigenschaften hat: der Inhalt seines Krümmungskreises ist gleich dem der Ellipse. Sein Normalabstand ist gleich $a - b$. Die Verlängerungen der Axen treffen seine Tangente in zwei Punkten, deren Entfernungen vom Berührungspunkt gleich a und gleich b sind. Die Entfernungen dieser Durchschnittspunkte vom Fusspunkte des vom Mittelpunkt auf die Tangente gefällten Perpendikels sind ebenfalls gleich a und gleich b. Zieht man durch den Krümmungsmittelpunkt Parallelen mit den Axen, so treffen diese die Tangente in zwei Punkten, deren Entfernungen vom Berührungspunkt auch gleich a und gleich b sind.

Sulz a./N. A. Böklen, Reallehrer.

LI. [illegible] **Ellipsoides und deren Schwer-** [illegible]t. [illegible] [illegible]nafunktionen und die daraus fol-[illegible]gen Formeln [illegible] Reduction gew[illegible] [illegible]ielfacher Integrale nicht als be-[illegible]t vorausgesetz[illegible] [illegible] [illegible]glichst wenig Hülfsmitteln auskommen [illegible] Bestimmung der Oberfläche des dreiach[illegible] [illegible]erpunktes der analytisch kürzeste sein.

Die Halbachs[illegible] [illegible]n a, b, c heissen, wobei wir $a > b > c$ voraussetzen, fern[illegible]

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - [illegible]}}{a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b},$$

so ist bekanntlich die Oberfläche eines Octanten des Ellipsoides

$$S = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} dx\, dy \sqrt{\left\{\frac{1 - \frac{\alpha^2 x^2}{a^2} - \frac{\beta^2 y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right\}}$$

oder für $x = a\xi$, $y = b\eta$

$$S = ab \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi\, d\eta \sqrt{\left\{\frac{1 - \alpha^2\xi^2 - \beta^2\eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}\right\}}.$$

Durch Einführung von Polarcoordinaten mittelst der Substitutionen $\xi = \varrho \cos\vartheta$, $\eta = \varrho \sin\vartheta$, $d\xi\, d\eta = \varrho\, d\varrho\, d\vartheta$ wird hieraus

$$S = ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho\, d\varrho \sqrt{\left\{\frac{1 - \Theta^2\varrho^2}{1 - \varrho^2}\right\}}$$

wobei zur Abkürzung

$$\Theta = \sqrt{\alpha^2 \cos^2\vartheta + \beta^2 \sin^2\vartheta}$$

gesetzt worden ist. Führt man statt ϱ eine neue Variabele u ein indem m[illegible]

$$\frac{1 - \varrho^2}{1 - \Theta^2\varrho^2} = u^2,$$

$$p' d\omega' - p d\omega = (a+b) \cos\varphi \, d\varphi,$$

und durch Integration:

$$YC' - XC = (a+b) \sin\varphi = LP' = \Delta.$$

Die Punkte C, C' haben, wie aus 6. erhellt, folgende Eigenschaften:

1. Das Rechteck aus den Hälften der zu ihnen gehörigen conjugirten Durchmesser $= a \, . \, b$.
2. Die Abstände der in diesen Punkten auf der Ellipse errichteten Normalen vom Mittelpunkt der Ellipse sind $= \Delta$.
3. Der Winkel ψ, den die Normale CN mit der Achse MX bildet, ist das Complement der excentrischen Anomalie, und umgekehrt, das Complement der excentrischen Anomalie des Punktes C ist dem Winkel gleich, den die Normale im Punkte C' mit der grossen Achse bildet.

Wenn $X\pi$ Tangente des Kreises (0) ist, und r der Punkt, mit welchem beim Rollen des Kreises der Punkt π zusammenfällt, γ die entsprechende Lage des die Ellipse beschreibenden Punktes, so hat man:

$$Y\gamma - X\gamma = a - b.$$

Für diesen Fall ist der Abstand der Normalen vom Mittelpunkt der Ellipse ein Maximum. (Bei der gestreckten und verkürzten gemeinen Cycloide spielen die besonderen Punkte dieselbe Rolle, wie bei der Ellipse der Punkt γ).

Beschreibt man also um den Mittelpunkt einer Ellipse Kreise mit Radien, welche kleiner sind, als die Differenz der Halbachsen, so giebt es auf jedem zwischen den Achsen liegenden Quadranten eines solchen Kreises zwei Tangenten, welche Normalen der Ellipse sind. Die Punkte, in welchen sie auf der Tangente normal stehen, haben die von Fagnano entdeckte Eigenschaft, dass die Differenz der beiden, von den Endpunkten der Achsen und diesen Punkten begrenzten elliptischen Bögen sich construiren lässt, dieselbe ist dem Radius des gedachten Kreises gleich.

Schliesslich werde hervorgehoben, dass die beiden Gleichungen:

$$1) \qquad \varphi = \omega' - \omega,$$

$$2) \qquad \frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{p'}{p}$$

die Landen'sche Substitution enthalten. Denn es ist

$$3) \qquad \frac{d\omega'}{p'} = \frac{d\omega' - d\omega}{p' - p} = \frac{d\varphi}{p' - p}.$$

Das Dreieck XMP' liefert:

$$p' = a \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin\omega'^2}.$$

Um $p' - p$ zu erhalten, ziehe man OV senkrecht auf PP' und man bekommt aus dem Dreieck OPV:

$$p' - p = (a - b) \sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \sin\varphi^2}.$$

Also wird aus 3)

herigen $\xi = \varrho \cos \vartheta$, $\eta = \varrho \sin \vartheta$ erhalten wir statt dieser Formeln die folgenden

$$= a^2 b \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \, d\varrho \sqrt{\left\{\frac{1-\Theta^2\varrho^2}{1-\varrho^2}\right\}},$$

$$Sb = a b^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \, d\varrho \sqrt{\left\{\frac{1-\Theta^2\varrho^2}{1-\varrho^2}\right\}},$$

$$Sc = abc \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho \, d\varrho \sqrt{1-\Theta^2\varrho^2}.$$

Führen wir in die erste Gleichung statt ϱ die Variabele u durch die nämliche Substitution wie früher ein, so ergiebt sich

$$Sa = a^2 b \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta \int_0^1 \frac{(1-\Theta^2)\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{(1-\Theta^2 u^2)^5}} \, du$$

d. i. bei umgekehrter Anordnung der Integrationen und vermöge der Bedeutung von Θ

$$Sa = a^2 b \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \, du \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1-\alpha^2)\cos^2\vartheta + (1-\beta^2)\sin^2\vartheta}{\sqrt{[(1-\alpha^2u^2)\cos^2\vartheta + (1-\beta^2)\sin^2\vartheta]^5}} \cos\vartheta \, d\vartheta.$$

Nach bekannten Formeln ist aber

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^3\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{(m\cos^2\vartheta + n\sin^2\vartheta)^5}} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{m^2\sqrt{n}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{(m\cos^2\vartheta + n\sin^2\vartheta)^5}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{mn\sqrt{n}},$$

mithin erhalten wir

$$Sa = \tfrac{1}{3} a^2 b \int_0^1 \left\{2\,\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}\right\} \frac{du}{1-\alpha^2u^2} \sqrt{\left\{\frac{1-u^2}{1-\beta^2u^2}\right\}}.$$

Durch gehörige Buchstabenvertauschung lässt sich hieraus der Werth Sb ableiten, nämlich

$$Sb = \tfrac{1}{3} a b^2 \int_0^1 \left\{\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + 2\,\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}\right\} \frac{du}{1-\beta^2u^2} \sqrt{\left\{\frac{1-u^2}{1-\alpha^2u^2}\right\}}.$$

Endlich kann man in dem für Sc angegebenen Doppelintegrale die ϱ bezügliche Integration sofort ausführen; sie giebt

Kleinere Mittheilungen.

XLVIII. Ueber einen Satz der Zahlentheorie. Vermöge des Wilson-schen Theoremes kann der Ausdruck

$$1.2.3\ldots(p-1)+1$$

nur dann ein Vielfaches der ganzen Zahl p werden, wenn p eine Primzahl ist. Daraus folgt, dass auch die Gleichung

$$1.2.3\ldots(p-1)+1=p^m$$

bei ganzen positiven p und m nur dann bestehen kann, wenn p eine Primzahl ist; so hat man z. B. in den Fällen $p=2$, $p=3$, $p=5$

$$1+1=2^1,\quad 1.2+1=3^1,\quad 1.2.3.4+1=5^2.$$

Es entsteht nun die Frage, ob die genannte Gleichung von grösseren Primzahlen erfüllt werden kann.

Zieht man von beiden Seiten der Gleichung die Einheit ab und dividirt nachher mit $p-1$, so hat man

$$1.2.3\ldots(p-2)=p^{m-1}+p^{m-2}+\ldots+p+1.$$

Das Produkt linker Hand enthält, sobald p die Zahl 5 übersteigt, die beiden verschiedenen Faktoren 2 und $\frac{1}{2}(p-1)$, und ist folglich durch $2.\frac{1}{2}(p-1)=p-1$ theilbar; dasselbe muss von der rechten Seite der vorigen Gleichung gelten, wenn dieselbe überhaupt bestehen soll. Giebt man der rechts vorkommenden Summe die Form

$$(p^{m-1}-1)+(p^{m-2}-1)+\ldots+(p-1)+m,$$

so liefert die Division mit $p-1$ den Rest m und es muss daher m theilbar durch $p-1$ also m ein Vielfaches von $p-1$ sein. Aus $m\geqq p-1$ folgt weiter, wenn man auf die ursprüngliche Gleichung zurückgeht,

$$1.2.3\ldots(p-1)\geqq p^{p-1}-1;$$

nun ist aber andererseits, weil jede der Zahlen $1, 2, \ldots (p-2)$ weniger als $p-1$ beträgt,

$$1.2.3\ldots(p-1)<(p-1)^{p-1}<p^{p-1}-1;$$

diese immer stattfindende Ungleichung widerspricht der vorigen und muss daher die frühere Voraussetzung unrichtig sein. Die Gleichung

$$1.2.3\ldots(p-1)+1=p^m$$

ist mithin für $p>5$ unmöglich.

Man erkennt nachträglich leicht die Bedeutung der Ausnahmefälle $p=2$, $p=3$ und $p=5$. Für $p=2$ und $p=3$ fehlt in dem Produkte $1.2\ldots(p-2)$ der Faktor 2; für $p=5$ sind die Faktoren 2 und $\frac{1}{2}(p-1)$ nicht verschieden, und man darf daher auch nicht behaupten, dass $1.2\ldots(p-2)$ durch $2.\frac{1}{2}(p-1)$ theilbar sei.

Mittelst einer ähnlichen Betrachtungsweise lässt sich entscheiden, unter welchen Umständen die Gleichungen

$$\left(1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}\right)^2+1=p^m$$

und

$$1.2.3\ldots(s-1).1.2.3\ldots(p-s)=p^m\pm1$$

auflösbar sind oder nicht.

(Liouville im *Journal des Mathématiques*. Septbr. 1856).

XLIX. Ueber das Additionstheorem für elliptische Integrale erster Gattung. Das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

kann man in algebraischer Form auf folgendem Wege erhalten, der nur die theilweise Integration verlangt. Man hat zunächst

$$dx\sqrt{1-y^2}+dy\sqrt{1-x^2}=0$$

folglich

$$\int dx\sqrt{1-y^2}+\int dy\sqrt{1-x^2}=Const.$$

Bei theilweiser Integration ist aber

$$\int dx\sqrt{1-y^2}=x\sqrt{1-y^2}+\int\frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\int dx\sqrt{1-x^2}=y\sqrt{1-x^2}+\int\frac{yx\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

mithin durch Addition

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}+\int xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)=Const.$$

Hier verschwindet der vorausgesetzten Differentialgleichung zufolge der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck und es bleibt daher

$$1)\qquad x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=Const.$$

als gesuchte Integralgleichung übrig.

Nehmen wir

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\alpha \text{ folglich } x=\sin\alpha,\ \sqrt{1-x^2}=\cos\alpha,$$

$$\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\beta \text{ folglich } y=\sin\beta,\ \sqrt{1-y^2}=\cos\beta,$$

so verwandelt sich die ursprüngliche Differentialgleichung in

$$d\alpha+d\beta=0,$$

woraus

$$\alpha + \beta = \gamma$$

folgt, wenn γ eine Constante bedeutet. Für $\alpha = 0$ wird im speciellen Falle $x = 0$, $\beta = \gamma$, $\eta = \sin\beta = \sin\gamma$ und nach Nr. 1) $Const. = y = \sin\gamma$. Man hat nun bei Rückkehr zu dem allgemeinen Falle

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$$

oder vermöge der Werthe von x und y

$$2)\qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$

und dies ist die Fundamentalformel der trigonometrischen Funktionen.

Mittelst desselben Verfahrens kann man leicht zu dem bekanntlich von Euler zuerst gegebenen Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$$

gelangen und daraus die Fundamentalformel für die elliptischen Funktionen ableiten. Durch Multiplication mit dem Produkte der beiden Nenner, Division mit $1 - k^2x^2y^2$ und Integration erhält man zuerst

$$\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dx + \int \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dy = Const.$$

Das erste Integral giebt bei theilweiser Integration

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dx = &\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\\ &+\int xy\frac{(1+k^2)(1+k^2x^2y^2)-2k^2(x^2+y^2)}{(1-k^2x^2y^2)^2}\,\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\\ &-2k^2\int \frac{x^2y^2}{(1-k^2x^2y^2)^2}\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,dx;\end{aligned}$$

hieraus erhält man durch gegenseitige Vertauschung von x und y die entsprechende Transformation des zweiten Integrales, und nachher durch Addition

$$\begin{aligned}&\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2} + \frac{y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\\ &+\int xy\frac{(1+k^2)(1+k^2x^2y^2)-2k^2(x^2+y^2)}{(1-k^2x^2y^2)^2}\left\{\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} + \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\right\}\\ &-2k^2\int\frac{x^2y^2}{(1-k^2x^2y^2)^2}\left\{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,dx + \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,dy\right\} = Const.\end{aligned}$$

Der vorausgesetzten Differentialgleichung zufolge verschwinden die unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke und es bleibt daher

$$3)\qquad \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = Const.$$

als gesuchte Integralgleichung übrig.

erhalten, doch, von demselben einmal ausgeschieden, nicht wieder darin auflöslich.

Zu erwähnen ist hierbei noch der

5. Schwarze Schwefel, welcher durch Beimengung fremder Substanzen entstanden, nicht grade als allotropischer Zustand, doch wegen der oben genannten Eigenschaften als eine besondere Modification des Schwefels betrachtet werden kann.

LIII. Ueber die Temperaturgrenze, bei welcher Flüssigkeiten die Gefässe zu benetzen aufhören hat Herr Wolf (Prof. d. Physik zu Metz) einige Versuche mit Schwefeläther angestellt (*Compt. rend. T. XXII. p.* 968). Bekanntlich nimmt die Capillarelevation einer Flüssigkeit unter sonst gleichen Umständen mit der Temperatur ab, doch ist das betreffende Gesetz nicht über den gewöhnlichen Siedepunkt hinaus beobachtet oder festgestellt worden. Es ist natürlich von Interesse zu wissen, in wieweit und wie sich dieses Gesetz über diese Grenze hinaus gestaltet und ob es eine Grenztemperatur giebt, bei welcher die Capillarelevation = 0 wird und über welche hinaus dieselbe etwa in eine Depression übergeht.

Unter Voraussetzung der Richtigkeit des von Herrn Brunner und anderen Physikern aufgestellten Gesetzes über die Abnahme der Capillarhöhe auch jenseits der Grenzen der Versuche würde das Wasser bei 536° C. und Schwefeläther bei 191° C. aufhören das Glas zu benetzen und in einer Capillarröhre zu steigen. Da die Versuche mit Wasser sonach sich unthulich erwiesen, so wurde der Versuch mit Aether in folgender Weise vorgenommen.

In eine starke Glasröhre von etwa 1 Centim. Durchmesser wurde etwas Schwefeläther und ein Haarröhrchen gebracht, die Röhre vor der Lampe geschlossen, nachdem vorher alle Luft aus derselben ausgetrieben war. Hierauf wurde die Röhre in eine umgekehrte Glocke voll Leinöl gestellt und daneben eine zweite, offene, mit Oel gefüllte Röhre, in welches ein Thermometer eingesenkt war.

Sowie nun die Temperatur erhöht wurde, sank die Flüssigkeitssäule in dem Haarröhrchen und war bei 190 — 191° C. ganz verschwunden; zugleich verflachte sich in der weiten Röhre die anfänglich concave Oberfläche des Aethers und wurde bei der zuletzt angegebenen Temperatur ganz eben. Bei weiterer Temperaturerhöhung ist ein capillarer Meniskus unterhalb der Flüssigkeit im äussern Rohre zu bemerken; bei 198° scheint sich die nun stark convexe Oberfläche des Aethers mit einer dicken Wolke zu bedecken und zeigt unbestimmte Umrisse. Bei 200° C. endlich ist, wie auch Cagniard Latour bemerkt hat, die Flüssigkeit ganz in Dampf verwandelt. Sinkt die Temperatur, so kommen die vorhergehenden Erscheinungen in umgekehrter Reihenfolge wieder.

LIV. Anwendung eines neuen Hahnsystems auf verdünnende [illegible] verdichtende Luftpumpen; von Herrn J. Silbermann (*Compt. rend. Tom. X*[illegible] *p.* 1051). Die mit diesem neuen Hahn versehenen Luftpumpen gesta[illegible] mehrfache Combinationen, welche Physikern und Chemikern bei ihren [illegible]tersuchungen, sowie bei Anstellung von Versuchen in öffentlichen Vo[illegible]sungen höchst wünschenswerth erscheinen. Mit Hülfe dieser Vorricht[illegible]

kann das Vacuum beliebig auf vier Tellern und gleichzeitig in einem oder zwei Recipienten durch einfaches oder doppeltes Auspumpen bewirkt werden und dasselbe gilt auch für die Compression. Ferner lassen sich damit Gasarten aus einem oder zwei Recipienten in einen oder zwei andere überfüllen und durch Verbindung von je zweien der Recipienten einer oder zwei Gasströme herstellen, was zu verschiedenen physikalischen wie chemischen Untersuchungen der Gase von besonderm Vortheil sein kann.

Eine einstieflige mit diesem Hahne versehene Maschine hat wesentlich folgende Einrichtung. In einem senkrechten Cylinder bewegt sich ein aus Lederscheiben zusammengesetzter undurchbohrter Kolben. Auf dem Boden des Cylinders befinden sich zwei konische Ventile, von denen das eine für die Verdünnung, das andere für die Verdichtung bestimmt ist. Jedes dieser Ventile arbeitet in einer kleinen Büchse, die an eine senkrechte Durchbohrung der Einsatzröhre eines darunter angebrachten grossen Hahnes angeschraubt ist. Die horizontale Axe dieses Hahnes ist parallel der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Ventile und liegt in der Ebene der beiden Durchbohrungen der Einsatzröhre. Der Hahn selbst hat folgende drei verschiedene Durchbohrungen.

1. Ist derselbe zweimal diametral durchbohrt, wodurch die beiden senkrechten Kanäle der Ventile fortgesetzt werden bis zur tiefsten Gegend der Einsatzröhre, von wo an sie horizontal und divergent nach Aussen geführt sind und mit zwei Recipienten und dergl. in Verbindung gesetzt werden können.

2. Nächst diesen beiden parallelen Kanälen hat der Hahn zwei gegen die Axe schiefe Durchbohrungen, die sich X förmig kreuzen, ohne aber aufeinander zu treffen, indem sie in der Mitte in entgegengesetzter Richtung gekrümmt sind und sich so gegenseitig ausweichen. Diese schiefen Kanäle liegen in einer durch die Axe des Hahnes gehenden Ebene, die 30° gegen die Ebene der beiden ersten Kanäle geneigt ist.

3. In einer ebenfalls durch die Axe des Hahns gelegten gegen die vorhergenannten aber wieder um 30° gewendeten Ebene liegen zwei der Hahnaxe parallele Kanäle und deren Oeffnungen, welche im Ganzen die Gestalt zweier von einander abgewendeter Parenthesen (⁐) haben. Dieselben setzen den Stiefel und die Recipienten ausser Verbindung, stellen dagegen eine solche oben zwischen den beiden Ventilen einerseits und unten andererseits zwischen dem Saug- und Druckkanal her. Ausserdem sind die der Axe parallelen Kanäle nach der dem Handgriff gegenüberliegenden Seite verlängert und durch einen kleinen konischen angeschraubten Stöpsel verschlossen. Vermittelst dieser Kanäle kann das Gleichgewicht des Druckes zwischen zwei Recipienten hergestellt werden, oder, wenn der genannte Stöpsel gezogen wird, zwischen einem Recipienten und der äussern Luft.

Um die richtige Drehung des Hahnes zu sichern, ist der Handgriff desselben in der Gestalt eines sechseckigen Sterns ausgeführt, dessen drei Diameter den drei Ebenen entsprechen, in welchen jedesmal ein Paar dieser Kanäle liegt. In je zwei gegenüberstehenden Ecken des Sterns ist eins der Zeichen II, X, ⁐ angebracht und somit die Stellung des Hahns für jede Art von Verbindungsröhren bezeichnet. Bei den zwischenliegenden Stellungen des Hahns ist von demselben jede Communication unterbrochen.

Bei der zweistiefligen Maschine ist jeder Stiefel mit einem Saug- und einem Druckventil versehen. Alle vier Ventile befinden sich in der-

selben vertikalen Ebene. Die beiden einander am nächsten stehenden Ventile von zw[illegible] i Stiefeln sind von ihrem untern Ende durch einen horizontalen, in [illegible] emeinschaftlichen Basis beider Stiefel ausgebohrten Kanal verbunde[illegible] so sind die beiden einander entfernteren Ventile durch einen ho[illegible] ıen Kanal verbunden. An den Verbindungspunkten der beiden hori[illegible] en Kanäle mit jedem der vier vertikalen befindet sich ein Hahn mit drei die Gestalt eines T bildenden Durchbohrungen. Jedes der vier Ventile kann daher vermittelst des horizontalen Kanals des Hahnes und eines daranstossenden Ansatzes mit einem Recipienten verbunden werden.

Ausserdem ist jeder Stiefel mit einem Manometer und einem abgekürzten Barometer (Eprouvette) versehen, welche seitwärts nahe an den Stiefeln angebracht sind und mit dem Innern derselben durch einen kleinen horizontalen Kanal in Verbindung stehen. D[illegible] ser horizontale Kanal trifft den [illegible] tikalen jedes Ventils zwischen diesem [illegible] d dem Hahn. Dadurch sind die [illegible] nometer und Barometer von den Verst[illegible] ungen des Hahnes unabhängig. [illegible] lich ist jede der Röhren für die Ma[illegible] meter und Barometer über der [illegible] n Oeffnung eines kleinen Hahnes [illegible] gebracht, der mit den transver[illegible] Kanälen von T-Gestalt in Verbi[illegible] ng steht. Die Büchse dieses [illegible] nes hat gegenüber dem Stiefel ein [illegible] h, das man öffnet, wenn man [illegible] das Manometer tragenden Hahn um 90° dreht. Man arbeitet in dieser Weise, wenn man die Verdünnung oder V[illegible] rdichtung zugleich in zwei Recipienten herstellen will.

LV. Das Funkeln der Fixsterne hat bekanntlich ARAGO durch Interferenzen erklärt, welche durch das fortwährende Dazwischentreten ungleich dichter Luftwellen in die Richtung des vom Sterne ausgehenden Lichts hervorgerufen werden. Eine etwas davon abweichende Ansicht hat Herr MONTIGNY aufgestellt, über welche in dem *Bullet. de l'Acad. des Sciences etc. de Belgique Tom. XXII. pt. II. p.* 347 berichtet wird. Herr Montigny stützt seine Ansicht zunächst darauf, dass, wenn ein Stern nicht sehr hoch über dem Horizonte steht, die von ihm ausgehenden Strahlen nicht allein in der Atmosphäre gebrochen, sondern auch dispergirt werden, so dass das Bild desselben aus einem kleinen Spectrum besteht, welches nur eine zu geringe Ausbreitung hat, um vom Auge als solches wahrgenommen zu werden, das aber deutlicher hervortritt, wenn man sich eines hinreichend starken Fernrohres bedient. Berücksichtigt man zunächst die den äussersten Farben dieses Spectrums entsprechenden Lichtbündel, deren Durchmesser dem der Pupille oder des Fernrohrs gleich ist, jenachdem man ohne oder mit Fernrohr beobachtet, so bilden diese beim Eintritt in das Auge oder Fernrohr unter sich einen kleinen Winkel, weshalb sie in der Atmosphäre und zuvor im Leeren zwei getrennnte Bahnen durchlaufen haben müssen, die, vor dem Eintritt in die Atmosphäre gradlinig und einander parallel, nach dem Eintritt convergent und in der Oeffnung des Auges oder des Fernrohrs sich durchkreuzend anzunehmen sind. Die Bahnen der zu den übrigen Farben des Spectrums gehörigen Lichtbündel liegen zwischen den beiden äussersten und es bilden sonach die Lichtbündel aller Farben einen Lichtstreifen, dessen Breite, gemessen in der Vertikalebene und senkrecht auf der Richtung des mittleren Bündels, von der Grenze der Atmosphäre an bis zum Auge fortwährend abnimmt.

also

$$\varrho = \sqrt{\left\{\frac{1-u^2}{1-\Theta^2 u^2}\right\}}, \quad d\varrho = -\frac{(1-\Theta^2)\,u\,du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-\Theta^2 u^2)^3}}$$

setzt, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$S = ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \int_0^1 \frac{(1-\Theta^2)\,du}{(1-\Theta^2 u^2)^2}$$

d. i. wenn man für Θ^2 seinen Werth setzt und die Reihenfolge der Integrationen umkehrt,

$$S = ab\int_0^1 du \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1-\alpha^2)\cos^2\vartheta + (1-\beta^2)\sin^2\vartheta}{[(1-\alpha^2 u^2)\cos^2\vartheta + (1-\beta^2 u^2)\sin^2\vartheta]^2}\,d\vartheta.$$

Unter Anwendung der bekannten Formeln

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\vartheta\,d\vartheta}{(m\cos^2\vartheta + n\sin^2\vartheta)^2} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{m\sqrt{mn}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{(m\cos^2\vartheta + n\sin^2\vartheta)^2} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{n\sqrt{mn}},$$

erhalten wir nun für S das einfache Integral

$$S = \tfrac{1}{4}\pi\,ab\int_0^1 \left\{\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 u^2}\right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}}.$$

Bezeichnen wir die drei Coordinaten des Schwerpunktes von S mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so haben wir ferner

$$S\mathfrak{a} = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} x\,dx\,dy\,\sqrt{\left\{\frac{1-\frac{\alpha^2 x^2}{a^2}-\frac{\beta^2 y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right\}}$$

$$S\mathfrak{b} = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} y\,dx\,dy\,\sqrt{\left\{\frac{1-\frac{\alpha^2 x^2}{a^2}-\frac{\beta^2 y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right\}}$$

$$S\mathfrak{c} = c\int_0^a \int_0^{b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} dx\,dy\,\sqrt{\left\{1-\frac{\alpha^2 x^2}{a^2}-\frac{\beta^2 y^2}{b^2}\right\}}.$$

Durch Anwendung der Substitutionen $x = a\xi$, $y = b\eta$ und der nach-

den. Ausserdem leitet er auch das zeitweilige und momentane Verschwinden von Bildern im Felde des Fernrohrs, wenn die Objecte davon nahe am Horizonte liegen, aus dem Einflusse von Luftwellen und den dadurch hervorgerufenen totalen Reflexionen ab.

Herr Montigny prüft seine Theorie durch Vergleich der daraus zu ziehenden Folgerungen mit bekannten Thatsachen und erinnert dabei an Folgendes:

1. Die dem brechbarsten Theile des Spectrums zugehörigen Lichtbündel nehmen in dem oben erwähnten Lichtstreifen einen grössern Raum ein, als die übrigen Farbestrahlen und daher ist auch grössere Wahrscheinlichkeit dafür vorhanden, dass die brechbareren Strahlen häufiger als die übrigen total reflectirt werden. Zudem sind für die brechbareren Strahlen die Grenzen der Einfallswinkel, unter welchen eine Totalreflexion erfolgen kann, weniger enge. Aus jedem der beiden Umstände folgt, dass die violette und blaue Farbe öfter als die übrigen verschwinden müssen, was mit den Beobachtungen übereinstimmt.

2) Wenn man die Ocularröhre des Fernrohrs weiter herauszieht, so dass das Bild des funkelnden Sterns in eine Scheibe übergeht, so tritt jede Farbe nicht sofort in der ganzen Fläche der Scheibe auf, sondern an verschiedenen Stellen derselben in unterschiedenen Zeitpausen. Dieses Verhalten erklärt Herr Montigny daraus, dass, wenn blos ein Theil von einem der Farbenbündel durch eine Luftwelle reflectirt wird, die reflectirten Strahlen auch nur einen Theil der Scheibe in der zu ihnen complementären Farbe erscheinen lassen.

3. Diejenigen Strahlen, welche nicht total reflectirt werden, erleiden beim Durchgang durch die Luftwellen eine Refraction, in Folge deren sie um weniges abgelenkt werden, und hieraus erklärt sich die mehrfach bestätigte Erscheinung, dass die funkelnden Sterne auch kleinen Schwankungen unterworfen zu sein scheinen. Nur wenn die beiden Oberflächen der brechenden Luftwellen nahezu parallel sind, werden die Lichtstrahlen um eine zu unmerkliche Winkelgrösse abgelenkt werden, als dass die Wirkung davon durch ein scheinbares Schwanken des Sternes bemerkbar werden kann. Es ist also das Funkeln der Sterne nicht nothwendig mit einem Schwanken derselben begleitet, wie ebenfalls die Erfahrung bestätigt.

4. Da der oben erwähnte Lichtstreifen, welchen sämmtliche Farbenstrahlen bilden, um so ausgedehnter sein muss, je schiefer das Licht in die Atmosphäre eintritt und die Wahrscheinlichkeit der Reflexion mehrerer Farbestrahlen in den dazwischen tretenden Luftwellen um so grösser wird, je breiter der Streifen ist, so folgt, dass tiefer stehende oder dem Horizont nähere Sterne um so mehr funkeln müssen, was ebenfalls mit der Erfahrung übereinstimmt.

5. Dass die Planeten, mit Ausnahme von Venus und Merkur, wenig oder gar nicht funkeln, davon sucht Herr Montigny übereinstimmend mit Arago den Grund in dem scheinbaren Durchmesser dieser Gestirne, indem das Funkeln der Lichtportionen, welche von irgend einer Gegend der Planetenscheibe herkommen, nicht mit den Lichterscheinungen, die von vielen andern Theilen der Scheibe herrühren, gleichzeitig übereinstimmen kann, da die entsprechenden Strahlen einen grössern Raum neben einander einnehmen und so durch zu sehr von einander getrennte Lufttheilchen hindurchgehen.

6. Andererseits können sehr kleine Sterne, wie von 7. Grösse, welch

nen Zuständen, oder diese beiden Modificationen können wenigstens aus diesem hergestellt werden. Wird nämlich ein Theil des Schwefelkohlenstoffs von der Lösung abgedampft und dann die Lösung abgekühlt, so krystallisirt octaedrischer Schwefel heraus, wird dann die Flüssigkeit von diesem abgegossen, derselben Schwefelkohlenstoff von neuem, ebenso wie vorhin, entzogen und oktaedrischer Schwefel ausgeschieden, so bleibt nach Wiederholung dieser Operation am Ende eine zähe, in Fäden ausziehbare Masse übrig, welche ebenfalls noch Schwefel enthält und der sich als eine krümliche Substanz abscheidet, wenn man den Schwefelkohlenstoff langsam abdunsten lässt. Obgleich dieser krümliche Schwefel eine grössere Löslichkeit in Schwefelkohlenstoff als der oktaedrische Schwefel hatte, weil er sich aus der Flüssigkeit zuletzt abgeschieden hat, so ist er doch von nun an, d. h. nach seiner einmaligen Trennung vom Schwefelkohlenstoff in demselben unlöslich, auch wenn kochender Schwefelkohlenstoff dazu verwendet wird. Dieser krümliche Schwefel ist rein gelb, wenn der weiche Schwefel nur einmal bis 300° erhitzt und vor jeder geringsten Beimengung von Fett bewahrt worden war, dagegen mehr oder weniger roth gefärbt, wenn der weiche Schwefel mehrmals erhitzt und ausgegossen worden war. Da der krümliche Schwefel vorher im Schwefelkohlenstoff löslich, nach seiner Trennung von demselben aber darin unlöslich ist, so ist er sowohl von dem völlig löslichen, wie von dem unlöslichen zu unterscheiden und wird demgemäss von Herrn Magnus als eine besondere allotropische Modification angesehen.

Die Gegenwart dieser Modification scheint auch das besondere Verhalten des schnell abgekühlten weichen Schwefels zu bedingen. Der weiche Schwefel wird bekanntlich nach einigen Tagen vollständig hart und brüchig. Eine Untersuchung des weichen und wieder erhärteten Schwefels auf den Gehalt an krümlichen Schwefel hat nun ein auffallendes Verschwinden der letzteren Modification in dem erhärteten Schwefel dargethan. Während nämlich weicher Schwefel unmittelbar nach dem Erkalten mit Schwefelkohlenstoff ausgezogen 4—5 Procent krümlichen Schwefel lieferte, gab derselbe, nach 4—5 Tagen vollständig erhärtete Schwefel nur 0,6 bis 1 Procent krümlichen Schwefel. Ob letzterer beim Erhärten in die unlösliche oder lösliche Modification übergegangen war, hat bis dahin nicht entschieden werden können. Die Anwesenheit einer grösseren Quantität der krümlichen Modification in dem weichen Schwefel scheint aber dessen Biegsamkeit und Elasticität zu bedingen. Etwas Aehnliches findet auch beim sogenannten schwarzen Schwefel statt, der durch eine ganz geringe Beimischung einer anderen Substanz (nur etwa 0,0003 seines Gewichts Paraffin ist schon hinreichend) erhalten, nach Erhitzen bis auf 300° und plötzlichem Abkühlen durch Ausgiessen in kaltes Wasser weich und schmierig wird und dieses Verhalten einige Zeit festhält. So wie diese Eigenschaft des schwarzen Schwefels von der Zugabe schon einer so geringen Quantität einer anderen Substanz herrührt, ebenso kann die Biegsamkeit und Elasticität des gelben weichen Schwefels von der Anwesenheit des krümlichen Schwefels abzuleiten sein. Man hat demnach folgende allotropischen Zustände des Schwefels:

1. Prismatischer Schwefel } beide in Schwefelkohlenstoff löslich;
2. Oktaedrischer Schwefel }
3. Unlöslicher Schwefel;
4. Krümlicher Schwefel, aus seiner Lösung in Schwefelkohlenstoff

erhalten, doch, von demselben einmal ausgeschieden, nicht wieder darin auflöslich.

Zu erwähnen ist hierbei noch der

5. Schwarze Schwefel, welcher durch Beimengung fremder Substanzen entstanden, nicht grade als allotropischer Zustand, doch wegen der oben genannten Eigenschaften als eine besondere Modification des Schwefels betrachtet werden kann.

LIII. Ueber die Temperaturgrenze, bei welcher Flüssigkeiten die Gefässe zu benetzen aufhören hat Herr Wolf (Prof. d. Physik zu Metz) einige Versuche mit Schwefeläther angestellt (*Compt. rend. T. XXII. p.* 968). Bekanntlich nimmt die Capillarelevation einer Flüssigkeit unter sonst gleichen Umständen mit der Temperatur ab, doch ist das betreffende Gesetz nicht über den gewöhnlichen Siedepunkt hinaus beobachtet oder festgestellt worden. Es ist natürlich von Interesse zu wissen, in wieweit und wie sich dieses Gesetz über diese Grenze hinaus gestaltet und ob es eine Grenztemperatur giebt, bei welcher die Capillarelevation = 0 wird und über welche hinaus dieselbe etwa in eine Depression übergeht.

Unter Voraussetzung der Richtigkeit des von Herrn Brunner und anderen Physikern aufgestellten Gesetzes über die Abnahme der Capillarhöhe auch jenseits der Grenzen der Versuche würde das Wasser bei 536° C. und Schwefeläther bei 191° C. aufhören das Glas zu benetzen und in einer Capillarröhre zu steigen. Da die Versuche mit Wasser sonach sich unthulich erwiesen, so wurde der Versuch mit Aether in folgender Weise vorgenommen.

In eine starke Glasröhre von etwa 1 Centim. Durchmesser wurde etwas Schwefeläther und ein Haarröhrchen gebracht, die Röhre vor der Lampe geschlossen, nachdem vorher alle Luft aus derselben ausgetrieben war. Hierauf wurde die Röhre in eine umgekehrte Glocke voll Leinöl gestellt und daneben eine zweite, offene, mit Oel gefüllte Röhre, in welches ein Thermometer eingesenkt war.

Sowie nun die Temperatur erhöht wurde, sank die Flüssigkeitssäule in dem Haarröhrchen und war bei 190 — 191° C. ganz verschwunden; zugleich verflachte sich in der weiten Röhre die anfänglich concave Oberfläche des Aethers und wurde bei der zuletzt angegebenen Temperatur ganz eben. Bei weiterer Temperaturerhöhung ist ein capillarer Meniskus unterhalb der Flüssigkeit im äussern Rohre zu bemerken; bei 198° scheint sich die nun stark convexe Oberfläche des Aethers mit einer dicken Wolke zu bedecken und zeigt unbestimmte Umrisse. Bei 200° C. endlich ist, wie auch Cagniard Latour bemerkt hat, die Flüssigkeit ganz in Dampf verwandelt. Sinkt die Temperatur, so kommen die vorhergehenden Erscheinungen in umgekehrter Reihenfolge wieder.

LIV. Anwendung eines neuen Hahnsystems auf verdünnende und verdichtende Luftpumpen; von Herrn J. Silbermann (*Compt. rend. Tom. XXII p.* 1051). Die mit diesem neuen Hahn versehenen Luftpumpen gestatten mehrfache Combinationen, welche Physikern und Chemikern bei ihren Untersuchungen, sowie bei Anstellung von Versuchen in öffentlichen Vorlesungen höchst wünschenswerth erscheinen. Mit Hülfe dieser Vorrichtung

Literaturzeitung

der

itschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. B. Witzschel.**



Erster Jahrgang.

LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1856.



Wenn nun ein Fernrohr von 10 Centimeter Oeffnung auf einen 10° über dem Horizont stehenden Stern gerichtet wird, so sind nach Herrn Montigny's Demonstration die von diesem Sterne ausgegangenen, den verschiedenen Farben entsprechenden Lichtbündel in 1000 Meter Abstand vor dem Fernrohr noch hinreichend und so weit von einander getrennt, dass eine Luftwelle durch die Bahn eines dieser Bündel allein hindurchgehen und auf dasselbe einwirken kann, ohne dass doch die anderen Lichtbündel gleichzeitig davon afficirt würden, so dass also ein Lichtphänomen möglich wird, welches nur durch Beeinflussung der Strahlen dieses einzigen Farbenbündels seine Entstehung erhält. Dies vorausgesetzt, kann nun eine Luftwelle die Bahn eines Bündels oft so treffen, dass dasselbe entweder an der Hinter- oder Vorderfläche der Welle, jenachdem diese dichter als die umgebende Luft ist oder nicht, total reflectirt wird und somit in das Auge oder Fernrohr nicht eintrifft. Das Fehlen dieses Farbenbündels hat aber zur Folge, dass alle übrigen Farbestrahlen, welche das Auge treffen, sich zur complementären Farbe vereinigen. Dies wird auch beim Gebrauche eines Fernrohrs noch stattfinden, wenn dieses nicht hinreichend stark ist, das Bild des Sternes als ein kleines Spectrum darzustellen. Sonach müssen die totalen Reflexionen der verschiedenen Farbebündel, sowie sie in kurzer Zeit in grosser Anzahl vor sich gehen, die Farbe des Sternes fast continuirlich verändern.

Tritt dagegen eine Luftwelle, wenn sie eine totale Reflexion bewirkt, in grösserer Nähe am Auge durch die Bahn des Lichtstreifens, wo sich die Farbenbündel schon viel mehr genähert haben, so bewirkt sie das momentane Verschwinden aller oder fast aller Lichtbündel, d. h. der Stern verschwindet für einen Augenblick oder erfährt eine dem fast gleich zu achtende Schwächung seines Glanzes ohne wahrnehmbare Farbenänderung.

Die Beobachtungen und Versuche, auf die Herr Montigny seine Theorie stützt, sind wesentlich folgende. Er brachte vor dem Objectiv eines Fernrohrs ein Prisma an, welches das Bild eines Sternes in ein Farbenspectrum verwandelt. In diesem Spectrum beobachtete er nun beständige Veränderungen, insbesondere rasche Verlängerungen und Verkürzungen beider Enden, am häufigsten und stärksten aber des violetten Endes. Das Spectrum zog sich dabei oft bis auf die Hälfte seiner Länge zurück, indem das Violett und auch das Blau gänzlich verschwand. An dem andern Ende des Spectrums verkürzte sich das Roth einigermaassen, oder das Gelb griff in das Roth über, doch waren diese Verkürzungen schon verhältnissmässig seltener und geringer. Ausserdem erhielt das ganze Spectrum plötzlich transversale Schwankungen und bisweilen durchfuhr eine Lichtlinie wie ein Blitz das ganze stark bewegte Spectrum.

Die Möglichkeit von Reflexionen an den Grenzflächen von Luftwellen, die schon durch die Erscheinung der Luftspiegelung dargethan wird, hat Herr Montigny noch durch einen besondern Versuch nachzuweisen unternommen. Zu dem Ende leitete er künstlich erzeugte heisse Luftströme durch das Innere des von einem Sonnenmikroskop ausgehenden Lichtkegels und beobachtete dann, dass die äussern Ränder eines solchen Stroms auf dem entgegengehaltenen Schirme durch erhöhten Glanz bemerkbar und gegen die andern, mehr nach Innen liegenden Theile hervorstechend wurden. Dieser stärkere Glanz, meint Herr Montigny, könne nur von den Strahlen herrühren, welche den Strom sehr nahe an denselben Rändern durchdringen und durch zwei successive Brechungen nach Aussen abgelenkt wer-

Inhalt.

Physik.

einen zu schwachen Glanz haben, auf der Netzhaut keinen deutlichen Eindruck von Farbenänderung hervorbringen, wenn ein Theil der von ihnen ausgegangenen Farbestrahlen durch totale Reflexion abgelenkt, die Gesammtheit des Lichtes somit zu sehr vermindert wird. Man beobachtet daher an so kleinen Sternen keine Farbenänderung.

7. Dass man die funkelnden Sterne nicht wie beim Phänomen der Kimmung doppelt erblickt, hat einen einfachen Grund. Die Luftwellen, welche das Funkeln des Sternes hervorbringen, haben nämlich nicht die regelmässige und übereinstimmende Gestalt, dass die von ihnen reflectirten Lichtstrahlen sich zu einem geordneten zweiten Bilde des Sternes wieder vereinigen können, wenigstens wäre dieses nur bei einem seltsamen Zusammenwirken dieser Wellen und wohl auch nur auf ganz kurze Zeit möglich. Grade beim Phänomen der Kimmung dagegen müssen allen Beobachtungen zufolge die verschieden brechbaren Luftschichten eine gewisse Beständigkeit und Regelmässigkeit besitzen, damit ein zweites Bild zu Stande kommt.

Würde allerdings unter besonderen günstigen Umständen von einem funkelnden Sterne ein zweites, wenn auch noch so verzerrtes Bild oder irgend ein Schein davon unzweideutig wahrgenommen, so dürfte eine solche Beobachtung die aufgestellte Theorie nicht unwesentlich unterstützen.

LVI. Erzeugung elektrischer (Lichtenberg'scher) **Staubfiguren** in grösster Vollkommenheit und in verschiedenen Farben. Von Prof. Böttger (Jahresbericht d. physik. Vereins zu Frankfurt a/M. 1854 bis 1855). Man verschafft sich runde, aus gewöhnlichem Weissblech gefertigte, mit einem 2 Linien hohen Rande versehene, circa 4—5 Zoll Durchmesser haltende Schälchen, in welche man nach einer schwachen Erwärmung derselben feinen Siegellack, den man in einer Porzellanschale durch eine gewöhnliche Weingeistlampe in dünnen Fluss gebracht hat, derart eingiesst, dass die Höhe der Harzschicht dem 2 Linien hohen Rande des Schälchens völlig gleich kommt. Einen besonders hübschen Effect geben aus rothem, weissem und schwarzem Siegellack gegossene Harzkuchen. Sind diese dünnen Harzkuchen in der Weissblechform erkaltet, so hält man, um ihnen eine völlig blasenfreie Oberfläche zu geben, in geringer Entfernung ein heissgemachtes Bügeleisen horizontal darüber.

Unter den durch schwache Reibung oder Beutelung leicht elektrisch zu erregenden Stoffen habe ich folgende, beim Ausstäuben stark entgegengesetzt elektrisch werdende Pulver als vorzüglich geeignet gefunden, und zwar zum Bestäuben:

1. eines aus weissem Siegellack bestehenden Harzkuchens:
   a) ein Gemisch aus Zinnober und Ultramarin, oder
   b) aus Schweinfurter Grün und Mennige,
   c) aus Mennige und schwarzem Schwefelantimon,
   d) aus Ultramarin und Schwefel.
2. Für einen aus rothem Siegellack bestehenden Harzkuchen:
   a) Ultramarin und Schwefel,
   b) Schweinfurter Grün und Mennige,
   c) Zinnober und Ultramarin,
   d) Mennige und Schwefel.
3. Für einen Harzkuchen von schwarzem Siegellack:
   a) Ultramarin und Schwefel,
   b) Zinnober und Ultramarin,
   c) Mennige und Schwefel.

Referent gegen den Abdruck vieler Uebungsaufgaben etc., sobald das Lehrbuch von den Schülern angeschafft werden muss; ein kleiner derartiger Anhang wird bald durchgenommen und kann in den nächsten 2—3 Jahren nicht wieder benutzt werden, weil sonst die Schüler sich in den hinterlassenen Heften ihrer Vorgänger wohlfeilen Rath holen würden, ein grosser Anhang dagegen vertheuert das Buch nicht wenig. Anders liegen die Sachen bei Compendien für den höhern Unterricht. Wer mit der Differentialrechnung etc. intimere Bekanntschaft anknüpft, thut dies entweder aus besonderer Neigung, oder weil er sie braucht (wie z. B. der Ingenieur); in beiden Fällen ist es ihm angenehm, in dem Lehrbuche Aufschluss über diesen oder jenen Punkt zu finden, der zwar nicht gerade im Unterrichte berührt wurde, der aber bei irgend einer Gelegenheit (z. B. in einer neuen mechanischen Theorie u. dergl.) plötzlich zur Sprache kommt. Hier wird das Compendium zum Hand- und Nachschlagebuche für den weiter Schreitenden. Diesen Ansichten gemäss möchte Referent das Müller'sche Werk als Schulbuch nicht in Gebrauch nehmen, so bereit er auch sonst ist, die Vorzüge desselben anzuerkennen.

Was nun die neue umgearbeitete Auflage des Werkes im Vergleich zur ersten 1840 erschienenen Ausgabe betrifft, so hat sich die Logik des Verfassers um ein Bedeutendes anschaulicher gestaltet. Den Anfang macht — die Combinationslehre. Dies mag auf den ersten Blick etwas wunderlich aussehen, näher betrachtet hat aber diese Anordnung mancherlei für sich. Wenn irgend wie viel Dinge gegeben sind, so ist die verschiedene Nebeneinanderstellung derselben offenbar das erste mögliche Geschäft, wobei die Unterscheidung des Gleichartigen und Ungleichartigen noch gar nicht einmal in Frage kommt. Diese Operation besitzt einen so hohen Grad von Anschaulichkeit, dass sie unbedenklich auch im Unterrichte voraus genommen werden darf, und wenn man dabei die zu combinirenden Elemente durch Buchstaben bezeichnet, so gewöhnt man die Schüler fast unvermerkt an die zu Buchstabenoperationen erforderliche Abstraction. Fernere Vortheile der Combinationslehre sind, einmal dass sie nur die Kenntniss der natürlichen ganzen Zahlen voraussetzt, zweitens dass sie dem Lernenden Fertigkeit im Aufsuchen der möglichen Fälle verschafft und ihn hierdurch in den Stand setzt, auch bei späteren Disciplinen, wie z. B. in der ebenen und körperlichen Geometrie, einen rascheren Ueberblick zu gewinnen. Selbstverständlich können bei dem vom Verfasser eingeschlagenen Gedankengange keine Formeln für die Anzahl der Permutationen, Combinationen etc., sondern nur wörtliche Regeln aufgestellt werden, dies ist aber wenigstens nach Ansicht des Referenten, der das Denken höher als die Formelmacherei stellt, kein so entsetzliches Unglück, im Gegenthei[illegible] erwächst daraus eine gute pädagogische Uebung; man kann nämlich sp[illegible]terhin, wenn der Buchstabe seine Bedeutung als willkührliche Zahl erh[illegible]lten hat, jene Regeln in Formeln übertragen lassen und bei dieser Gelege[illegible]heit den Schülern handgreiflich zeigen, dass jede Buchstabenformel nichts w[illegible]it[illegible] als eine in kurzen Symbolen dargestellte Regel ist.

Von der Juxtaposition beliebiger Dinge geht der Verfasser zur [illegible]V[illegible]bindung gleichartiger Dinge, d. h. der Grössen über, bespricht d[illegible] Wachsthum und Abnahme, und gewinnt damit den Uebergang zur Z[illegible] welche hier als Coefficient der Einheit mithin vorerst nur als ganze [illegible] auftritt. Mit dieser werden die Grundoperationen in der bekannten W[illegible] durchgenommen, dass die Subtraction als die, wegen $a+b=b+a$, ei[illegible]

mögliche Umkehrung der Addition, und die Division als die, wegen $ab = ba$, einzige Umkehrung der Multiplication erscheint. Die Fälle, in denen der Subtrahend den Minuenden übersteigt, und wenn der Divisor keinen aliquoten Theil des Dividenden ausmacht, geben Veranlassung zur Erweiterung der Zahlenreihe nach der negativen Seite und zur Interpolation derselben durch positive und negative Brüche. Auch die Irrationalzahlen finden hier, noch vor der Wurzelausziehung, ihre Berücksichtigung; der Verfasser gelangt dazu durch die Vergleichung und Ausmessung der Grössen (wie sie auch in der Geometrie vorkommt) und giebt, um nicht bei der blos logischen Möglichkeit des Irrationalen stehen zu bleiben, die Ausmessung der Diagonale eines Quadrates durch dessen Seite als Beispiel für die Realität dieser neuen Zwischenzahlen. Grenzenbetrachtungen liefern nachher den Beweis, dass die für rationale Zahlen erwiesenen Lehrsätze auch bei Irrationalzahlen ihre Geltung behalten. Dieser Gedankengang, der dem von Dr. *Wittstein* befolgten ähnelt, ist heuristisch, streng und nach des Referenten Ansicht, auch der einzig wissenschaftliche. Es mag freilich bequemer sein, gleich mit allgemeinen Definitionen von grosser Kraft für alle Zahlen und mit allgemeinen Regeln herauszurücken, aber dabei entsteht eine doppelte Schwierigkeit; wissenschaftlich kann die allgemeine Fassung nur durch die empirische Thatsache gerechtfertigt werden, dass die fortgeschrittene Wissenschaft eine solche Allgemeinheit nöthig gemacht habe, und pädagogischerseits ist es eine bekannte Erfahrung, dass mit der Allgemeinheit auch die Schwierigkeit des Begreifens wächst — hat man doch bei schon gereifteren Schülern mit der unendlich einfachen Erklärung der Function immer einige Noth. Dagegen bietet der obenerwähnte Gedankengang den Vortheil, dass dem Schüler selber die Nothwendigkeit einleuchtet, die Definitionen durch Erweiterung der neuen Zahlen anzupassen und die Gültigkeit der alten Sätze für die neuen Zahlen zu ermitteln, was ihn immer wieder auf die Principien jeder Rechnungsstufe zurückführt und in diesen von Neuem befestigt.

Nachdem der Verfasser durch das Vorige zu dem unendlich wichtigen Satze gelangt ist, dass die Zahlenreihe als eine continuirliche betrachtet werden kann, verlässt er auf kurze Zeit den aufsteigenden Gang von einer Operation zur nächst höheren und schaltet die Lehre von den algebraischen Gleichungen ersten Grades ein. Haarscharfe Systematiker werden dies wahrscheinlich tadeln und meinen, man müsse erst die Reihe der möglichen Operationen durchlaufen haben, ehe man sich um die Anwendungen derselben zur Ermittelung des Werthes unbekannter Zahlen (Auflösung der verschiedenen Gleichungen) kümmern dürfe; dies lässt sich gewiss vertheidigen, nicht minder gewiss dürfte aber sein, dass man beim Unterrichte wohl thut, nicht zu viel Theorie aufeinander zu häufen, sondern bei Zeiten seinen Schülern zu zeigen, was sich mit dem Bisherigen ausrichten lässt. So z. B. pflegt Referent nach der Entwickelung des ersten und zweiten Differentialquotienten die geometrischen Anwendungen derselben (Tangenten, Normalen etc.) einzuschalten, wodurch gelegentlich auch die nöthige Fertigkeit im Differenziren erworben wird, und dann erst die Lehre von den höheren Differentialquotienten vorzunehmen, obschon das wenig systematisch ist.

Nach Beendigung dieser Digression zur eigentlichen Theorie zurückkehrend, leitet der Verfasser die Potenz auf dieselbe Weise aus der Multiplication ab, wie diese aus der Addition entsprungen war, erhält also zunächst nur Potenzen mit ganzen positiven Exponenten und beliebiger

Grundzahl; auf die Bedeutung von a^0 und a^m lässt sich der Verfasser durch die Division führen, so dass hier ebenso wenig wie bei der Multiplication eine Generaldefinition der Potenz gegeben wird. Aus der Bemerkung, dass a^b im Allgemeinen von b^a verschieden ist, erhellt die Möglichkeit von zwei umgekehrten Operationen (Wurzel und Logarithmus), deren erste einerseits die Potenzen mit gebrochenem Exponenten, andererseits die imaginären Zahlen kennen lehrt. Die Ausdehnung der Operationen des Potenzirens und Logarithmirens auf irrationale Zahlen geschieht wiederum mittelst Grenzbetrachtungen. In einem Rückblicke auf die drei Rechnungsstufen mit ihren sieben Grundoperationen stellt der Verfasser die erhaltenen Ergebnisse zusammen, erörtert die Art des Fortschrittes von einer Operation zur anderen (entweder Zusammensetzung einer wiederholten Operation oder Umkehrung) zeigt, dass wegen $(a^b)^c = a^{bc}$ eine weitere Zusammensetzung der Operationen nichts wesentlich Neues geben würde, und bespricht endlich den Zuwachs, welchen das Zahlengebiet durch die inversen Operationen erhalten hat, bei welcher Gelegenheit auch der complexen Zahlen kurz gedacht wird.

Naturgemäss knüpft sich hieran die Theorie der nach einem bestimmten Zahlensysteme gebildeten Zahlen, sowie die Ausführung der früheren Operationen an dekadischen Zahlen, namentlich die Wurzelausziehung, die Berechnung der Brigg'schen Logarithmen und die Aufsuchung der einem gegebenen Logarithmus entsprechenden Zahl. Die letzteren zwei Aufgaben löst der Verfasser auf bekannte Weise mittelst der Werthe von $10^{0,1}$, $10^{0,01}$ etc. Den Beschluss des eigentlichen Compendiums macht die Lehre von den quadratischen Gleichungen mit einer und mit mehreren Unbekannten. Ein circa 8 Bogen starker Anhang enthält eine bedeutende Menge von Uebungsaufgaben und Excursen verschiedener Art, wie z. B. Rechnung mit unvollständigen Decimalzahlen, Anwendung der dekadischen Ergänzung bei der Division, numerische Auflösung von beliebig vielen simultanen linearen Gleichungen und dergl. mehr.

Zum Schlusse hält sich Referent zu dem Urtheile berechtigt, dass das vorliegende Werk in seiner neuen Gestalt an Uebersichtlichkeit der Disposition, sowie an Klarheit und Anschaulichkeit der Exposition um ein Bedeutendes höher steht, als die erste Auflage, und dass es bei der ihm eigenen Begriffsschärfe und systematischen Vollständigkeit als eines der besten Handbücher für Lehrer gelten muss. SCHLÖMILCH.

Lehrbuch der Elementarmathematik von Dr. THEODOR WITTSTEIN, Professor und Lehrer an der Königl. Cadetten-Anstalt, der Königl. Militäracademie und der städtischen Handelsschule zu Hannover. I. Band, Arithmetik und Planimetrie. Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung 1857. 398 S. 8.

Dieses mathematische Lehrbuch enthält nach der Meinung des Verfassers „genau nicht mehr und nicht weniger als in den Unterrichtsstunden durchgenommen werden soll, legt aber diesen seinen Inhalt bis in die kleinsten Einzelnheiten ausgearbeitet dem Schüler vor. Dasselbe hat zu seinem nächsten Zwecke, dem mathematischen Unterrichte an der Königlichen Cadetten-Anstalt (zu Hannover) zur Grundlage zu dienen.“ Es ist jedenfalls ein dankenswerthes Bemühen, den Lehrstoff in der Elementarmathematik auf ein möglich Geringstes zusammenzuziehen, um einmal dem Schü-

ler die Uebersichtlichkeit über das Ganze nicht zu rauben und dann auch auf die Festlegung und Begründung der Elemente die nöthige Zeit und Sorgfalt verwenden zu können. Dieser Gesichtspunkt darf jedesmal da um so weniger ausser Acht gelassen werden, wo der Unterricht in der Mathematik nicht lediglich als Mittel zu andern Zwecken dienen soll, sondern als obersten und höchsten Zweck den hat, im Verein mit den anderen Disciplinen des Unterrichts eine allgemeinere Ausbildung des Verstandes zu vermitteln. Dass auch an einer Cadettenanstalt die Mathematik um des letztbezeichneten Grundes willen mit in die Zahl der Unterrichtsgegenstände aufgenommen ist, darüber wird mit dem Verfasser wohl Jedermann einverstanden sein. Allein an welcher Bildungsanstalt überhaupt soll die Mathematik nicht den genannten Zweck erfüllen? Dem Referenten erscheinen demnach die hieraus abgeleiteten Ansichten über den Unterricht der Mathematik als so ganz allgemeine, selbstverständliche, mit der Natur des Gegenstandes so innig verknüpfte, im Uebrigen auch allgemein anerkannte Grundsätze, dass sich aus diesen eine besondere Darstellung des mathematischen Lehrstoffes, die nach Form oder nach Inhalt eigenthümlich zu nennen wäre, nicht ergeben kann. Man kann mit dem vom Verfasser in der Vorrede aufgestellten Satze, dass der mathematische Unterricht ein allgemein und formal-bildender auch an einer Cadettenanstalt sein solle, ganz einverstanden sein, ohne den Weg, welchen als diesem Zwecke ganz entsprechend der Verfasser bezeichnet, als den alleinigen und unfehlbar zum Ziele führenden anzusehen. Denn so viel auch hierbei auf die Natur und Beschaffenheit der übrigen Unterrichtsgegenstände ankommt, wenn die Ausdehnung des mathematischen Unterrichts bemessen werden soll, so muss doch jedenfalls eine ernstliche Selbstbeschäftigung mit den dahin gehörigen Gegenständen dem Schüler angesonnen oder zur Pflicht gemacht werden, soll der ganze Unterricht nicht grossentheils ein vergeblicher sein. Der mathematische Unterricht in den Lehrstunden kann daher immer von Seiten der Anstalt möglichst beschränkt, desto mehr muss aber die Beschäftigung der Schüler mit Mathemathik angeregt, befördert, verlangt und befohlen werden. Es ist jedoch eine starke Zumuthung für den Schüler, sich fortwährend blos mit einem magern Gerippe der betreffenden Disciplin, worauf vielleicht der eigentliche Unterricht zu beschränken ist, beschäftigen zu sollen, auch möchte das Maass der hieraus entspringenden allgemeinen Bildung für denselben nicht eben erheblich ausfallen. Sicherheit in den Elementen und Grundlinien einer Wissenschaft oder Sprache erhält man auch nicht durch fortwährende Wiederholung derselben nach einem vorgezeichneten Systeme, sondern durch wiederholte Anwendung derselben auf den weitern Ausbau dieser Grundbegriffe. Da den Schülern der bezeichneten Anstalten zu dieser anhaltenden Beschäftigung mit Mathematik ausser dem eingeführten Lehrbuche in der Regel keine andern Hülfsbücher in die Hände gegeben werden, so stellt es sich von selbst wünschenswerth heraus, dass in dem Lehrbuche dem eigentlichen für den Unterricht bestimmten Lehrstoffe sich noch andere in möglichst genauem Zusammenhange mit demselben stehende Theile anschliessen, welche für eine angemessene Selbstthätigkeit des Schülers berechnet sind. Ob also das Lehrbuch, welches an einer Cadettenanstalt oder ähnlichen Anstalt eingeführt werden soll, auf ein solches Minimum, wie der Verfasser meint, zu reduciren ist, darüber kann man wohl aus den angedeuteten Gründen anderer Meinung sein, wenn man auch andererseits wieder zugeben kann, dass der Verfasser die ihm vorliegenden

Inhalt.

Physik.

zen Zahlen durch eine beliebige Zahl interpolirt hat, führen den Namen Brüche oder gebrochene Zahlen. Sie werden absolute Brüche genannt, wenn die Zahlenreihe rückwärts mit der Null abbricht; dagegen algebraische Brüche, wenn die Zahlenreihe über Null auch nach der negativen Seite unbegrenzt fortgeht." Endlich kommt §. 83 die „Erklärung: Jeder absolute Bruch $\frac{a}{b}$ besteht aus einem Zähler a und einem Nenner b; der Zähler ist die absolute ganze Zahl, welche die Stelle anzeigt, die der Bruch in der interpolirten Zahlenreihe einnimmt; der Nenner ist die absolute ganze Zahl, welche anzeigt, in wie viele Theile man die Einheit der Zahlenreihe getheilt hat", worauf noch 2 „Erklärungen" (§§. 84 und 85), die uneigentlichen, so wie die ächten und unächten Brüche betreffend, folgen. Man muss gestehen, dem Schüler wird sehr viel „erklärt", wie viel er davon versteht, ist aber wohl ohne weitere Auseinandersetzung leicht abzunehmen. Diese Bruchlehre bietet überhaupt mancherlei Eigenthümlichkeiten dar, von denen aber Referent der Meinung ist, dass sie eine schärfere Auffassung des Gegenstandes von Seiten des Schülers nicht eben zu befördern geeignet sind, z. B. der erste die Addition der Brüche betreffende Satz ist die „Aufgabe, zu einem gegebenen Bruche $\frac{a}{b}$ einen zweiten gegebenen Bruch $\frac{c}{d}$ zu addiren. Auflösung. Man suche den Bruch $\frac{a}{b}$ in der Zahlenreihe der $b$tel auf, und schreite von ihm in der Zahlenreihe um c solcher Theile der Einheit fort, wie sie die Zahlenreihe der $d$tel enthält. Derjenige Bruch, zu welchem man auf diese Weise gelangt, ist die gesuchte Summe." Es ist dem Referent nicht klar, welchen Nutzen für den Schüler diese Auffassung der bezeichneten Aufgabe haben soll. Dass übrigens das Lehrbuch nicht ganz „genau nicht mehr und nicht weniger enthält, als was in den Unterrichtsstunden vorgenommen werden soll", beweist eine Vergleichung der gegebenen Lehrsätze, Aufgaben etc. mit den beigefügten Beispielen zur Uebung, von welchen manche dem Schüler, der nicht mehr Unterweisung in den Lehrstunden erhalten hat, als nach dem gegebenen Materiale abzunehmen ist, zu grosse Schwierigkeiten darbieten dürften. So ist auch für diese Beispiele in §. 32 und 33 nur der Begriff der Potenz, nicht aber die Multiplication und Division der Potenzen mit gleichen Grundzahlen vorläufig gegeben, letztere aber doch zur Ausrechnung von Beispielen vorausgesetzt worden. S e h r a n g e m e s s e n d a g e g e n h a t d e r V e r f a s s e r s o z e i t i g, w i e e s n u r t h u n l i c h w a r, d i e A u f l ö s u n g d e r G l e i c h u n g e n 1. G r a d e s i n d e n L e h r g a n g d e r a l l g e m e i n e n A r i t h m e t i k e i n g e s e t z t und dadurch sein Lehrbuch dem Unterrichte, wie er doch wohl von jedem verständigen Lehrer in Wirklichkeit betrieben wird, als eine geeignetere Unterlage angepasst. — Der geometrische Theil ist im Allgemeinen in Euklideischer Weise durchgeführt, doch scheinen Referent manche Erklärungen und Darstellungen von dem Geiste der Alten etwas abzuweichen, z. B. die Definition §. 174. Von §. 187 und 188 sollten die Umkehrungen mit aufgeführt sein. — Sehr beachtenswerth ist der siebente Abschnitt, welcher die Verhältnisse und Proportionen unter Linien behandelt, insbesondere die Anordnung der betreffenden Sätze nach einer Eintheilung und Unterscheidung der Strahlensysteme mit p a r a l l e l e n Transversalen, unter welchem Titel die gewöhnlichen Sätze über Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren und Proportiona-

lität ihrer Seiten etc. aufgeführt werden, ferner der Strahlensysteme mit nicht parallelen Transversalen, wobei das Wichtigste über Doppelverhältnisse und harmonische Proportionen und Harmonikalen vorkommt, endlich der Strahlensysteme in Verbindung mit einem Kreise (Proportionen beim Kreise). Der Verfasser hat hier deutlich das Bedürfniss gefühlt, den Stoff nach seinem innern Zusammenhange anzuordnen und zusammenzustellen, dabei auch recht glücklich richtige Gesichtspunkte getroffen. Im Ganzen enthält trotz der gemachten Ausstellungen das Lehrbuch vor manchem anderen ähnlichen Umfanges vielfache Vorzüge und kann jedenfalls allen den Lehrern zur nähern Einsicht und weitern Beachtung empfohlen werden, denen für ihren Unterricht eine verhältnissmässig beschränkte Zeit zugemessen ist.

WITZSCHEL.

Die physische Geographie des Meeres, von M. F. MAURY, Marineleutnant der Verein. Staaten von Nordamerika. Deutsch bearbeitet von DR. C. BÖTTGER, Prof. am Gymnasium zu Dessau. Leipzig, Gust. Mayer. 1856.

Trotz vieler einzelnen Werke und trotz der zahllosen von den verschiedensten Seiten herrührenden Notizen über den Ocean bleibt eine einigermaassen umfassende Darstellung der physischen Geographie des Meeres (einer bekanntlich von A. v. Humboldt angeregten und benannten Wissenschaft) immer noch eine sehr schwere Aufgabe. Zu einer genügenden Lösung derselben gehört nicht nur ein mit dem gesammten tellurischen Leben wohlvertrauter Gelehrter, sondern auch ein praktischer Seemann, der das Meer aus langjähriger eigener Anschauung unter allen Längen und Breiten kennt und ausserdem das Talent besitzt, durch lebendige Darstellung dem Werke das rechte Colorit zu geben. Diese Verbindungen finden sich bei dem Verfasser, dessen mannichfaltige Verdienste um die Vervollkommnung der Wind- und Strömungskarten auch über die Grenzen seines Vaterlandes hinaus bekannt sind, in einem nicht gewöhnlichen Grade vereinigt und jede Seite des Werkes legt davon ein sprechendes Zeugniss ab. In markigen Zügen entwirft der Verfasser in jedem Capitel zuerst ein klares Bild der einzelnen Erscheinung, welche er zu discutiren beabsichtigt, und lässt darauf die eigentliche wissenschaftliche Untersuchung folgen, bei welcher eine ebenso grosse Fülle von Beobachtungen über die einzelnen Modificationen jener Erscheinung als andererseits eine genaue Bekanntschaft mit allen in Frage kommenden physikalischen Gesetzen hervortritt. Die Gegenstände, welche in den Kreis der Betrachtung gezogen werden, sind folgende: Cap. I. Der Golfstrom. Cap. II. Einfluss des Golfstromes auf klimatische Verhältnisse. Cap. III. Die Atmosphäre. Cap. IV. Rothe Nebel und Seestaub. Cap. V. Ueber die wahrscheinliche Beziehung zwischen dem Magnetismus und der Circulation der Atmosphäre. Cap. VI. Meeresströmungen. Cap. VII. Das offene Meer im arktischen Ocean. Cap. VIII. Das Salz des Meerwassers. Cap. IX. Der äquatoriale Wolkenring. Cap. X. Ueber die geologische Einwirkung der Winde. Cap. XI. Die Tiefen des Oceans. Cap. XII. Das Becken des atlantischen Oceans. Cap. XIII. Die Winde. Cap. XIV. Die klimatischen Verhältnisse des Oceans. Cap. XII. Ueber die Driftströmungen der See. Cap. XVI. Die Stürme. Cap. XVII. Routen. Cap XVIII. Schlusswort. — Man wird aus dieser Inhaltsangabe zweierlei ersehen, einerseits eine grosse Vollständig-

mögliche Umkehrung der Addition, und die Division als die, wegen $ab = ba$, einzige Umkehrung der Multiplication erscheint. Die Fälle, in denen der Subtrahend den Minuenden übersteigt, und wenn der Divisor keinen aliquoten Theil des Dividenden ausmacht, geben Veranlassung zur Erweiterung der Zahlenreihe nach der negativen Seite und zur Interpolation derselben durch positive und negative Brüche. Auch die Irrationalzahlen finden hier, noch vor der Wurzelausziehung, ihre Berücksichtigung; der Verfasser gelangt dazu durch die Vergleichung und Ausmessung der Grössen (wie sie auch in der Geometrie vorkommt) und giebt, um nicht bei der blos logischen Möglichkeit des Irrationalen stehen zu bleiben, die Ausmessung der Diagonale eines Quadrates durch dessen Seite als Beispiel für die Realität dieser neuen Zwischenzahlen. Grenzenbetrachtungen liefern nachher den Beweis, dass die für rationale Zahlen erwiesenen Lehrsätze auch bei Irrationalzahlen ihre Geltung behalten. Dieser Gedankengang, der dem von Dr. *Wittstein* befolgten ähnelt, ist heuristisch, streng und nach des Referenten Ansicht, auch der einzig wissenschaftliche. Es mag freilich bequemer sein, gleich mit allgemeinen Definitionen von grosser Kraft für alle Zahlen und mit allgemeinen Regeln herauszurücken, aber dabei entsteht eine doppelte Schwierigkeit; wissenschaftlich kann die allgemeine Fassung nur durch die empirische Thatsache gerechtfertigt werden, dass die fortgeschrittene Wissenschaft eine solche Allgemeinheit nöthig gemacht habe, und pädagogischerseits ist es eine bekannte Erfahrung, dass mit der Allgemeinheit auch die Schwierigkeit des Begreifens wächst — hat man doch bei schon gereifteren Schülern mit der unendlich einfachen Erklärung der Function immer einige Noth. Dagegen bietet der obenerwähnte Gedankengang den Vortheil, dass dem Schüler selber die Nothwendigkeit einleuchtet, die Definitionen durch Erweiterung der neuen Zahlen anzupassen und die Gültigkeit der alten Sätze für die neuen Zahlen zu ermitteln, was ihn immer wieder auf die Principien jeder Rechnungsstufe zurückführt und in diesen von Neuem befestigt.

Nachdem der Verfasser durch das Vorige zu dem unendlich wichtigen Satze gelangt ist, dass die Zahlenreihe als eine continuirliche betrachtet werden kann, verlässt er auf kurze Zeit den aufsteigenden Gang von einer Operation zur nächst höheren und schaltet die Lehre von den algebraischen Gleichungen ersten Grades ein. Haarscharfe Systematiker werden dies wahrscheinlich tadeln und meinen, man müsse erst die Reihe der möglichen Operationen durchlaufen haben, ehe man sich um die Anwendungen derselben zur Ermittelung des Werthes unbekannter Zahlen (Auflösung der verschiedenen Gleichungen) kümmern dürfe; dies lässt sich gewiss vertheidigen, nicht minder gewiss dürfte aber sein, dass man beim Unterrichte wohl thut, nicht zu viel Theorie aufeinander zu häufen, sondern bei Zeiten seinen Schülern zu zeigen, was sich mit dem Bisherigen ausrichten lässt. So z. B. pflegt Referent nach der Entwickelung des ersten und zweiten Differentialquotienten die geometrischen Anwendungen derselben (Tangenten, Normalen etc.) einzuschalten, wodurch gelegentlich auch die nöthige Fertigkeit im Differenziren erworben wird, und dann erst die Lehre von den höheren Differentialquotienten vorzunehmen, obschon das wenig systematisch ist.

Nach Beendigung dieser Digression zur eigentlichen Theorie zurückkehrend, leitet der Verfasser die Potenz auf dieselbe Weise aus der Multiplication ab, wie diese aus der Addition entsprungen war, erhält also zunächst nur Potenzen mit ganzen positiven Exponenten und beliebiger

zur Seite stellen kann. Letztere haben ausser der ihnen an sich zukommenden Genauigkeit noch den Vortheil, dass aus der Operation selber auf den Grad der erreichten Präcision geschlossen werden, wozu bei barometrischen Messungen vor der Hand keine Anhaltepunkte existiren.

Experimentalphysik, ein Leitfaden bei Vorträgen, von Dr. G. v. Quintus Icilius, Lehrer an der polytechnischen Schule in Hannover. Hannover, Schmorl und v. Seefeld, 1855. 45 Bg. gr. 8.

Der Verfasser hat mit der Ausarbeitung dieses Buches zunächst seinen Schülern „einen Leitfaden zur Repetition, der sich den Vorträgen genau anschliesst," zu geben beabsichtigt; würde sich aber, wie er bemerkt, freuen, wenn der Anordnung und Ausführung desselben andere Lehrer beistimmen könnten und sich zur Einführung desselben bei ihren Schülern bewogen fühlten. Diese Freude möchte nun nach der Ansicht des Referenten dem Verfasser billiger oder gerechter Weise zu Theil werden, wenn sonst andere Umstände, die bei Einführung eines Lehrbuchs mit obwalten, nicht hindernd in den Weg treten. Das Buch gehört ohne Zweifel zu den besseren Werken dieser Art und hat, gegen viele andere gehalten, Vorzüge, die es einer allgemeineren Aufmerksamkeit und Empfehlung nicht unwürdig machen. Selbstverständlich müssen bei Beurtheilung dieses Leitfadens die Verhältnisse der Schule, an welcher der Verfasser wirkt, sowie der allgemeine Standpunkt der Schüler, für welche das Buch bestimmt ist, mit ins Auge gefasst werden. In Betreff dessen bemerkt der Verfasser, dass sein Bestreben vorzüglich darauf gerichtet gerichtet gewesen sei: „die physikalischen Lehren in ihrem Zusammenhange darzustellen und den Schülern eine Einsicht in die Methoden zu geben, nach welchen experimentelle Untersuchungen anzustellen sind" — oder, wie Referent nach der vorliegenden Ausführung die Absicht des Verfassers bezeichnen möchte, die Schüler in den Geist und das rein Wissenschaftliche des Experiments und der Beobachtung einzuführen. — Dadurch werden die Schüler gewöhnt, „die Resultate der Wissenschaft auch ihrem inneren Zusammenhange nach aufzufassen", was an technischen Anstalten, wo die Resultate und deren Anwendungen zu practischen Zwecken nicht selten auf Kosten strengerer Wissenschaftlichkeit mehr in den Vordergrund treten, für eine allgemeinere Ausbildung der Schüler von nicht unerheblichem Momente sein dürfte. Die mathematische Bildung, welche der Verfasser bei den meisten Schülern voraussetzen durfte, erlaubte ihm erforderlichen Falls „einen strengeren mathematischen Weg einzuschlagen (mit Ausschluss indess der Differenzial- und Integralrechnung), als ihn viele der verbreiteten physikalischen Lehrbücher verfolgen." Diese vortheilhaftere Stellung, welche damit der Verfasser bei Bearbeitung seines Werkes hatte, ist von ihm in der ersteren Hälfte desselben — ob absichtlich oder nicht, mag dahin gestellt sein — weniger wahrgenommen, als nach der Meinung des Referenten hätte geschehen können, dagegen in der anderen Hälfte (Optik, Elektricitätslehre) häufiger benutzt worden. Es ist zwar in der ersteren Hälfte eine mathematische Behandlungsweise des Stoffes nicht zu verkennen, auch bemisst Referent die Durchführung einer solchen Darstellung nicht nach der Menge und Länge der Formeln und Gleichungen, welche beim Aufschlagen des Buches in die

ler die Uebersichtlichkeit über das Ganze nicht zu rauben und dann auch auf die Festlegung und Begründung der Elemente die nöthige Zeit und Sorgfalt verwenden zu können. Dieser Gesichtspunkt darf jedesmal da um so weniger ausser Acht gelassen werden, wo der Unterricht in der Mathematik nicht lediglich als Mittel zu andern Zwecken dienen soll, sondern als obersten und höchsten Zweck den hat, im Verein mit den anderen Disciplinen des Unterrichts eine allgemeinere Ausbildung des Verstandes zu vermitteln. Dass auch an einer Cadettenanstalt die Mathematik um des letztbezeichneten Grundes willen mit in die Zahl der Unterrichtsgegenstände aufgenommen ist, darüber wird mit dem Verfasser wohl Jedermann einverstanden sein. Allein an welcher Bildungsanstalt überhaupt soll die Mathematik nicht den genannten Zweck erfüllen? Dem Referenten erscheinen demnach die hieraus abgeleiteten Ansichten über den Unterricht der Mathematik als so ganz allgemeine, selbstverständliche, mit der Natur des Gegenstandes so innig verknüpfte, im Uebrigen auch allgemein anerkannte Grundsätze, dass sich aus diesen eine besondere Darstellung des mathematischen Lehrstoffes, die nach Form oder nach Inhalt eigenthümlich zu nennen wäre, nicht ergeben kann. Man kann mit dem vom Verfasser in der Vorrede aufgestellten Satze, dass der mathematische Unterricht ein allgemein und formal-bildender auch an einer Cadettenanstalt sein solle, ganz einverstanden sein, ohne den Weg, welchen als diesem Zwecke ganz entsprechend der Verfasser bezeichnet, als den alleinigen und unfehlbar zum Ziele führenden anzusehen. Denn so viel auch hierbei auf die Natur und Beschaffenheit der übrigen Unterrichtsgegenstände ankommt, wenn die Ausdehnung des mathematischen Unterrichts bemessen werden soll, so muss doch jedenfalls eine ernstliche Selbstbeschäftigung mit den dahin gehörigen Gegenständen dem Schüler angesonnen oder zur Pflicht gemacht werden, soll der ganze Unterricht nicht grossentheils ein vergeblicher sein. Der mathematische Unterricht in den Lehrstunden kann daher immer von Seiten der Anstalt möglichst beschränkt, desto mehr muss aber die Beschäftigung der Schüler mit Mathemathik angeregt, befördert, verlangt und befohlen werden. Es ist jedoch eine starke Zumuthung für den Schüler, sich fortwährend blos mit einem magern Gerippe der betreffenden Disciplin, worauf vielleicht der eigentliche Unterricht zu beschränken ist, beschäftigen zu sollen, auch möchte das Maass der hieraus entspringenden allgemeinen Bildung für denselben nicht eben erheblich ausfallen. Sicherheit in den Elementen und Grundlinien einer Wissenschaft oder Sprache erhält man auch nicht durch fortwährende Wiederholung derselben nach einem vorgezeichneten Systeme, sondern durch wiederholte Anwendung derselben auf den weitern Ausbau dieser Grundbegriffe. Da den Schülern der bezeichneten Anstalten zu dieser anhaltenden Beschäftigung mit Mathematik ausser dem eingeführten Lehrbuche in der Regel keine andern Hülfsbücher in die Hände gegeben werden, so stellt es sich von selbst wünschenswerth heraus, dass in dem Lehrbuche dem eigentlichen für den Unterricht bestimmten Lehrstoffe sich noch andere in möglichst genauem Zusammenhange mit demselben stehende Theile anschliessen, welche für eine angemessene Selbstthätigkeit des Schülers berechnet sind. Ob also das Lehrbuch, welches an einer Cadettenanstalt oder ähnlichen Anstalt eingeführt werden soll, auf ein solches Minimum, wie der Verfasser meint, zu reduciren ist, darüber kann man wohl aus den angedeuteten Gründen anderer Meinung sein, wenn man auch andererseits wieder zugeben kann, dass der Verfasser die ihm vorliegenden

als vereinzelte Anwendung eines allgemeineren mechanischen Princips bezüglich der Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen da, das weder vorher noch später genugsam hervorgehoben ist. Wäre überhaupt auf die Natur der schwingenden Bewegung etwas näher eingegangen, die einfachste Art derselben genauer erörtert und an geeigneten Stellen hervorgehoben worden, dass die einfachsten Bedingungen, unter denen eine schwingende Bewegung entsteht, nicht immer einzig und allein vorliegen; so hätten manche dahin gehörige Erscheinungen eine durchsichtigere Erklärung gefunden, z. B. in §§. 47—50, insbesondere §. 112 und die wieder darauf gegründeten Erörterungen in §. 157.

Der Unterricht der Physik an Real- und polytechnischen Schulen und ein dafür bestimmter Leitfaden würde ferner den übrigen Disciplinen daselbst sehr nahe gestellt werden, wenn bei einem möglichst streng mathematischen Lehrgange desselben das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte, so oft es thunlich ist, als Ausgangspunkt der Deductionen gewählt würde; jenes fruchtbare Princip, das schon von Joh. Bernoulli (s. dessen Hydrodynamica) so glücklich angewendet in der theoretischen Bearbeitung der heutigen Technik wieder in allgemeinere Aufnahme gekommen ist, der Art, dass dasselbe einen Mittelpunkt für den Techniker bei Betrachtung fremder wie eigener Speculationen abgiebt. Steht demselben nun ebenfalls die Physik in ihren hauptsächlichsten Umrissen auf dieselbe Basis gebaut vor seinem Geiste, so wird er auch erforderlichen Falls die specielleren Lehren derselben, wenn sie ihm für practische Zwecke von besonderer Wichtigkeit werden, durch eigenes Studium leichter durchdringen und so verarbeiten können, wie er eben in der Schule bereits von den physikalischen Fundamenten an bis zum technischen Ausbau derselben die nöthige Anleitung erhalten hat. Wie bedeutsam und nützlich sich dieses Princip erweist, davon hat der Verfasser des besprochenen Leitfadens selbst in dem IV. Abschnitte (Optik) §. 138, Seite 330 eine Andeutung und in dem V. Abschnitte (Wärmelehre) ein recht überzeugendes und elegantes Beispiel gegeben. Die Erörterungen nämlich über die mechanische Arbeit des Dampfes und das Arbeitsäquivalent der Wärme (3. Cap.) bahnen daselbst ganz naturgemäss die Vorstellung von der Wärme als einem Bewegungszustande an und umgekehrt rechtfertigen später (4. Cap.) diejenigen Erscheinungen, welche diese Auffassung des Wärmebegriffes anderweitig unterstützen, die Anwendung desselben Princips bei allen Untersuchungen über die technische Verwerthung der Wärme.

Es lässt sich zwar gegen Alles dieses einwenden, dass an einer polytechnischen Schule neben dem Unterricht in der Physik derjenige in der mechanischen Naturlehre parallel oder vorausgehe, die gestellten Forderungen also z. Th. durch letzteren erfüllt werden können; allein einmal trifft und beseitigt dieser Einwand doch nicht die gemachten Ausstellungen in ihrem vollen Umfange, sodann aber würde, ersteres zugegeben, ein nur für die Verhältnisse dieser Schule geschriebenes Lehrbuch hinsichtlich seiner Verbreitung eigentlich in engere Grenzen verwiesen werden, als wir es bezüglich des vorliegenden wegen der übrigen trefflichen Eigenschaften und Vorzüge desselben wünschen möchten.

Schärfer tritt die Benutzung der Mathematik z. Th. mit Einschluss der reinen Mechanik in der zweiten Hälfte des Buches, namentlich in der Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus hervor. Die schönen, in den meisten Lehrbüchern noch nicht befindlichen, zum Theil von W. Weber

zen Zahlen durch eine beliebige Zahl interpolirt hat, führen den Namen Brüche oder gebrochene Zahlen. Sie werden absolute Brüche genannt, wenn die Zahlenreihe rückwärts mit der Null abbricht; dagegen algebraische Brüche, wenn die Zahlenreihe über Null auch nach der negativen Seite unbegrenzt fortgeht.“ Endlich kommt §. 83 die „Erklärung: Jeder absolute Bruch $\frac{a}{b}$ besteht aus einem Zähler a und einem Nenner b; der Zähler ist die absolute ganze Zahl, welche die Stelle anzeigt, die der Bruch in der interpolirten Zahlenreihe einnimmt; der Nenner ist die absolute ganze Zahl, welche anzeigt, in wie viele Theile man die Einheit der Zahlenreihe getheilt hat“, worauf noch 2 „Erklärungen“ (§§. 84 und 85), die uneigentlichen, so wie die ächten und unächten Brüche betreffend, folgen. Man muss gestehen, dem Schüler wird sehr viel „erklärt“, wie viel er davon versteht, ist aber wohl ohne weitere Auseinandersetzung leicht abzunehmen. Diese Bruchlehre bietet überhaupt mancherlei Eigenthümlichkeiten dar, von denen aber Referent der Meinung ist, dass sie eine schärfere Auffassung des Gegenstandes von Seiten des Schülers nicht eben zu befördern geeignet sind, z. B. der erste die Addition der Brüche betreffende Satz ist die „Aufgabe, zu einem gegebenen Bruche $\frac{a}{b}$ einen zweiten gegebenen Bruch $\frac{c}{d}$ zu addiren. Auflösung. Man suche den Bruch $\frac{a}{b}$ in der Zahlenreihe der $b$tel auf, und schreite von ihm in der Zahlenreihe um c solcher Theile der Einheit fort, wie sie die Zahlenreihe der $d$tel enthält. Derjenige Bruch, zu welchem man auf diese Weise gelangt, ist die gesuchte Summe.“ Es ist dem Referent nicht klar, welchen Nutzen für den Schüler diese Auffassung der bezeichneten Aufgabe haben soll. Dass übrigens das Lehrbuch nicht ganz „genau nicht mehr und nicht weniger enthält, als was in den Unterrichtsstunden vorgenommen werden soll“, beweist eine Vergleichung der gegebenen Lehrsätze, Aufgaben etc. mit den beigefügten Beispielen zur Uebung, von welchen manche dem Schüler, der nicht mehr Unterweisung in den Lehrstunden erhalten hat, als nach dem gegebenen Materiale abzunehmen ist, zu grosse Schwierigkeiten darbieten dürften. So ist auch für diese Beispiele in §. 32 und 33 nur der Begriff der Potenz, nicht aber die Multiplication und Division der Potenzen mit gleichen Grundzahlen vorläufig gegeben, letztere aber doch zur Ausrechnung von Beispielen vorausgesetzt worden. Sehr angemessen dagegen hat der Verfasser so zeitig, wie es nur thunlich war, die Auflösung der Gleichungen 1. Grades in den Lehrgang der allgemeinen Arithmetik eingesetzt und dadurch sein Lehrbuch dem Unterrichte, wie er doch wohl von jedem verständigen Lehrer in Wirklichkeit betrieben wird, als eine geeignetere Unterlage angepasst. — Der geometrische Theil ist im Allgemeinen in Euklideischer Weise durchgeführt, doch scheinen Referent manche Erklärungen und Darstellungen von dem Geiste der Alten etwas abzuweichen, z. B. die Definition §. 174. Von §. 187 und 188 sollten die Umkehrungen mit aufgeführt sein. — Sehr beachtenswerth ist der siebente Abschnitt, welcher die Verhältnisse und Proportionen unter Linien behandelt, insbesondere die Anordnung der betreffenden Sätze nach einer Eintheilung und Unterscheidung der Strahlensysteme mit parallelen Transversalen, unter welchem Titel die gewöhnlichen Sätze über Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren und Proportiona-

womit viele der neueren Lehrbücher in einem über das wahre Bedürfniss hinausgehenden Luxus versehen sind, wegbleiben und der Preis des ziemlich umfangreichen Buches im Verhältniss ermässigt werden. Es ist nicht zu leugnen, der in der neueren Zeit Mode gewordene Luxus in der Ausstattung durch perspectivische Abbildungen von Apparaten und Maschinen ist nicht selten zur Bestechung des kaufenden Publikums angebracht und verdeckt eine gewisse Armseligkeit und Unwissenschaftlichkeit des übrigen Inhaltes, und man ist daher verpflichtet, Demjenigen, welcher dieser Unsitte entgegen und mit einer der wahren Wissenschaft besser entsprechenden Einfachheit wieder vorantritt, die gebührende Anerkennung nicht zu versagen. Nur in einem Punkte scheint mir der Verfasser des Leitfadens etwas zu sparsam gewesen zu sein, mit denjenigen graphischen Darstellungen nämlich, welche zur Erläuterung und Erleichterung des Verständnisses rein wissenschaftlicher Erörterungen dienen können. Sowie in der allgemeinen Analysis oft geometrische Einkleidungen der Sätze zum klaren Verständnisse führen, obgleich streng genommen die Allgemeinheit beeinträchtigt wird, so mag man es in der Physik noch weniger verschmähen, die Auffassung der den Erscheinungen unterliegenden Verhältnisse thunlichst durch graphische Darstellungen zu erleichtern. Wenn dadurch mittelbar gewisse Beschränkungen einer allgemeineren Giltigkeit hervorgerufen werden, so lassen sich dieselben durch entsprechende Bemerkungen leicht wieder aufheben; dagegen kann die Vorstellung von den betreffenden physikalischen Beziehungen um so leichter in der nöthigen Allgemeinheit entwickelt werden, je bestimmter und klarer sich davon eine, wenn auch vorläufig beschränkte, Grundansicht gebildet hat. So würden an mehreren Stellen, insbesondere des 1., (2.) 3. und 4. Abschnittes (Schwere, Schall, Licht) graphische Erläuterungen viel zum besseren Verständniss beigetragen haben. Die Erwägung, ob für diesen oder jenen Gegenstand eine Figur beizugeben ist oder nicht, muss nicht von der grösseren oder geringeren Leichtigkeit, womit sich derselbe ohne Hilfe einer Figur behandeln lässt, sondern von dem vorausgesetzten mittleren Auffassungsvermögen der Schüler abhängig gemacht werden. Dazu kommt, dass beim mündlichen Vortrage dergleichen graphische Erläuterungen kaum zu entbehren sind, um die Aufmerksamkeit einer grösseren Anzahl von Schülern für eine vielleicht länger oder abstracter geführte Deduction zu fixiren. Ist nun die erforderliche Zeichnung etwas zusammengesetzt, so gewinnt man mit dem einfachen Hinweis auf die dem Leitfaden beigedruckte Figur eine nicht unerhebliche Zeitersparniss. Eine Unterstützung ferner des Vorstellungsvermögens oder des Gedächtnisses durch einfache charakteristische Linearfiguren ist gewiss nicht zu verwerfen und leistet noch keineswegs einer unwissenschaftlichen Flachheit und Hohlheit Vorschub, wie man von den jetzt häufig vorkommenden physikalischen Bilderbüchern befürchten muss. Endlich ist man zur Beobachtung einer gewissen Gleichmässigkeit in der Darstellungsweise gehalten, Schülern, denen man beispielsweise die einfachste Zusammensetzung der Bewegungen und Kräfte mit einiger Umständlichkeit zu erörtern für nöthig findet, andere Partien der Physik nicht ungleich schwieriger für die Auffassung und das Verständniss hinzustellen. In dieser Hinsicht scheinen z. B. die auch anderweitig sehr empfehlenswerthen „Anfangsgründe der Physik" von A. v. Ettingshausen, in denen gleichfalls weitläufige Beschreibungen und kostspielige Abbildungen von Apparaten vermieden sind, die gehörige Mitte zu halten.

Der Styl des Verfassers ist im Ganzen ein einfacher, correcter und dem Gegenstande angemessener. Nur sehr wenige Stellen sind in Betreff dessen Referenten auffällig erschienen, z. B. §. 75, S. 128, wo, beinahe wie in einem *lege artis* abgefassten Urthel, mit den Worten: „Ist alsdann der verschliessbare Schenkel etc." ein Vordersatz von 11 Zeilen ziemlich compressen Drucks beginnt, dem ein Nachsatz von etwas über 1 Zeile folgt. Ebenso möchte ein Satz, wie in §. 156, S. 324, „Hinsichtlich der Einwirkung des etc. auf ... auf ... auf ... so dass ... so dass etc." einem Schüler nicht eben als ein Muster der Construction dienen.

Jeder, der mehrere der vorhandenen Lehrbücher der Physik aufmerksamer durchlesen, mit einander verglichen und ihre verschiedenartigen Mängel erkannt hat, wird ohne längere Auseinandersetzung finden, dass die bemerkten Ausstellungen im Einzelnen wie insgesammt, noch nicht von so erheblicher Natur sind, um den allgemeinen Werth vorliegenden Buches wesentlich zu beeinträchtigen. Vielmehr bilden nach Abzug dieser Unvollkommenheiten schon die oben gleichzeitig mit namhaft gemachten vorzüglichen Eigenschaften dieses ausführlicher bearbeiteten Leitfadens eine Summe, welche denselben aller Empfehlung würdig machen. In demselben Verhältnisse werden auch noch die folgenden Bemerkungen, resp. Ausstellungen, bezüglich einiger Stellen zur Beurtheilung des Ganzen stehen, welche an die Angabe des Inhalts der einzelnen Abschnitte und Kapitel geknüpft werden sollen. Die Erwähnung derselben mag als Beweis dienen, dass auch dies günstigere Urtheil des Referenten sich auf eine genauere Einsicht des Buches stützt und nicht blos auf eine flüchtige Durchlesung der Vorrede und des Inhaltsverzeichnisses gegründet ist.

I. Abschnitt, von der Schwere in 3 Kapiteln: 1) vom Falle der Körper, 2) von den drehenden Bewegungen, 3) von der Verschiedenheit der Schwere an verschiedenen Punkten der Erde und der allgemeinen Gravitation. — Indem der Verfasser von den einfachen Erscheinungen des Falles als Ursache die Schwerkraft angiebt, sowie den Grad des Fallbestrebens eines Körpers als dessen Gewicht bezeichnet, geht er etwas zu unmerklich auf den allgemeinen Begriff der Kraft über und entwickelt den der Trägheit, ohne eine Bemerkung über das Verhältniss der speciellen Schwerkraft zur Kraft überhaupt mit einfliessen zu lassen. Die Unterlassung solcher Erörterungen kann leicht zu Unklarheiten führen, indem z. B. der Begriff der Trägheit als nur durch die Erscheinungen der Schwere hervorgerufen und bedingt angesehen werden könnte. Diese etwas zu enge Begriffsbestimmung giebt später (§. 7) bei der Erklärung von Masse Veranlassung zu Bemerkungen, deren Verständniss dem Schüler nicht zugehen wird, wenn er es nicht schon anderweitig besitzt; z. B. S. 14: „Nun wirken in unserem früheren Versuche etc.", wo im Grunde eine Untermengung der allgemeinen Kraft und der besonderen Schwerkraft, der allgemeinen beschleunigenden Kraft und der durch die Schwere hervorgerufenen nicht vermieden ist. Daher sieht sich der Verfasser noch genöthigt, mit den Worten: „Eigentlich haben wir unter Q etc." nochmals auf den Unterschied der ponderabelen und trägen Materie erläuternd zurückzukommen, wobei nur nicht klar hervortritt, wie derselbe aus dem Vorhergehenden sich ergiebt. — Unter den Gesetzen bezüglich der schiefen Ebene (§. 14) ist das Verhältniss der horizontalen und vertikalen Componente nicht mit ausgeführt, welches bei Anwendungen der schiefen Ebene als sogenannter einfacher Maschine (z. B. bei der Schraube) gleich-

falls mit zu berücksichtigen ist. — In §. 33 u. f. wird beim Uebergange von der Schwere zur allgemeinen Gravitation Newton's Gesetz erst hypothetisch aufgestellt und dann dessen Giltigkeit durch Ergebnisse bei Pendelversuchen, sowie an der Bewegung des Mondes nachgewiesen. Das Attractionsgesetz als eine unmittelbar sich ergebende, naturgemässe Hypothese zur Erklärung der an verschiedenen Punkten der Erde beobachteten verschiedenen Schwere hinzustellen, ist nicht recht gelungen. Die Unabhängigkeit der Fallgesetze von der materiellen Verschiedenheit der fallenden Körper, die Zusammensetzung der Erde, soweit wir sie kennen, aus den mannigfaltigsten Stoffen würden die Vermuthung näher legen, dass alle materiellen Theilchen mit Anziehungskraft versehen sind und somit jeder Körper im Verhältniss seiner Masse diese Kraft ausübt. Dass die Anziehung zum Quadrat der Entfernung der Massen im umgekehrten Verhältniss steht, liesse sich aus der Betrachtung dieser Kraft als einer von der anziehenden Masse ausgehenden und nach allen Seiten sich verbreitenden, somit im Verhältniss von Kugeloberflächen veränderlichen, ableiten. Hierauf könnten die Einwirkungen einer homogenen oder aus homogenen Schichten zusammengesetzten Kugel auf ein innerhalb oder ausserhalb derselben befindliches Massentheilchen erörtert werden, woran sich dann die Ergebnisse der directen Versuche von Cavendish und Reich, die Untersuchungen bezüglich der Abplattung der Erde etc., sowie die Beziehungen der Attractionsgesetze zu den Kepler'schen leicht anknüpfen lassen. Gegen einen Schluss aber, wie (S. 56) „da das Gewicht eines Körpers" (d. h. der Grad seines Fallbestrebens, §. 1—3) „seiner Masse proportional ist, so ist es wahrscheinlich, dass auch jeder Punkt der Erde eine Anziehung ausübt, welche seiner Masse proportional ist", möchte viel einzuwenden sein.

II. Abschnitt, von den Aggregatzuständen der Körper in 3 Kapiteln: 1) von den festen, 2) von den tropfbar flüssigen, 3) von den gasförmigen Körpern.— Gründlich und möglichst vollständig sind im 1. Kap. die Gesetze der Elasticität und der Schwingungen erörtert, es würde aber, wie schon bemerkt, eine Betrachtung der Schwingungsbewegungen überhaupt dem Ganzen mehr Einheit und Abrundung gegeben haben. — Die in §. 56 gegebene Eintheilung der Reibung in gleitende, Zapfenreibung und rollende, sowie die Angabe der Unterscheidungsmerkmale dieser Arten ist nicht ganz richtig. Die Zapfenreibung ist eine besondere Art der gleitenden und bei beiden wechseln die Berührungspunkte nur an einem Körper, während dieselben bei der rollenden an beiden Körpern verändert werden. — In §. 68 wird als Hauptursache der Contraction des Wasserstrahls bis zu $\frac{2}{3}$ der Oeffnung' die Zunahme der Fallgeschwindigkeit (in Verbindung mit der Cohäsion) der einzelnen Wassertheilchen des zusammenhängenden Strahles angegeben. Dieselbe kann aber innerhalb der so kurzen Entfernung des Contractionsmaximums von der Oeffnung jene Erscheinung nicht allein hervorbringen (vergl. diese Zeitschrift, S. 42). — Ebenda (S. 117) hätte vielleicht der übrigen Haltung des Buches gemäss die Ausflussgeschwindigkeit $\sqrt{2gH}$ aus der vertikalen Sprunghöhe oder der horizontalen Sprungweite abgenommen und dann durch theoretische Betrachtungen unterstützt werden können, statt dass der umgekehrte Gang eingeschlagen worden ist.

III. Abschnitt, vom Schalle, in 2 Kapiteln, 1) von der Erregung, 2) von der Ausbreitung und Wahrnehmung desselben.—Wie schon bemerkt würde in §. 112 beim Hinweis auf die Ursachen der Klangverschiedenheiten

Augen fallen; wohl aber möchte man eine durchgängige Unterlegung der reinen Mechanik und ihrer Hauptprincipien erwarten, so dass die einzelnen Theile der Physik viel sichtlicher als Anwendungen derselben auf die verschiedenen Kräfte sich herausstellen. Die Beobachtungen in der Natur oder am Experiment würden dann entweder inductiv auf schon bekannte Sätze der reinen Mechanik führen, oder bei analytisch-demonstrativem Gange die Anwendung derselben rechtfertigen: eine Darstellungsweise, wie sie der Verfasser z. B. im 3. Capitel des I. Abschnitts §. 31—34 zum Theil auch eingehalten hat. Dass nicht alle Partien der Physik sich in dieser Art und gleich gut behandeln lassen, auch einige derselben nach ihrem jetzigen Standpunkte mehr als elementare Kenntnisse der Mathematik in Anspruch nehmen, ist zwar wahr, doch kein durchschlagender Einwand dagegen. Versucht möchte doch dieser Weg werden, soweit als es mit Berücksichtigung anderer Hauptmomente nur möglich ist. Dabei könnten die Hauptlehren der allgemeinen Mechanik als bekannt vorausgesetzt, oder was einer allgemeineren Verbreitung des Lehrbuchs günstiger sein dürfte, in den Lehrgang mit eingeflochten werden. Für manche Punkte der erwähnten Abschnitte wäre dann sowohl eine schärfere Fassung gewonnen worden, als auch der innere Zusammenhang mehr hervorgetreten. Ich erwähne beispielsweise zuerst die Wurfbewegung (§. 16), welche unter einigermaassen erzwungenem Uebergange (s. unten) sich an die Bewegung auf der schiefen Ebene mit der Bemerkung anschliesst, dass „ausser dem eben betrachteten Falle eines Körpers auf der schiefen Ebene es häufig in der Natur vorkomme, dass ein Körper in einer anderen als senkrechten Richtung falle“. Die Bedingungen der krummlinigen Wurfbewegung und der auf der schiefen Ebene sind aber doch etwas verschiedener, als nach dieser Einleitung und der darauf folgenden Darstellung es erscheint. Bei den auf die schiefe Ebene bezüglichen Gesetzen hat der Verfasser es für nöthig gehalten, auf die Zusammensetzung und Zerlegung zweier Bewegungen und ihrer zugehörigen Kräfte besonders einzugehen. Dass aber die Bedingungen, unter welchen eine geradlinige oder krummlinige Bewegung aus mehreren anderen geradlinigen oder krummlinigen resultirt, nicht näher angegeben und erörtert sind, oder bei der Wurfbewegung nicht wenigstens soweit, als es diese betrifft, darauf hingewiesen ist, glaubt Referent nicht rechtfertigen zu können. Die Folgen der Umgehung solcher allgemeinen phoronomischen Betrachtungen treten auch später noch anderweitig hervor. So erscheint es nicht empfehlenswerth, eine Formel, z. B. die für den Ablenkungswinkel eines Pendels, als eine Funktion der Zeit (§. 26) ohne Weiteres hinzustellen, und dann deren Zulässigkeit unter gewissen, für den Schüler nicht ohne Weiteres erklärlichen Voraussetzungen mit einem ziemlichen Apparat von Rechnung nachzuweisen, statt die Formel aus den gegebenen Bedingungen nach den Gesetzen der reinen Mechanik zu entwickeln. Solche künstliche Umwege werden jedenfalls den Schüler mehr oder minder verblüffen und zu einer klaren Durchdringung der einschlagenden Verhältnisse wenigstens nicht auf dem kürzesten Wege hinführen. Der dort eingehaltene Weg möchte nur dann als zulässig erscheinen, wenn mehr als elementare Hilfsmittel in Anspruch genommen werden müssten. Etwas Aehnliches gilt von der Zusammensetzung und Zerlegung schwingender Bewegungen (vergl. §. 162, 170 u. a.). In §. 162 hat der Verfasser zwar die Entstehung elliptischer Schwingungen direct nachgewiesen, doch steht diese Entwickelung

als vereinzelte Anwendung eines allgemeineren mechanischen Princips bezüglich der Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen da, das weder vorher noch später genugsam hervorgehoben ist. Wäre überhaupt auf die Natur der schwingenden Bewegung etwas näher eingegangen, die einfachste Art derselben genauer erörtert und an geeigneten Stellen hervorgehoben worden, dass die einfachsten Bedingungen, unter denen eine schwingende Bewegung entsteht, nicht immer einzig und allein vorliegen; so hätten manche dahin gehörige Erscheinungen eine durchsichtigere Erklärung gefunden, z. B. in §§. 47—50, insbesondere §. 112 und die wieder darauf gegründeten Erörterungen in §. 157.

Der Unterricht der Physik an Real- und polytechnischen Schulen und ein dafür bestimmter Leitfaden würde ferner den übrigen Disciplinen daselbst sehr nahe gestellt werden, wenn bei einem möglichst streng mathematischen Lehrgange desselben das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte, so oft es thunlich ist, als Ausgangspunkt der Deductionen gewählt würde; jenes fruchtbare Princip, das schon von Joh. Bernoulli (s. dessen Hydrodynamica) so glücklich angewendet in der theoretischen Bearbeitung der heutigen Technik wieder in allgemeinere Aufnahme gekommen ist, der Art, dass dasselbe einen Mittelpunkt für den Techniker bei Betrachtung fremder wie eigener Speculationen abgiebt. Steht demselben nun ebenfalls die Physik in ihren hauptsächlichsten Umrissen auf dieselbe Basis gebaut vor seinem Geiste, so wird er auch erforderlichen Falls die specielleren Lehren derselben, wenn sie ihm für practische Zwecke von besonderer Wichtigkeit werden, durch eigenes Studium leichter durchdringen und so verarbeiten können, wie er eben in der Schule bereits von den physikalischen Fundamenten an bis zum technischen Ausbau derselben die nöthige Anleitung erhalten hat. Wie bedeutsam und nützlich sich dieses Princip erweist, davon hat der Verfasser des besprochenen Leitfadens selbst in dem IV. Abschnitte (Optik) §. 138, Seite 330 eine Andeutung und in dem V. Abschnitte (Wärmelehre) ein recht überzeugendes und elegantes Beispiel gegeben. Die Erörterungen nämlich über die mechanische Arbeit des Dampfes und das Arbeitsäquivalent der Wärme (3. Cap.) bahnen daselbst ganz naturgemäss die Vorstellung von der Wärme als einem Bewegungszustande an und umgekehrt rechtfertigen später (4. Cap.) diejenigen Erscheinungen, welche diese Auffassung des Wärmebegriffes anderweitig unterstützen, die Anwendung desselben Princips bei allen Untersuchungen über die technische Verwerthung der Wärme.

Es lässt sich zwar gegen Alles dieses einwenden, dass an einer polytechnischen Schule neben dem Unterricht in der Physik derjenige in der mechanischen Naturlehre parallel oder vorausgehe, die gestellten Forderungen also z. Th. durch letzteren erfüllt werden können; allein einmal trifft und beseitigt dieser Einwand doch nicht die gemachten Ausstellungen in ihrem vollen Umfange, sodann aber würde, ersteres zugegeben, ein nur für die Verhältnisse dieser Schule geschriebenes Lehrbuch hinsichtlich seiner Verbreitung eigentlich in engere Grenzen verwiesen werden, als wir es bezüglich des vorliegenden wegen der übrigen trefflichen Eigenschaften und Vorzüge desselben wünschen möchten.

Schärfer tritt die Benutzung der Mathematik z. Th. mit Einschluss der reinen Mechanik in der zweiten Hälfte des Buches, namentlich in der Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus hervor. Die schönen, in den *meisten* Lehrbüchern noch nicht befindlichen, zum Theil von W. Weber

gehorchen den allgemeinen mechanischen Gesetzen des Gleichgewichtes und der Bewegung. Die letzten Atome sind entweder an sich unzerstörbar oder es sind wenigstens im Bereiche der Physik und Chemie keine Mittel gegeben, sie zu zerstören und liegen keine Gründe vor, eine je eintretende Zerstörung oder Verflüchtigung derselben anzunehmen. Von diesen letzten Atomen vereinigen sich im Gebiete des Wägbaren mehr oder weniger zu kleinen Gruppen (Moleculen), die weiter von einander entfernt sind als die Atome jeder Gruppe für sich. Vom Abstande der letzten Atome ist nur so viel gewiss, dass er sehr gross im Verhältniss zu den Dimensionen der betreffenden Atome ist. Von den absoluten Dimensionen der Atome, ja ob die letzten Atome angebbare Dimensionen haben, ist nichts bekannt; den Moleculen kann eine bestimmte Gestalt als Umriss der von ihnen befassten Gruppe beigelegt werden, von der Gestalt der letzten Atome ist nichts bekannt. Die Kräfte der Atome sind theils anziehender, theils abstossender Natur (nach *Poisson* ziehen sich die wägbaren Atome gegenseitig an und stossen sich die Aetheratome ab, während zwischen einem wägbaren und einem Aetheratome Anziehung stattfindet); sie auf blos anziehende zurückzuführen, ist noch nicht geglückt. Sie wirken nach Functionen der Distanz der Theilchen, das genaue Gesetz der Kräfte ist nicht bekannt."

Diese Ansicht vertheidigt der Verfasser in der ersten Hälfte seines Werkes vom Standpunkte der Experimentalphysik aus und zwar im Allgemeinen auf die Weise, dass er verschiedene physikalische Erscheinungen, wie z. B. Lichtbrechung, Wärmebewegung etc. hervorhebt, die sich durch die dynamische Vorstellung einer stetigen Raumerfüllung weniger leicht und vollständig als durch obige Voraussetzungen erklären lassen. Obschon nun der Verfasser seine Beispiele meistens glücklich wählt und mit vielem Geschick behandelt, so muss doch Referent gestehen, dass er trotzdem die überzeugende Beweiskraft nicht recht finden kann. Es liegt dies hauptsächlich an der Art des Beweises. Die dynamische Ansicht besteht zur Zeit nur aus einer e i n z i g e n Hypothese und ist überhaupt noch sehr wenig ausgebildet; die atomistische Ansicht dagegen enthält mindestens s e c h s verschiedene Hypothesen (in der *Poisson*'schen Lehre stecken allein zwei Hypothesen, die Wirkung der Aetheratome unter sich und auf wägbare Atome betreffend), was Wunder also, wenn man mit einem halben Dutzend combinirter Hypothesen, sobald sie nur einigermaassen glücklich gegriffen sind, mehr erklären kann als mit einer; liesse sich doch auch eine Planetenbahn durch sechs gut gewählte Epicykeln mit ansehnlicher Genauigkeit darstellen. Will man aber einmal auf die Weisse streiten, dass der Eine zeigt, was er kann, und dem Andern das zum Vorwurfe macht, was letzterer nicht kann, so giebt es auch mancherlei Thatsachen, mit denen die Atomistik schwer fertig werden möchte. Die Mechanik z. B. berechnet die Anziehung einer Kugel auf einen Punkt unter der Voraussetzung, dass die anziehende Masse in der Kugel stetig vertheilt sei; das Resultat stimmt mit der Erfahrung, sollte ihr aber widersprechen, wenn die Atomistik Recht hat. Schon *Poisson* fühlte diese Discrepanz und versuchte eine Erklärung, bei der sich auch unser Verfasser beruhigt; aber gerade diese Erklärung ist an sich unglücklich und widerspricht ausserdem noch den oben erwähnten Grundzügen der Atomistik. Zuerst macht nämlich *Poisson* (Mechanik, I. §. 98) eine doppelte Distinction, er unterscheidet unendlich kleine Grössen (Differentiale) von endlichen Grössen und theilt letztere wieder in sensible und insensible, was für einen Mathematiker eine ganz haarsträu-

bende Vorstellung ist, ausserdem aber sagt er cavalièrement, die Zwischenräume zwischen den Moleculen seien so klein, dass man sie vernachlässigen könne. Hier steckt nun der Widerspruch. Denken wir uns, um ein den Atomistikern sehr geläufiges Bild zu gebrauchen, das Atom als einen Planeten und das Molecul als ein Planetensystem, so entspricht dem Körper eine Gruppe von Planetensystemen eine sogenannte Sterneninsel. Die Anziehung derselben auf einen ausserhalb liegenden Punkt würde jedenfalls millionenfach grösser werden, wenn man die ungeheuren leeren Zwischenräume dieses Complexes mit Masse stetig erfüllte, und da die Mechanik die letztere Voraussetzung macht, so müssten ihre Resultate viel zu gross ausfallen, aber trotzdem sind und bleiben die Störungsrechnungen richtig. Will man dagegen mit *Poisson* die Zwischenräume für unbedeutend erklären, so verliert die atomistische Ansicht gerade ihre Hauptstütze. — Beispiele dieser Art, wie sie die Mechanik des Himmels in Menge liefert, sind jedenfalls nicht so ohne Weiteres zu ignoriren.

Was der Verfasser gegen die Philosophen sagt, scheint dem Referent von keiner Bedeutung zu sein. Dass mit den Philosophemen von *Schelling, Hegel & Comp.* in der Physik nichts auszurichten ist, wissen die Naturforscher sattsam, und daher war die Polemik gegen jene überflüssig; der Verfasser hätte sich lieber an die wenigen Philosophen wenden sollen, denen gründliche mathematische und physikalische Kenntnisse zu Gebote standen, wie z. B. Altvater *Kant* und sein treuer Schüler *Fries*. Wir hätten wenigstens geglaubt, dass der Urheber der fälschlich nach *Laplace* benannten Entstehungshypothese unseres Sonnensystemes, und der erste Entdecker des *Dove*'schen Gesetzes der Windesdrehung Berücksichtigung verdient hätte. Möglich und zum Theil wahrscheinlich, dass des Verfassers Ansichten hierbei manche Modification erlitten haben würden, gewiss wenigstens, dass der Verfasser nicht allen Philosophen die *Schelling*'sche Idee, aus blossen Kräften ohne Substrat die Materie construiren zu wollen, zugeschrieben hätte.

So gern man den klaren Betrachtungen im ersten Theile des *Fechner*'schen Werkes, wenn sie auch nicht durchgängige und vollständige Befriedigung erwecken, folgen wird, so wenig dürfte der zweite Theil geeignet sein, sich viele Freunde zu gewinnen. Die Anhänger der *Kant*'schen Philosophie können die Resultate der *Fechner*'schen Speculation kurz mit den Worten bezeichnen, dass der Verfasser in der alten Antinomie des Einfachen und Stetigen befangen geblieben ist, ohne die von *Kant* darüber gegebene Lehre zu beachten; die *Schellingianer* und *Hegelianer* werden eine von der handgreiflichen Erfahrung ausgehende Betrachtung für flach und nicht philosophisch tief genug erklären (was freilich für jeden Anderen kein Tadel ist), aber auch die exacten Naturforscher werden sich wohl schwerlich mit des Verfassers Idee befreunden. Der Verfasser giebt nämlich selber zu, dass eine philosophische Auffassung nicht bei den Atomen als kleinen ausgedehnten Massen stehen bleiben darf, dass letztere nicht das philosophisch Letzte sein können; nun bleibt aber nur zweierlei übrig. Entweder geht man zur continuirlichen Raumerfüllung und damit ins Lager der Dynamiker über, oder man treibt die discontinuirliche Massenvertheilung auf die Spitze und reducirt die Atome auf blosse Punkte. Das Erste mag der Verfasser nicht, theils weil er im ersten Abschnitte die stetige Raumerfüllung widerlegt zu haben glaubt, theils weil ihn fortwährend die grundfalsche Erinnerung genirt, dass alle Dynamiker die Materie aus Kräften construirten (wogegen man im Interesse *Kants* und seiner Schüler nicht ge-

nug protestiren kann) und so bleibt nur der zweite Weg übrig. Damit geräth der Verfasser auf eine Monadologie, welche die Materie aus blossen Kraftmittelpunkten zusammensetzt. Dies scheint dem Referenten eine noch weniger denkbare Vorstellung; haben jene Punkte irgend eine Ausdehnung im Raume, so sind sie kleine Massenpartikel, d. h. Atome im gewöhnlichen Sinne, und dann wäre nichts gewonnen; haben sie keine Ausdehnung (und das ist wohl die Meinung des Verfassers), so sind sie mathematische Punkte im strengen Sinne des Wortes, dann hat man aber auch allen und jeden materiellen Inhalt heraussublimirt und es sind nur noch Kräfte übrig, welche an bestimmten Stellen im Raume wirken. Dadurch entsteht eine eigenthümliche Schwierigkeit. Die Punkte des mathematischen leeren Raumes sind völlig gleichgültig gegeneinander, d. h. kein Punkt hat vor dem anderen irgend etwas Besonderes voraus, wie kommen nun die Kräfte dazu, sich gerade hier und da niederzulassen, sich gerade so und nicht anders zu localisiren? Wenn ferner die Materie aus mathematischen Punkten und Kräften construirt wird, so verfällt man streng genommen doch wieder in dieselbe Unbegreiflichkeit, die man der *Schelling*'schen Hypothese mit Recht vorgeworfen hat; das Unbegreifliche lag darin, dass der Philosoph von Contrahiren und Expandiren sprach, während gar nichts da war, was expandirt oder contrahirt werden konnte, dieses Etwas sollte eben durch die im Leeren herumarbeitenden Kräfte entstehen; dies ist aber bei der *Fechner*'schen Ansicht ganz ebenso oder vielmehr in noch höherem Grade der Fall, weil jene Kräfte aus unbekannten Gründen an bestimmte Punkte gebunden sind. — Endlich erhebt sich noch eine Schwierigkeit für die mathematische Physik. Bei der gegenwärtigen Behandlungsweise unterscheidet man die leere Form (den mathematischen Körper) von seinem materiellen Inhalte; das Verhältniss der Masse zu dem Volumen giebt die Dichtigkeit, und wenn später noch Kräfte in Rechnung kommen, so werden diese als der Masse inhärirend und ihr proportional betrachtet; alle diese einfachen Vorstellungen müssen nach der *Fechner*'schen Ansicht geändert werden. Was ist z. B. Dichtigkeit, Maas der anziehenden Kraft etc.? wir wollen nicht leugnen, dass dafür neue Definitionen gegeben werden könnten, aber damit allein ist noch nichts gewonnen, sobald die fraglichen Definitionen die Anwendung des Calcüls nicht ebenso leicht gestatten, wie die bisherigen. Der Verfasser berührt zwar hie und da diese Punkte, erwähnt auch, dass künftig rein aufgehende Summen an die Stelle der Integrale treten müssten, aber das sind nur Vorschläge und es würde, wenn die Theorie der Kraftcentra Anwendung finden und nicht eine müssige Hypothese bleiben soll, jedenfalls nöthig sein, die nothwendigen Modificationen des Calcüls thatsächlich an einigen Beispielen nachzuweisen. So lange dies nicht geschieht, bleibt jene Lehre für den mathematischen Physiker eine Ansicht, welche für seine Speculationen noch keine praktische Bedeutsamkeit erlangt hat.

Aus diesen Bemerkungen zusammen dürfte mit Sicherheit wenigstens so viel hervorgehen, dass die vom Verfasser versuchte philosophische Vollendung der Atomistik noch mancherlei Zweifel gestattet und dass überhaupt die Acten in dieser Angelegenheit noch lange nicht geschlossen sind; zu wünschen wäre aber, dass auch von der entgegengesetzten Seite her so viel Fleiss auf die Begründung der dynamischen Ansicht, wie sie besonders *Fries* und dessen genialer Schüler *Schleiden* aufzufassen pflegen, verwandt werden möge, als es hier im Interesse der Atomistik geschehen ist.

O. Schlömilch.

Bibliographie
vom 1. October bis 31. December 1855.

Reine und angewandte Mathematik.

WEISSENBORN, Dr. Herm. Die cyclischen Curven. Mit 7 lithograph. Tafeln. VIII u. 318 S. Eisenach, Bärecke. 1856. 1½ Thlr.

BERNOULLI, J. A. Vademecum des Mechanikers. Achte, von AUTENHEIMER umgearbeitete Auflage. Stuttgart, Cotta. 1⅓ Thlr.

BERKHAN, Oberlehrer, Lehrbuch der unbestimmten Analytik für höhere Lehranstalten. 1. Abthlg., auch unter dem Titel: „die Auflösung der Diophantischen Gleichungen ersten Grades". VIII u. 212 S. Halle, Schmidt. netto 1⅙ Thlr.

DROBISCH, M. W., Nachträge zur Theorie der musikalischen Tonverhältnisse. Aus den Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der K. Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig. 40 S. Leipzig, Hirzel. netto 12 Ngr.

FORT und SCHLÖMILCH, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 Th., mit in den Text gedr. Holzschnitten. Leipzig, B. G. Teubner. 2½ Thlr.

FRANZ, Rector, die Raumlehre, mit Rücksicht auf die preuss. Regulative für Volksschulen behandelt. Berlin, Wiegandt u. Grieben. n. 12½ Sgr.

ROGNER, Prof. Joh. Bemerkungen zur Zahlenlehre. Allgemeine Eigenschaften der Theilbarkeit der Zahlen in Beziehung auf beliebige Zahlensysteme. Aus dem Jahresberichte der Oberrealschule zu Gratz abgedr. Gratz, Hesse. netto ⅓ Thlr.

SITZUNGSBERICHTE der Kaiserl. Academie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturwissensch. Classe. Bd. XVII. Jahrgang 1855. 1. Heft. Wien, Braumüller. netto 1⅓ Thlr.

FISCHER, Dr., Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. XII u. 311 S. mit 10 lithogr. Tafeln. Darmstadt, Kern. netto 2 Thlr.

KÜLP, Prof. Dr. Die Differential- und Integralrechnung und deren Anwendung auf die Geometrie. 4. Abthlg. Darmstadt, Leske. netto 1 Thlr. compl. 3⅙ Thlr.

BERICHTE über die Verhandlungen der K. Gesellsch. der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-physik. Classe. Jahrgang 1855. 1. Heft. Leipzig, Hirzel. netto ⅙ Thlr.

DAVIDS, Leitfaden zum Unterrichte in der Geometrie. Cursus I., enthaltend: Ebene Geometrie, Stereometrie und Kegelschnitte. Altona, Hestermann in Commiss. netto 16½ Ngr.

KAUFMANN, Prof. Lehrbuch der ebenen Geometrie. 3. Auflage. Stuttgart, Becher. ¾ Thlr.

— — Lehrbuch der Stereometrie. 3. Aufl. ebendas. ¾ Thlr.

OHM, Prof. Dr. Uebungen in der Integralrechnung. XII u. 257 S. mit 1 lithogr. Tafel. Nürnberg, Korn. 1856. 2 Thlr.

BURG, Reg.-Rath u. Prof., Compendium der Mechanik und Maschinenlehre. 3. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. netto 6 Thlr.

ENGEL und SCHELLBACH, Darstellende Optik. 3. Lief. Halle, Schmidt. 2⅔ Thlr. compl. 8 Thlr.

HENSCHEL, Oberbergrath a. D. Das bequemste Maass- und Gewichtssystem. Cassel, Bertram. netto ¼ Thlr.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Academie der Wissenschaften zu Wien. Math.-phys. Classe. Bd. XVII. Jahrgang 1855. 2. Heft. Wien, Braumüller. netto 2 Thlr.

Rühlmann, Prof. Dr. Logarithmische, trigonometrische und andere Tafeln. 5. Aufl. Leipzig, Arnold. netto 16 Ngr.

Weisbach, Prof. Jul. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 3. Aufl. 1. bis 3. Lief. Braunschweig, Vieweg. n. 1⅓ Thlr.

Darapsky, Hauptm. Ebene Trigonometrie und ihre Anwendung auf Kriegswissenschaft. VII u. 248 S. mit 3 lithograph. Tafeln. Cassel, Bertram. netto 1⅓ Thlr.

Jahrbuch, Berliner astronomisches, für 1858. Herausgeg. vom Director Dr. Encke. Berlin, Dümmler. netto 3 Thlr.

Lübsen, Einleitung in die Infinitesimalrechnung. 2. Theil, Integralrechnung. Hamburg, Perthes, Besser u. Mauke. netto 1⅓ Thlr.

Meyer, C. Th. u. M. H. Lehrbuch der axonometrischen Projectionslehre. 3. Lief. Leipzig, Hässel. netto 2 Thlr.

Moçnik, Schulrath Dr., Lehrbuch der Arithmetik für das Untergymnasium. 5. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. ½ Thlr.

— — Lehrbuch der Geometrie für die Obergymnasien. 4. Aufl. ebendas. 1⅓ Thlr.

Peters, Gymnasiallehrer, Arithmetik für die mittleren Classen des Gymnasiums. IV u. 96 S. Osnabrück, Fredewest. ¼ Thlr.

Rebhann, Minist.-Ingen. Höhere Ingenieurwissenschaften. 5. u. 6. Lief. (Schluss.) Wien, Gerold's Sohn. netto à 24 Ngr.

Rosenberg, Dr., die Arithmetik für die Schule und ihre Lehrer. 1. Abth., die elementare Zahlenlehre. VIII u. 72 S. Hamburg, Perthes, Besser und Mauke. netto 12 Ngr.

Burg, Reg.-Rath und Prof. Lehrbuch der Maschinenlehre für Oberrealschulen; bearbeitet im Auftrage des Minister. VIII u. 239 S. mit 14 Taf. Wien, Gerold's Sohn. 2 Thlr. 12 Ngr.

Crelle, Geh. Oberbaurath, Dr. Verzeichniss des Inhalts und Umfangs der ersten 50 Bände des Journals für reine und angewandte Mathematik. Berlin, Reimer. ⅝ Thlr.

Ludowieg, Gymnasial-Oberlehrer. Die elementare Stereometrie. VIII u. 120 S. mit 3 lithograph. Tafeln. Stade. (Hannover, Hahn.) netto 1⅙ Thlr.

Wiegand, Dr. Aug. Wie ist der mathematische Unterricht auf Gymnasien fruchtbar zu machen? Ein Vortrag, gehalten in der Versammlung deutscher Realschulmänner zu Hannover am 29. Sept. 1855. Nebst dem darin Versprochenen. 28 S. Halle, Schmidt. n. ⅙ Thlr.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, v. Crelle. Bd. 51. 4 Hefte. Berlin, Reimer. netto 4 Thlr.

Böhm, Dr. Jos. Methode, geographische Breite und Azimut zugleich aus blossen Azimuthbeobachtungen der Circumpolarsterne, ohne Kenntniss der Zeit, aufs Genaueste zu finden. Bestimmung der geographischen Breite von Innspruck. Aus den Abhandl. der K. böhmischen Gesellschaft der Wissensch. 28 S. Prag, Calve. netto 8 Ngr.

Heuser, Lehrer. Versuch, eine Kreisfläche in einer geradlinigen Figur darzustellen, oder über d. Auflösung d. Problems der Quadratur des Kreises. 16 S. mit 2 Tafeln. Essen, Bädecker in Commiss. netto 6 Ngr.

Schaub, Prof. Dr., *Compendio di trigonometria piane e sferica. Traduzione dal tedesco con noti dei fratelli R. e L. Zamara.* 38 S. mit 1 Taf. *Trieste, Direzione de Lloyd austr.* netto 16 Ngr.

Koppe, die Stereometrie. 5. Aufl. VIII u. 96 S. mit 7 lithogr. Tafeln. Essen, Bädeker. 12 Ngr.

Libri, Galileo Galilei, aus dem Französ. mit Anmerkungen v. Carové. 2. (Titel-) Ausgabe. Wiesbaden, Friedrich. ½ Thlr.

Reuter, Dr. Lehrbuch der Geometrie. 1. Th. Planimetrie. VII u. 104 S. mit 3 lithogr. Taf. Wismar, Hinstorff. ½ Thlr.

Physik und verwandte Wissenschaften.

Dove, H. W. Die Verbreitung der Wärme in der nördlichen Hemisphäre innerhalb des 40. Breitengrades. Auf 2 von H. Kiepert entworfenen Karten dargestellt und erläutert. 3 S. Text in Folio. Berlin, D. Reimer. In Mappe. netto 1⅔ Thlr.

Hartig, Oberforstrath u. Prof. Ueber das Verhältniss des Brennwerthes verschiedener Holz- und Torfarten. V u. 109 S. mit 1 Tafel. Braunschweig, Vieweg. netto ⅚ Thlr.

Mélanges physiques et chimiques tirés du bulletin physico-mathématique de l'academie imp. de Petersbourg. Tome II, livr. 3; avec 2 planches. Petersbourg, Leipzig, Voss. netto 17 Ngr.

Elsner, Dr. H. Die galvanische Vergoldung, Versilberung etc. 3. Aufl. Leipzig, Amelang, 1856. 1 Thlr.

Kreil, K. Magnetische und geographische Ortsbestimmungen an den Küsten des adriatischen Golfs. Aus den Denkschriften der Kaiserl. Academie zu Wien. Wien, Braumüller. netto ⅚ Thlr.

Quintus Icilius, Dr. v. Experimentalphysik. Ein Leitfaden bei Vorträgen. Hannover, Schmorl und v. Seefeld. 1855. 3 Thlr.

Müller, Prof. Dr. Joh. Grundriss der Physik und Meteorologie. 5. Aufl. Erste Hälfte. Braunschweig, Vieweg. netto 1⅚ Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1852; dargestellt von der physik. Gesellschaft in Berlin, redig. von Dr. Krönig. 2. Abthlg. Electricitätslehre und Physik der Erde. Berlin, Reimer. 2 Thlr.

Schabus, Lehrer, Leicht fassliche Anfangsgründe der Naturlehre für Unterrealschulen und Untergymnasien. 3. Auflage. Wien, Gerold's Sohn. 1 Thlr.

— — Grundzüge der Physik für die oberen Classen der Gymnasien und Realschulen. 1. Lief. ebendas. compl. 2⅙ Thlr.

Schoedler, Buch der Natur. 9. Aufl. Braunschweig, Vieweg. n. 1⅙ Thlr.

Abhandlungen der Senckenberg'schen naturforschenden Gesellschaft. 1. Bd. 2. Lief. Frankfurt, Brönner. netto 2⅙ Thlr.

Hummel, Prof. Dr. Physische Geographie. 188 S. Graz. (Wien, Wallishausers Sep.-Conto.) 1 Thlr. 22 Ngr.

Fechner, G. Th. Professor Schleiden und der Mond. XVII und 427 S. Leipzig, Gumbrecht. netto 2 Thlr.

Beobachtungen, magnetische und meteorologische, zu Prag; herausgeg. von Prof. Dr. Böhm und Adj. Dr. Kunes. Bd. 13. Jahrgang 1852. Prag, Calve. netto 2⅚ Thlr.

Peters, Lehrer. Mathematische, physische und politische Geographie für Navigationsschulen. 2. Aufl. Wismar, Hinstorff. ¾ Thlr.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

gehorchen den allgemeinen mechanischen Gesetzen des Gleichgewichtes und der Bewegung. Die letzten Atome sind entweder an sich unzerstörbar oder es sind wenigstens im Bereiche der Physik und Chemie keine Mittel gegeben, sie zu zerstören und liegen keine Gründe vor, eine je eintretende Zerstörung oder Verflüchtigung derselben anzunehmen. Von diesen letzten Atomen vereinigen sich im Gebiete des Wägbaren mehr oder weniger zu kleinen Gruppen (Moleculen), die weiter von einander entfernt sind als die Atome jeder Gruppe für sich. Vom Abstande der letzten Atome ist nur so viel gewiss, dass er sehr gross im Verhältniss zu den Dimensionen der betreffenden Atome ist. Von den absoluten Dimensionen der Atome, ja ob die letzten Atome angebbare Dimensionen haben, ist nichts bekannt; den Moleculen kann eine bestimmte Gestalt als Umriss der von ihnen befassten Gruppe beigelegt werden, von der Gestalt der letzten Atome ist nichts bekannt. Die Kräfte der Atome sind theils anziehender, theils abstossender Natur (nach *Poisson* ziehen sich die wägbaren Atome gegenseitig an und stossen sich die Aetheratome ab, während zwischen einem wägbaren und einem Aetheratome Anziehung stattfindet); sie auf blos anziehende zurückzuführen, ist noch nicht geglückt. Sie wirken nach Functionen der Distanz der Theilchen, das genaue Gesetz der Kräfte ist nicht bekannt."

Diese Ansicht vertheidigt der Verfasser in der ersten Hälfte seines Werkes vom Standpunkte der Experimentalphysik aus und zwar im Allgemeinen auf die Weise, dass er verschiedene physikalische Erscheinungen, wie z. B. Lichtbrechung, Wärmebewegung etc. hervorhebt, die sich durch die dynamische Vorstellung einer stetigen Raumerfüllung weniger leicht und vollständig als durch obige Voraussetzungen erklären lassen. Obschon nun der Verfasser seine Beispiele meistens glücklich wählt und mit vielem Geschick behandelt, so muss doch Referent gestehen, dass er trotzdem die überzeugende Beweiskraft nicht recht finden kann. Es liegt dies hauptsächlich an der Art des Beweises. Die dynamische Ansicht besteht zur Zeit nur aus einer einzigen Hypothese und ist überhaupt noch sehr wenig ausgebildet; die atomistische Ansicht dagegen enthält mindestens sechs verschiedene Hypothesen (in der *Poisson*'schen Lehre stecken allein zwei Hypothesen, die Wirkung der Aetheratome unter sich und auf wägbare Atome betreffend), was Wunder also, wenn man mit einem halben Dutzend combinirter Hypothesen, sobald sie nur einigermaassen glücklich gegriffen sind, mehr erklären kann als mit einer; liesse sich doch auch eine Planetenbahn durch sechs gut gewählte Epicykeln mit ansehnlicher Genauigkeit darstellen. Will man aber einmal auf die Weisse streiten, dass der Eine zeigt, was er kann, und dem Andern das zum Vorwurfe macht, was letzterer nicht kann, so giebt es auch mancherlei Thatsachen, mit denen die Atomistik schwer fertig werden möchte. Die Mechanik z. B. berechnet die Anziehung einer Kugel auf einen Punkt unter der Voraussetzung, dass die anziehende Masse in der Kugel stetig vertheilt sei; das Resultat stimmt mit der Erfahrung, sollte ihr aber widersprechen, wenn die Atomistik Recht hat. Schon *Poisson* fühlte diese Discrepanz und versuchte eine Erklärung, bei der sich auch unser Verfasser beruhigt; aber gerade diese Erklärung ist an sich unglücklich und widerspricht ausserdem noch den oben erwähnten Grundzügen der Atomistik. Zuerst macht nämlich *Poisson* (Mechanik, I. §. 98) eine doppelte Distinction, er unterscheidet unendlich kleine Grössen (Differentiale) von endlichen Grössen und theilt letztere wieder in sensible und insensible, was für einen Mathematiker eine ganz haarsträu-

B ist der gerade Weg der kürzeste". Wo ist der Mensch, der mit einer Rolle Bindfaden in der Hand, die Wege von A nach B ausgemessen und die Beobachtung $AB < Arc\,AB$ gemacht hat? kennt Jemand den Experimentator? Seit Menschengedenken ist dieser Versuch nicht gemacht worden, woher also jene Kunde? Aber vielleicht hat in ganz unvordenklicher Zeit, vielleicht einer der sieben Weisen Griechenlands jene Entdeckung gemacht; möglich wohl, aber dann wäre der betreffende Satz nur durch Tradition auf uns gekommen, und da nach bekannten Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Probabilität der Richtigkeit eines Referates in geometrischer Progression abnimmt, wenn die Zahl der Wiedererzähler in arithmetischer Progression wächst, so würde die gegenwärtige Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit jenes Satzes enorm klein sein, während sie thatsächlich $= 1$ ist. — Aber noch mehr; man kann *a priori* wissen, dass der Satz nicht aus der Erfahrung stammt, weil *a priori* bewiesen werden kann, dass die betreffende Erfahrung unmöglich ist. Von A nach B giebt es einen einzigen geradlinigen Weg, aber unendlich viel krumme Wege; alle letzteren auszumessen und mit dem ersten zu vergleichen, erlaubt die Endlichkeit des menschlichen Lebens nicht — in seiner präcisen Fassung kann also der Satz gar nicht aus der Erfahrung sein — wollte man sich aber mit der Ausmessung einiger Wege begnügen und im Uebrigen nach Analogie schliessen, so hätte man aus einer endlichen Anzahl von Fällen auf eine unendliche Anzahl verschiedener höchst unähnlicher Fälle geschlossen und das gäbe nur eine geringe Wahrscheinlichkeit. Auf diesem Standpunkte muss es sich der Verfasser ganz ruhig gefallen lassen, wenn ihm Jemand erzählt, er habe durch längjährige feine astronomische Beobachtungen herausgebracht, dass der kürzeste Weg von Frankfurt nach Heidelberg über den Mond gehe. Es wundert uns um so mehr, dass der Verfasser in den alten Sensualismus zurückverfallen ist, als es ein sehr naheliegendes Kennzeichen giebt, um die nothwendigen Wahrheiten (Sätze *a priori*) von den zufälligen (*a posteriori* = Erfahrungssätzen) zu unterscheiden; nothwendig ist nämlich jeder Satz, dessen Gegentheil man sich nicht denken kann. Wer nur ehrlich gegen sich selber sein will, wird gewiss zugestehen, dass er sich einen von zwei geraden Linien umschlossenen Raum schlechterdings gar nicht vorzustellen vermag, während er sich z. B. sehr wohl denken kann, dass die Wärme zusammenziehend auf Körper wirke, etwa wie beim Schwinden des Thones. Aehnlich geht es mit allen mathematischen Grundsätzen und daraus erklärt sich sattsam die allgemeine höchliche Verwunderung, wenn Jemand die erwähnten Axiome mit experimentalen Beweisen zu versehen sucht*).

Zum Glück für das vorliegende Buch hat die philosophische Ansicht des Verfassers keinen wesentlichen Einfluss auf die Behandlung des Stoffes ausgeübt; der Verfasser ist zu guter Mathematiker, als dass er sich durch

*) Man hat es der Kant'schen Lehre von den Urtheilen *a priori* hier und d zum Vorwurfe gemacht, dass sie die verrufenen „angeborenen Ideen" rehabiliti und hat die Existenz der letzteren sehr unbegreiflich gefunden. Dieser Einwand hät Grund, wenn Kant so unbedachtsam gewesen wäre, jedem Neugeborenen ohne We-teres fertige Urtheile beizulegen; beachtet man aber das zwar kurze, aber klare Wo (Kritik der reinen Vernunft S. 1), „Dass alle unsere Erkenntniss mit der Erfahrun anfange, daran ist gar kein Zweifel ... Wenn aber gleich alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anhebt, so entspringt sie darum doch nicht eben alle aus der Er-fahrung", so reducirt sich jener Vorwurf auf ein reines Missverständniss. Die Erfah-*rung wirkt* nämlich auf doppelte Weise; sie bereichert uns einerseits historisch m

nug protestiren kann) und so bleibt nur der zweite Weg übrig. Damit geräth der Verfasser auf eine Monadologie, welche die Materie aus blossen Kraftmittelpunkten zusammensetzt. Dies scheint dem Referenten eine noch weniger denkbare Vorstellung; haben jene Punkte irgend eine Ausdehnung im Raume, so sind sie kleine Massenpartikel, d. h. Atome im gewöhnlichen Sinne, und dann wäre nichts gewonnen; haben sie keine Ausdehnung (und das ist wohl die Meinung des Verfassers), so sind sie mathematische Punkte im strengen Sinne des Wortes, dann hat man aber auch allen und jeden materiellen Inhalt heraussublimirt und es sind nur noch Kräfte übrig, welche an bestimmten Stellen im Raume wirken. Dadurch entsteht eine eigenthümliche Schwierigkeit. Die Punkte des mathematischen leeren Raumes sind völlig gleichgültig gegeneinander, d. h. kein Punkt hat vor dem anderen irgend etwas Besonderes voraus, wie kommen nun die Kräfte dazu, sich gerade hier und da niederzulassen, sich gerade so und nicht anders zu localisiren? Wenn ferner die Materie aus mathematischen Punkten und Kräften construirt wird, so verfällt man streng genommen doch wieder in dieselbe Unbegreiflichkeit, die man der *Schelling*'schen Hypothese mit Recht vorgeworfen hat; das Unbegreifliche lag darin, dass der Philosoph von Contrahiren und Expandiren sprach, während gar nichts da war, was expandirt oder contrahirt werden konnte, dieses Etwas sollte eben durch die im Leeren herumarbeitenden Kräfte entstehen; dies ist aber bei der *Fechner*'schen Ansicht ganz ebenso oder vielmehr in noch höherem Grade der Fall, weil jene Kräfte aus unbekannten Gründen an bestimmte Punkte gebunden sind. — Endlich erhebt sich noch eine Schwierigkeit für die mathematische Physik. Bei der gegenwärtigen Behandlungsweise unterscheidet man die leere Form (den mathematischen Körper) von seinem materiellen Inhalte; das Verhältniss der Masse zu dem Volumen giebt die Dichtigkeit, und wenn später noch Kräfte in Rechnung kommen, so werden diese als der Masse inhärirend und ihr proportional betrachtet; alle diese einfachen Vorstellungen müssen nach der *Fechner*'schen Ansicht geändert werden. Was ist z. B. Dichtigkeit, Maas der anziehenden Kraft etc.? wir wollen nicht leugnen, dass dafür neue Definitionen gegeben werden könnten, aber damit allein ist noch nichts gewonnen, sobald die fraglichen Definitionen die Anwendung des Calcüls nicht ebenso leicht gestatten, wie die bisherigen. Der Verfasser berührt zwar hie und da diese Punkte, erwähnt auch, dass künftig rein aufgehende Summen an die Stelle der Integrale treten müssten, aber das sind nur Vorschläge und es würde, wenn die Theorie der Kraftcentra Anwendung finden und nicht eine müssige Hypothese bleiben soll, jedenfalls nöthig sein, die nothwendigen Modificationen des Calcüls thatsächlich an einigen Beispielen nachzuweisen. So lange dies nicht geschieht, bleibt jene Lehre für den mathematischen Physiker eine Ansicht, welche für seine Speculationen noch keine praktische Bedeutsamkeit erlangt hat.

Aus diesen Bemerkungen zusammen dürfte mit Sicherheit wenigstens so viel hervorgehen, dass die vom Verfasser versuchte philosophische Vollendung der Atomistik noch mancherlei Zweifel gestattet und dass überhaupt die Acten in dieser Angelegenheit noch lange nicht geschlossen sind; zu wünschen wäre aber, dass auch von der entgegengesetzten Seite her so viel Fleiss auf die Begründung der dynamischen Ansicht, wie sie besonders *Fries* und dessen genialer Schüler *Schleiden* aufzufassen pflegen, verwandt werden möge, als es hier im Interesse der Atomistik geschehen ist.

O. Schlömilch.

---

wenn dies consequent geschehen sollte, so musste $\nearrow a$ mit Hilfe des Begriffs vom conträren Gegensatz definirt und nachher gezeigt werden, wie $\nearrow a$ mit $\sqrt{-a}$ und dergl. zusammenhängt (es ist nämlich $\nearrow a = ae^{\varphi i}$, wenn φ den Winkel zwischen $\nearrow$ und $\rightarrow$ bezeichnet). Von dem Allen ist aber nicht die Rede, es wird nur statuirt, dass $\uparrow a = + ia$ und $\downarrow = - ia$ sei und dann die Lehre von den conplexen Grössen wie gewöhnlich behandelt, wobei aber Referent nicht recht einsieht, warum immer $\cos\beta \uparrow \sin\beta$ statt $\cos\beta + i\sin\beta$ und $\cos\beta \downarrow \sin\beta$ statt $\cos\beta - i\sin\beta$ geschrieben wird.

Wenn wir im Vorigen einige wenige Partien des Werkes als nicht gelungen bezeichnet haben, so wolle man daraus doch keinen Schluss auf das Ganze ziehen; im Gegentheil bekennen wir gern, dass uns das Werkchen in seiner Totalität recht gut gefallen hat und dass namentlich das ernste Streben des Verfassers, gepaart mit der glücklichen Gabe einer anziehenden Darstellung, im Allgemeinen den Eindruck der Befriedigung hinterlässt.

SCHLÖMILCH.

A treatise on the calculus of operations: designed to facilitate the processes of the differential and integral calculus and the calculus of finite differences. By the Rev. Robert Carmichael, Fellow of the trinity college, Dublin etc. London, Longman, Brown, Green and Longmans. 1855.

Bei der mehrfachen Differentiation der Produkte von abhängigen Variabelen hatte bereits Leibnitz die zwischen den Potenzexponenten und den Wiederholungsexponenten der Differentiation stattfindende Analogie bemerkt, so kann z. B. die bekannte Formel

$$d^n(uv) = u\,d^n v + (n)_1\,du\,d^{n-1}v + (n)_2\,d^2u\,d^{n-2}v + \ldots$$

auch unter der Gestalt

$$d^n(uv) = (d_u + d_v)^n$$

dargestellt werden, wenn man $d_u{}^k$ für einerlei mit $d^k u$ und $d^0 u$ für u erklärt. Diese Beobachtung blieb indessen unfruchtbar bis zum Jahre 1772, wo Lagrange die Idee Leibnitzens in allgemeinerer Form wieder aufnahm, sie auf die Differenzen der Funktionen ausdehnte und eine Reihe von sogenannten symbolischen Formeln aufstellte; wird z. B. $u = f(x, y)$ gesetzt, so ist hiernach

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)]\,u,$$

wobei die rechte Seite den Ausdruck

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_x \Delta_y u$$

bedeuten soll; in demselben Sinne ist unter der Voraussetzung, dass der Taylor'sche Satz gilt und Δx mit h bezeichnet wird,

$$\Delta u = (e^{hD_x} - 1)\,u = \frac{h}{1} D_x u + \frac{h^2}{1 \cdot 2} D^2{}_x u + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} D^3{}_x u + \ldots$$

Lagrange leitet seine Formeln auf inductorischem Wege ab und hält direkte Beweise derselben für ziemlich schwer, später hat aber Laplace (im 7. Bande der *Savans étrangers*) die letzteren auf sehr elegante Weise gegeben und im 1. Buche der *Théorie analytique des probabilités* zahlreiche Anwendungen davon namentlich auf die Theorie der Reihen gemacht. Eine weitere Verfolgung dieser Idee, jedoch immer noch auf die Differenzen und Differentiale beschränkt, findet man in dem *Calcul de dérivation* von Arbogast (Nr. 371 und 404), die Bezeichnung ist aber unbequem und die ganze

SITZUNGSBERICHTE der Kaiserl. Academie der Wissenschaften zu Wien. Math.-phys. Classe. Bd. XVII. Jahrgang 1855. 2. Heft. Wien, Braumüller. netto 2 Thlr.

RÜHLMANN, Prof. Dr. Logarithmische, trigonometrische und andere Tafeln. 5. Aufl. Leipzig, Arnold. netto 16 Ngr.

WEISBACH, Prof. Jul. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 3. Aufl. 1. bis 3. Lief. Braunschweig, Vieweg. n. 1⅓ Thlr.

DARAPSKY, Hauptm. Ebene Trigonometrie und ihre Anwendung auf Kriegswissenschaft. VII u. 248 S. mit 3 lithograph. Tafeln. Cassel, Bertram. netto 1⅓ Thlr.

JAHRBUCH, Berliner astronomisches, für 1858. Herausgeg. vom Director Dr. ENCKE. Berlin, Dümmler. netto 3 Thlr.

LÜBSEN, Einleitung in die Infinitesimalrechnung. 2. Theil, Integralrechnung. Hamburg, Perthes, Besser u. Mauke. netto 1⅓ Thlr.

MEYER, C. Th. u. M. H. Lehrbuch der axonometrischen Projectionslehre. 3. Lief. Leipzig, Hässel. netto 2 Thlr.

MOÇNIK, Schulrath Dr., Lehrbuch der Arithmetik für das Untergymnasium. 5. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. ½ Thlr.

— — Lehrbuch der Geometrie für die Obergymnasien. 4. Aufl. ebendas. 1⅓ Thlr.

PETERS, Gymnasiallehrer, Arithmetik für die mittleren Classen des Gymnasiums. IV u. 96 S. Osnabrück, Fredewest. ¼ Thlr.

REBHANN, Minist.-Ingen. Höhere Ingenieurwissenschaften. 5. u. 6. Lief. (Schluss.) Wien, Gerold's Sohn. netto à 24 Ngr.

ROSENBERG, Dr., die Arithmetik für die Schule und ihre Lehrer. 1. Abth., die elementare Zahlenlehre. VIII u. 72 S. Hamburg, Perthes, Besser und Mauke. netto 12 Ngr.

BURG, Reg.-Rath und Prof. Lehrbuch der Maschinenlehre für Oberrealschulen; bearbeitet im Auftrage des Minister. VIII u. 239 S. mit 14 Taf. Wien, Gerold's Sohn. 2 Thlr. 12 Ngr.

CRELLE, Geh. Oberbaurath, Dr. Verzeichniss des Inhalts und Umfangs der ersten 50 Bände des Journals für reine und angewandte Mathematik. Berlin, Reimer. ⅚ Thlr.

LUDOWIEG, Gymnasial-Oberlehrer. Die elementare Stereometrie. VIII u. 120 S. mit 3 lithograph. Tafeln. Stade. (Hannover, Hahn.) netto 1⅙ Thlr.

WIEGAND, Dr. Aug. Wie ist der mathematische Unterricht auf Gymnasien fruchtbar zu machen? Ein Vortrag, gehalten in der Versammlung deutscher Realschulmänner zu Hannover am 29. Sept. 1855. Nebst dem darin Versprochenen. 28 S. Halle, Schmidt. n. ⅙ Thlr.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, v. CRELLE. Bd. 51. 4 Hefte. Berlin, Reimer. netto 4 Thlr.

BÖHM, Dr. Jos. Methode, geographische Breite und Azimut zugleich aus blossen Azimuthbeobachtungen der Circumpolarsterne, ohne Kenntniss der Zeit, aufs Genaueste zu finden. Bestimmung der geographischen Breite von Innspruck. Aus den Abhandl. der K. böhmischen Gesellschaft der Wissensch. 28 S. Prag, Calve. netto 8 Ngr.

HEUSER, Lehrer. Versuch, eine Kreisfläche in einer geradlinigen Figur darzustellen, oder über d. Auflösung d. Problems der Quadratur des Kreises. 16 S. mit 2 Tafeln. Essen, Bädecker in Commiss. netto 6 Ngr.

gehört, so lassen sich hieraus verschiedene Theoreme der Differentialrechnung herleiten, die nachher zur Integration von Differentialgleichungen nutzbar gemacht werden können. So ist z. B. wenn der in Beziehung auf x genommene Differentialquotient durch ein vorgesetztes D_x bezeichnet wird,

$$1)\qquad x D_x \,.\, x^\mu = \mu x^\mu,$$

$$\begin{aligned}2)\qquad x D_x (x D_x - 1) \,.\, x^\mu &= x D_x \,.\, x D_x \,.\, x^\mu - x D_x \,.\, x^\mu \\ &= x D_x \,.\, \mu x^\mu - \mu x^\mu \\ &= \mu^2 x^\mu - \mu x^\mu = \mu(\mu-1) x^\mu\end{aligned}$$

und allgemein

$$\begin{aligned}3)\qquad & x D_x (x D_x - 1)(x D_x - 2) \ldots (x D_x - [n-1]) \,.\, x^\mu \\ & = \mu(\mu-1)(\mu-2) \ldots (\mu - [n-1])\, x^\mu.\end{aligned}$$

Ein paar specielle Gleichungen dieser Art sind

$$4)\qquad (x D_x - 1) \,.\, Ax = 0, \quad x D_x \,.\, B = 0.$$

Durch Umkehrung der Gleichung 1) erhält man

$$x^\mu = \frac{1}{x D_x} \,.\, \mu x^\mu \text{ oder } \frac{1}{x D_x} \,.\, x^\mu = \frac{x^\mu}{\mu},$$

ebenso aus Nr. 2)

$$5)\qquad \frac{1}{x D_x (x D_x - 1)} \,.\, x^\mu = \frac{x^\mu}{\mu(\mu-1)} \text{ u. s. w.}$$

die Formeln 4) liefern die entsprechenden:

$$6)\qquad \frac{1}{x D_x - 1} \,.\, 0 = Ax, \quad \frac{1}{x D_x} \,.\, 0 = B.$$

Wie der Verfssser diese Relationen zur Integration von Differentialgleichungen verwendet, wollen wir an einem der einfacheren Beispiele zeigen. Die Differentialgleichung sei

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a x^{\mu-2} \text{ oder } x^2 D^2_x y = a x^\mu;$$

giebt man ihr die aus der Isolirung der Operationszeichen unmittelbar hervorgehende Eorm

$$x D_x (x D_x - 1) \,.\, y = a x^\mu$$

und denkt sich rechter Hand noch die Null zugesetzt, so hat man umgekehrt die symbolische Lösung

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x D_x (x D_x - 1)} \,.\, (a x^\mu + 0) \\ &= \frac{1}{x D_x (x D_x - 1)} \,.\, a x^\mu + \frac{1}{x D_x (x D_x - 1)} \,.\, 0, \end{aligned}$$

bei welcher es nun darauf ankommt, die Symbolik wieder los zu werden. Nach Nr. 4) ist aber

$$\frac{1}{x D_x (x D_x - 1)} \,.\, a x^\mu = \frac{a x^\mu}{\mu(\mu-1)},$$

ferner hat man

$$\begin{aligned}\frac{1}{x D_x (x D_x - 1)} \,.\, 0 &= \left(\frac{1}{x D_x - 1} - \frac{1}{x D_x}\right) \,.\, 0 \\ &= \frac{1}{x D_x - 1} \,.\, 0 \quad \frac{1}{x D_x} \,.\, 0 = Ax - B\end{aligned}$$

(nach Nr. 6); als vollständiges Integral der gegebenen Differentialgleichung ergiebt sich daher

$$y = \frac{a x^\mu}{\mu(\mu - 1)} + Ax - B,$$

worin A und B willkührliche Constanten bedeuten.

Die Integration der Differentialgleichungen zerschiedener Gattungen bildet den Inhalt der Cap. III, IV, V und VI; in dem letzteren, welches sich mit den simultanen Differentialgleichungen beschäftigt, findet man unter Anderen diejenigen analytischen Entwickelungen, welche sich auf die kleinen Bewegungen der Gase, elastischer fester Körper und der tropfbaren Flüssigkeiten beziehen, sowie ferner die Theorie der Centralbewegung und eine Untersuchung über die von Foucault beobachtete Drehung der Pendelebene. Der betreffende Calcul zeichnet sich durch Eleganz und kurzen direkten Gang vortheilhaft aus.

Cap. VIII giebt sehr interessante Anwendungen des Operationscalculs auf die Geometrie; namentlich sind es die Verschiebungen und Drehungen einer Curve oder Fläche, welche eine kurze Behandlung mittelst symbolischer Formeln zulassen. Während z. B. die Gleichung $F(x,y) = 0$ durch Verschiebung des Coordinatenanfanges (oder der Curve) in $F(x+a, y+b) = 0$ übergeht, wird dieser Procos symbolisch durch die Formel

$$e^{aD_x + bD_y} F(x,y) = 0$$

ausgedrückt; ebenso entspricht die Gleichung

$$e^{\omega(xD_y - yD_x)} F(x,y) = 0$$

einer Drehung und ist mit der gewöhnlichen Gleichung

$$F(x \cos \omega - y \sin \omega, x \sin \omega + y \cos \omega) = 0$$

identisch. Durch Rechnung mit dergleichen symbolischen Formeln gelangt der Verfasser auf überraschend kurzem Wege zu verschiedenen neuen geometrischen Sätzen, von denen wir ein Paar anführen wollen: 1) Dreht man einen Kegelschnitt unendlich wenig um einen beliebigen Punkt seiner Ebene, so liegen die Durchschnitte des ersten und des gedrehten Kegelschnittes auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche durch den festen Punkt geht. Wenn der Kegelschnitt ein Kreis ist, so degenerirt die Hyperbel in eine Gerade. 2) Dreht man eine Fläche zweiten Grades unendlich wenig um eine Achse, so liegen die Durchschnittscurven der beiden erhaltenen Flächen auf einer dritten Fläche zweiten Grades. Man wird sogleich bemerken, dass diese und ähnliche Sätze für die die Theorie der Umhüllungscurven und einhüllenden Flächen von Werth sind und dass es dem Verfasser hierdurch möglich wurde, in der angedeuteten Richtung manches bemerkenswerthe Resultat zu erreichen.

Cap. X enthält die Anwendungen des Operationscalculs auf die Differenzenrechnung in einer zum Theil neuen und eleganten Form. Den Beschluss des Werkes machen einige Anhänge, in denen man unter Anderem einen scharfsinnigen Beweis des Gauss'schen Satzes von der Anziehung einer zwischen zwei sich nicht schneidenden Flächen enthaltenen Masse auf einen beliebigen Punkt findet.

Aus dem Mitgetheilten wird man ersehen, dass das Werk Carmichael's genug des Neuen und Eigenthümlichen bietet, um die Aufmerksamkeit der Analytiker für sich in Anspruch nehmen zu dürfen. Bei dem hohen Preise des Originales und der etwas lakonischen Sprache des Verfassers wäre es

B ist der gerade Weg der kürzeste". Wo ist der Mensch, der mit einer Rolle Bindfaden in der Hand, die Wege von A nach B ausgemessen und die Beobachtung $AB < Arc\,AB$ gemacht hat? kennt Jemand den Experimentator? Seit Menschengedenken ist dieser Versuch nicht gemacht worden, woher also jene Kunde? Aber vielleicht hat in ganz unvordenklicher Zeit, vielleicht einer der sieben Weisen Griechenlands jene Entdeckung gemacht; möglich wohl, aber dann wäre der betreffende Satz nur durch Tradition auf uns gekommen, und da nach bekannten Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Probabilität der Richtigkeit eines Referates in geometrischer Progression abnimmt, wenn die Zahl der Wiedererzähler in arithmetischer Progression wächst, so würde die gegenwärtige Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit jenes Satzes enorm klein sein, während sie thatsächlich $= 1$ ist. — Aber noch mehr; man kann *a priori* wissen, dass der Satz nicht aus der Erfahrung stammt, weil *a priori* bewiesen werden kann, dass die betreffende Erfahrung unmöglich ist. Von A nach B giebt es einen einzigen geradlinigen Weg, aber unendlich viel krumme Wege; alle letzteren auszumessen und mit dem ersten zu vergleichen, erlaubt die Endlichkeit des menschlichen Lebens nicht — in seiner präcisen Fassung kann also der Satz gar nicht aus der Erfahrung sein — wollte man sich aber mit der Ausmessung einiger Wege begnügen und im Uebrigen nach Analogie schliessen, so hätte man aus einer endlichen Anzahl von Fällen auf eine unendliche Anzahl verschiedener höchst unähnlicher Fälle geschlossen und das gäbe nur eine geringe Wahrscheinlichkeit. Auf diesem Standpunkte muss es sich der Verfasser ganz ruhig gefallen lassen, wenn ihm Jemand erzählt, er habe durch längjährige feine astronomische Beobachtungen herausgebracht, dass der kürzeste Weg von Frankfurt nach Heidelberg über den Mond gehe. Es wundert uns um so mehr, dass der Verfasser in den alten Sensualismus zurückverfallen ist, als es ein sehr naheliegendes Kennzeichen giebt, um die nothwendigen Wahrheiten (Sätze *a priori*) von den zufälligen (*a posteriori* = Erfahrungssätzen) zu unterscheiden; nothwendig ist nämlich jeder Satz, dessen Gegentheil man sich nicht denken kann. Wer nur ehrlich gegen sich selber sein will, wird gewiss zugestehen, dass er sich einen von zwei geraden Linien umschlossenen Raum schlechterdings gar nicht vorzustellen vermag, während er sich z. B. sehr wohl denken kann, dass die Wärme zusammenziehend auf Körper wirke, etwa wie beim Schwinden des Thones. Aehnlich geht es mit allen mathematischen Grundsätzen und daraus erklärt sich sattsam die allgemeine höchliche Verwunderung, wenn Jemand die erwähnten Axiome mit experimentalen Beweisen zu versehen sucht*).

Zum Glück für das vorliegende Buch hat die philosophische Ansicht des Verfassers keinen wesentlichen Einfluss auf die Behandlung des Stoffes ausgeübt; der Verfasser ist zu guter Mathematiker, als dass er sich durch

*) Man hat es der Kant'schen Lehre von den Urtheilen *a priori* hier und da zum Vorwurfe gemacht, dass sie die verrufenen „angeborenen Ideen" rehabilitire und hat die Existenz der letzteren sehr unbegreiflich gefunden. Dieser Einwand hätte Grund, wenn Kant so unbedachtsam gewesen wäre, jedem Neugeborenen ohne Weiteres fertige Urtheile beizulegen; beachtet man aber das zwar kurze, aber klare Wort (Kritik der reinen Vernunft S. 1), „Dass alle unsere Erkenntniss mit der Erfahrung anfange, daran ist gar kein Zweifel ... Wenn aber gleich alle unsere Erkenntniss mit der Erfahrung anhebt, so entspringt sie darum doch nicht eben alle aus der Erfahrung", so reducirt sich jener Vorwurf auf ein reines Missverständniss. Die Erfahrung wirkt nämlich auf doppelte Weise; sie bereichert uns einerseits historisch mit

philosophische Grillen in seinem ruhigen Gedankengange stören liesse. Der ganzen Anordnung nach ähnelt das Werkchen der früheren schönen Arbeit von Wittstein (Hannover 1846), ohne indess die meistens synthetische etwas spröde Form derselben nachzuahmen; im Gegentheil besitzt die Cantor'sche Darstellung eine gewisse akademische Eleganz, die wenigstens den Referenten angenehm berührt hat, auch lässt der Verfasser an geeigneten Stellen historische und kritische Anmerkungen gern einfliessen. Nur an zwei verwandten Stellen ist Referent durch die Philosophie des Verfassers etwas gestört worden. Der Verfasser gelangt nämlich durch die Subtraction für den Fall, dass der Subtrahend den Minuenden übersteigt, zum Begriff der negativen Zahl, und das wäre soweit ganz schön, wenn der Verfasser es nicht für nothwendig gehalten hätte, dies auch philosophisch mittelst des Begriffes vom Gegensatze zu begründen. Zu diesem Zwecke werden statt $+a$ und $-a$ vor der Hand die Zeichen $\rightarrow a$ und $\leftarrow a$ eingeführt und nun sollte eigentlich auch der Beweis geliefert werden, dass die durch den Begriff des Gegensatzes gewonnenen Zahlen mit den bei jenem besonderen Falle der Subtraction nothwendigen negativen Zahlen einerlei sind ($\rightarrow a = + a$, $\leftarrow a = - a$); dieser ganze Beweis fehlt aber und statt dessen heisst es nur S. 19: „in der Regel werden nicht die von uns benutzten Zeichen $\rightarrow$ und $\leftarrow$, sondern $+$ und $-$ verwandt". Wie es uns scheinen will, hat sich der Verfasser die Sache unnütz schwer gemacht und ist dabei in eine antiquirte Vorstellungsweise zurückverfallen. In den früheren Lehrbüchern (wie z. B. in Tellkampf's Vorschule der Mathematik) pflegte man sehr eilig mit dem Positiven und Negativen bei der Hand zu sein; weil es entgegengesetzte Grössen, wie Wärme und Kälte, Vermögen und Schulden giebt, wollte man auch entgegengesetzte Zahlen haben, aber dabei war immer die Noth, dass sich nicht recht beweisen liess, warum gerade die Zeichen der Addition und Subtraction diesen Gegensatz ausdrücken sollten; lässt man dagegen die negativen Zahlen aus der Subtraction entstehen, wobei $-a$ das unausgeführte Subtractionsexempel $0 - a$ bedeutet, so versteht sich das Minuszeichen *eo ipso* und wenn man jene Operation in der Zahlenlinie zu construiren versucht, so zeigt sich von selbst, dass die negativen Zahlen die entgegengesetzten Zahlen sind; mit anderen Worten, der heutige Gedankengang ist gerade das Umgekehrte des früheren. Sei es nun, dass der Verfasser es Beiden recht machen wollte, sei es, dass ihn nur eine philosophische Regung beschlichen hat, befriedigend scheint uns das gleichzeitige Inbetrachtziehen von unausführbarer Subtraction und von Gegensatz nicht, und es wäre besser gewesen, der modernen Anschauung stricte zu folgen. Damit steht die nachherige Betrachtung der lateralen Zahlen in Verwandtschaft. Kaum ist $\sqrt{-a}$ als nicht angebbar erkannt, so verlässt der Verfasser das mathematische Gebiet, spricht von conträren Gegensätzen und will diese in die Mathematik übertragen wissen;

der Kenntniss von allerhand Thatsachen, sie regt aber gleichzeitig zum Selbstdenken an und durch letzteres bilden wir die Keime der nothwendigen Wahrheiten zu fertigen Urtheilen aus, was ohne jene Anregung allerdings nicht geschehen wäre. Wer es liebt, von einem Baume der Erkenntniss zu reden, dem sind die Urtheile *a priori* diejenigen Früchte, welche der Baum bei normaler Witterung und gehöriger Pflege kraft seiner Organisation von selber hervorbringt, und dass es in diesem Sinne nothwendige Wahrheiten giebt, ist gerade nicht wunderbarer, als dass der Weinstock Trauben und keine Datteln trägt; die zufälligen Wahrheiten dagegen gleichen in diesem Bilde den vergoldeten, oft genug tauben Nüssen, womit eine freigebige Hand den Weihnachtsbaum schmückt.

Auf Taf. II finden wir die Catacaustica des Kreises für den Fall, dass die Lichtstrahlen von einem Punkte ausgehen. Der Text erwähnt (nur historisch) die Gleichung der betreffenden Curve und bemerkt richtig hinzu, dass eine Discussion jener Gleichung (6. Grades) nur mit Mühe die Gestalt der Curve erkennen lasse, während sich diese aus der Zeichnung ganz von selber ergiebt. Hieran schliesst sich auf Taf. III die Darstellung der Wirkungsweise eines sphärischen Hohlspiegels, wobei die verschiedenen objectiven Bilder, welche ein und derselbe gespiegelte Gegenstand, für verschieden gestellte Augen liefert, mit vieler Deutlichkeit hervorgehoben sind; Taf. IV giebt dann die subjectiven Bilder hinter dem Hohlspiegel, entsprechend dem subjectiven Bildern hinter dem Planspiegel. Einige specielle Fälle der Reflexion beim Kreise sind auf Taf. V zusammengestellt; erstens die Catacaustica für die besondere Annahme, dass der leuchtende Punkt um den vierten Theil des Radius vom Mittelpunkte entfernt ist, zweitens für parallel einfallende Strahlen und drittens für die Reflexion von der convexen Seite des Kreises. Aus den für diese Fälle geltenden Brennlinien ergeben sich nachher die entsprechenden specielleren Bilder des Hohlspiegels, sowie die des Convexspiegels, welche auf den beiden nächsten Tafeln dargestellt sind.

Taf. VIII erläutert die Wirkung des Prisma's mit Rücksicht auf die totale Reflexion und Farbenzerstreuung. Bei den grossen Dimensionen der Zeichnung war es recht gut möglich, die äussersten farbigen Bilder unter Annahme der Brechungsindices 1,50 für rothe und 1,53 für violette Strahlen deutlich auseinander zu halten und den Nachweis zu liefern, dass das Bild eines ausgedehnten Gegenstandes in der Mitte farblos und an den Rändern farbig gesäumt ist.

Besondere Aufmerksamkeit dürfte Taf. IX verdienen, welche den Gang der Lichtstrahlen durch eine biconvexe Linse veranschaulicht, wobei die verschiedenen Fälle eines in und eines ausser der Achse liegenden leuchtenden Punktes unterschieden sind. Die sorgfältige Erörterung der hier auftretenden Verhältnisse bietet die Mittel zur Construction der verschiedenen Bilder, welche eine Linse liefern kann; so ist z. B. die auf der nächsten Tafel gegebene Ansicht der Loupenwirkung mit ihrer starken sphärischen Abweichung an den Grenzen des Gesichtsfeldes von überraschender Klarheit. Der besondere Fall, dass der lichtspendende Punkt sehr weit entfernt ist (Wirkung der Objective) findet auf Taf. XI seine Erledigung. Auch hier ist auf die Farbenzerstreuung überall die gehörige Rücksicht genommen. In ähnlicher, wenn auch minder ausführlicher Weise, werden auf Taf. XII die Concavlinsen betrachtet; Taf. XIII zeigt den Gang der Lichtstrahlen durch eine Convexlinse mit dahinter gestellter Concavlinse, was einerseits die Theorie der achromatischen Objective, andererseits die des Galilei'schen Fernrohrs begründet.

Taf. XIV enthält die Theorie des Regenbogens und war nach des Verfassers Erklärung die erste Ursache zur Entstehung des vorliegenden Werkes. Der Verfasser erwähnt nämlich, dass er als Lehrer und Examinator oft in Erfahrung gebracht habe, wie selten bei Studirenden der Physik eine genügende Einsicht in die der Entstehung des Regenbogens zu Grunde liegenden optischen Vorgänge zu finden sei; diesem Mangel habe er durch eine sorgfältige graphische Darstellung abzuhelfen gesucht und der gute Erfolg dieses ersten Versuches sei ihm eine Aufforderung gewesen, auch die übrigen optischen Erscheinungen auf gleiche Weise zu behandeln. Mit

Betrachtungsweise etwas entfernt von dem Gange des gewöhnlichen Calculs; dies und der Umstand, dass die Resultate hie und da etwas paradox, um nicht zu sagen unrichtig, ausfallen, mögen die Ursachen sein, warum der Gegenstand weniger Aufmerksamkeit fand, als er wohl verdient hätte. Unter einem weit allgemeineren Gesichtspunkte vereinigte Servois diese verschiedenen Versuche (Gergonne's Annalen, Bd. V, pag. 93) und darf daher als der eigentliche Gründer des Operationscalcüls gelten. Von der Bemerkung ausgehend, dass Gleichungen wie

$$\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v,$$
$$\Sigma(u+v) = \Sigma u + \Sigma v,$$

unter der allgemeineren Form

$$F(u+v) = F(u) + F(v)$$

enthalten sind, giebt Servois zunächst eine Theorie dieser sogenannten distributiven Funktionen, wobei es hauptsächlich auf die Gesetze ankommt, welche für die Wiederholung der Funktion, sowie für ihre Umkehrung gelten. So hat man z. B., wenn $F[F(u)]$ mit $F^2(u)$ bezeichnet wird,

$$F^2(u+v) = F^2(u) + F^2(v)$$

und analog für höhere Wiederholungsindices; ferner wird $F^0(u)$ für u und F^{-1} als diejenige Funktion erklärt, welche der Bedingung

$$F^{-1}[F(u)] = u$$

genügt. Servois verallgemeinert weiter die bekannten Relationen

$$d\Delta u = \Delta du \text{ und } d\Sigma u = \Sigma du$$

indem er die sogenannten commutativen Funktionen durch die Gleichung

$$F[f(u)] = f[F(u)]$$

erklärt und auch für diese die Gesetze der Wiederholung und Umkehrung entwickelt. Daran schliesst sich die Betrachtung zusammengesetzter Funktionen, wobei von symbolischen Gleichungen wie z. B.

$$\varphi(u) + \psi(u) + \chi(u) \ldots = (\varphi + \psi + \chi + \ldots) u$$

häufig Gebrauch gemacht wird. — In Deutschland scheint diese Speculation trotz unserer Vorliebe für abstrakte Theorieen keinen sonderlichen Anklang gefunden zu haben, desto mehr haben sich die Engländer in neuerer Zeit damit beschäftigt, namentlich Boole, Hargreave, Bronwin, Graves, Sylvester, Donkin und Spottiswoode, deren Arbeiten der Verfasser zu einem systematischen Ganzen zu verarbeiten gesucht hat.

Die Principien, von denen der Verfasser ausgeht, sind im Wesentlichen dieselben wie bei Servois nur in schärferer und theilweis allgemeinerer Fassung. So wird gleich anfangs richtig bemerkt, dass es sich eigentlich nicht um Funktionen, sondern um Operationen handelt und demgemäss auch nicht $\varphi(u)$ sondern $\varphi \,.\, u$ zu schreiben ist; hier bedeutet φ, dass mit u irgend eine Operation vorgenommen werden soll, und wenn das hierbei entstehende Resultat X heisst, so wird

$$\varphi \,.\, u = X \text{ und umgekehrt } \varphi^{-1} \,.\, X = u$$

gesetzt. Dabei kann in vielen Fällen von u und X ganz abstrahirt werden, sobald zusammengesetzte Operationen vorkommen, man gelangt dann zu Gleichungen, wie man sie auch in der Elementarmathematik nicht selten benutzt, z. B.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\;}} = \sqrt[mn]{\;} \quad \text{oder} \quad \sin^2 = \sqrt{1 - \cos^2}.$$

Cap. II giebt die Theorie der commutativen, sowie der distributiven Operationen, wobei die ebenerwähnte Isolirung der Operationszeichen zum Princip gemacht wird. Da die Differentiation beiden Operationsclassen an-

hat), für die übrigen 14 stellt er die betreffenden Gleichungen auf, worunter sich sogar eine vom 7. Grade findet. Zum Schlusse theilt der Verfasser noch eine Tabelle von 46 Zahlenbeispielen mit, bei denen sämmtliche zwölf Segmente rationale Werthe haben.

Referent glaubt dieses Schriftchen als Aufgabensammlung empfehlen zu können, da namentlich die 28 ersten Aufgaben fast nur den pythagoräischen Satz und die Aehnlichkeit der Dreiecke postuliren, und eben desswegen eine nicht zu schwere Uebung im algebraisch-geometrischen Calcul bieten. Nur Eines hätte Referent anders gewünscht, nämlich die Wahl der Buchstaben. Der Verfasser bezeichnet die Seitensegmente mit h, i, k, l, m, n, die Höhensegmente mit o, p, q, u, v, w; für die Uebersicht und namentlich für die combinatorischen Bemerkungen wäre es aber wohl zweckmässiger gewesen, die Seiten mit a, b, c, die zugehörigen Höhen etwa mit α, β, γ und dem entsprechend die Seitenabschnitte mit a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, sowie die Höhensegmente mit α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 zu bezeichnen.

Bibliographie

vom 1. Januar bis 15. April 1856 *).

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien; mathemat.-naturwissensch. Classe; Jahrgang 1855. Wien, Braumüller. netto 2¼ Thlr.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathemat.-naturw. Classe. Bd. X. Jahrgang 1855. Wien, Braumüller. netto 6⅔ Thlr.

Monatsberichte der königl. preuss. Akademie der Wissensch. zu Berlin. Jahrgang 1856, Heft 1. Berlin, Dümmler. pro compl. 1⅓ Thlr.

Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissensch. zu Leipzig. Mathem.-phys. Classe. Jahrgang 1855, Heft 2. Leipzig, Hirzel. ⅓ Thlr.

Mélanges mathématiques et astronomiques, tirés du bulletin physico-mathématique de l'académie impériale de St. Petersbourg. Tome II, livraison 4. Leipzig, Voss. 1855. 17 Ngr.

Comptes rendues des séances de l'académie des sciences de Paris. Année 1856; Nr. 1—15. *Paris, Mallet-Bachelier.*

Astronomische Nachrichten, herausgegeben von C. A. F. Peters. Bd. 43. Nr. 1. Altona und Hamburg, Perthes, Besser u. Mauke. pro compl. 5 Thlr.

Bremiker, Nautisches Jahrbuch oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1858. Unter amtlicher Aufsicht herausgegeben. Jahrgang 7. Berlin, Schropp u. Comp. ⅓ Thlr.

Annuaire de l'observatoire de Bruxelles, par A. Quetelet. Année 23. *Bruxelles* 1856. 20 Ngr.

---

*) Wir glauben unseren Lesern einen kleinen Dienst zu erweisen, wenn wir sie darauf aufmerksam machen, dass alle ausländischen Werke ohne wesentliche Preiserhöhung durch die Buchhandlung von F. A. Brockhaus in Leipzig zu beziehen sind, welche ihre Thätigkeit dem internationalen literarischen Verkehr mit besonderer Vorliebe zuwendet.

delsverkehr gesetzliche Geltung haben, durch ihre nur geringen Abweichungen von den bestehenden Maassen. Nebenbei bliebe es den Technikern unbenommen, nach dem Meter zu arbeiten und eine einzige Reductionstabelle würde der Vermittelung dienen. SCHLÖMILCH.

Darstellende Optik von F. ENGEL (Lehrer der darstellenden Geometrie) und K. SCHELLBACH (Prof. am Fried.-Wilh. Gymnasium zu Berlin). Nebst 21 Kupfertafeln. Halle, Verlag von H. W. Schmidt. 1856.

So wenig geläugnet werden kann, dass der Weg, den ein Lichtstrahl bei mehreren auf einander folgenden Zurückwerfungen oder Brechungen durchläuft, am genauesten mit Hilfe der Rechnung zu verfolgen ist, so gewiss wird man auch zugeben, dass hierzu immer schon einige analytische Fertigkeit, sowie Uebung im geometrischen Ausdeuten der Rechnungsresultate gehört. Weit schwieriger aber wird die Sache, wenn es sich um die Beurtheilung des optischen Effectes eines zurückgeworfenen oder gebrochenen Strahlenbündels handelt; hier kommt es weniger auf den Weg des einzelnen Strahles als vielmehr auf den geometrischen Ort der Durchschnitte der reflektirten oder gebrochenen Strahlen an, mit anderen Worten, es ist die von letzteren Strahlen eingehüllte Curve, eine sogenannte Brennlinie, zu bestimmen. Die Gleichungen dieser Curven sind so verwickelt und werden durch die verschiedenen Stellungen des Auges so mannichfaltig modificirt, dass selbst nach dem Urtheile eines *Dirichlet* und *Jacobi* „eine rein analytische Behandlung nicht geeignet ist, die grosse Mannichfaltigkeit der hier eintretenden Fälle übersichtlich darzulegen". Dieser wissenschaftlichen Lücke entspricht eine pädagogische; man findet zwar in allen Lehrbüchern der Physik den Weg eines einzelnen Lichtstrahles erörtert, darüber hinaus aber (wie z. B. schon bei der Kugelabweichung) wird der Vortrag referirend, ohne dass irgend ein brauchbares Mittel aufgezeigt würde, welches von den complicirteren Verhältnissen Rechenschaft gäbe. Es war daher ohne Zweifel ein sehr glücklicher Gedanke der Herren Engel und Schellbach, die katoptrischen und dioptrischen Erscheinungen durch graphische Darstellungen zu veranschaulichen, und Referent glaubt den Lesern einen Dienst zu erweisen, wenn er den Inhalt des Werkes etwas näher angiebt.

Taf. I behandelt die Spiegelung und Brechung leuchtender Punkte durch eine Ebene. Hier giebt bereits Fig. 3 das erste und einfachste Beispiel einer Brennlinie; wenn nämlich zwei homogene durchsichtige Media durch eine Ebene getrennt sind und die Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels bei dem Uebergange aus dem einen Mittel in das andere eine Refraction erleiden, so stehen bekanntlich die gebrochenen Strahlen senkrecht auf einem bestimmten Kegelschnitte; die von ihnen eingehüllte Brennlinie ist daher die Evolute jenes Kegelschnitts. Gemäss der Eigenthümlichkeit aller graphischen Methoden ergiebt sich zwar die Natur der Brennlinie nicht unmittelbar, wohl aber erhellt, und das ist hier die Hauptsache, ihre Existenz, und zugleich sind auch die möglichen Spitzen der Curve durch die Construction ihrer Lage nach bestimmt. Die optische Bedeutung derselben für die Sinnesanschauung bespricht der Text. Fig. 4 zeigt die verschiedenen krummlinigen Formen, unter denen ein im Wasser liegender Pfeil von einem über dem Wasser befindlichen Auge in verschiedenen Stellungen gesehen wird,

MEYER, Gymnas.-Prof. Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien. 1. Theil: Planimetrie. 8. Aufl. Mühlheim a. d. Ruhr, Bagel. n. 17½ Ngr.

BRENNECKE, Dir. Dr. Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Mit in den Text gedr. Holzschnitten. Berlin, Enslin. netto ⅜ Thlr.

GALLENKAMP, Rector. Sammlung trigonometrischer Aufgaben. 1. Abth.: Rein mathematische Aufgaben. 2. Ausgabe. Mühlheim a. d. Ruhr, Bagel. netto 12 Ngr.

MEYER, C. Th. und Dr. M. H. Constructive Aufgaben über Kegelschnitte. (Abgedr. aus der axonometrischen Projectionslehre.) Leipzig, Hässel. 1 Thlr.

Arithmétique des écoles primaires; par Crimotel. 7. édition. Paris chez Dézobry, E. Magdeleine.

Arithmétique élémentaire par A. Dumouchel. Ouvrage autorisé par le conseil de l'instruction publique. Paris chez Dézobry, E. Magdeleine.

Traité d'Arithmétique par A. Dumouchel et J. Dupuis. Ouvrage autorisé par l'université. Paris chez Dézobry, E. Magdeleine.

Leçons sur le système métrique et sur les applications de l'arithmétique à la mésure des longueurs, des surfaces etc.; par A. Thirion. 9. édition. Paris chez Dézobry, E. Magdeleine.

Cours élémentaire de trigonométrie rectiligne; par A. Guilmin. Paris. Durand.

Mémoire sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes ou sphériques; par M. A. Serret. (Extrait des Comptes rendues.) Paris, Mallet-Bachelier.

Encyclopédie mathématique, par de Montferrier. 1. partie: Mathématiques pures. Paris. (Complet en 4 volumes ou en 20 livraisons à 15 Ngr.)

Principes de mathématique, arithmétique, algèbre, géométrie et trigonométrie; par l'abbé Chastain. 2. édition. Toulouse chez E. Privat.

Manual of Euclid. Books I and II. By Galbraith and Haughton, Fellows of the Trinity College etc. London, Longman, Brown and Comp.

Kimber. Mathematical course for the university of London. 2. edition. London, Longman. 9 *sh.*

Whewell. Conic sections, their principles proved geometrically. 3. edit. London, Parker and Son. 2 *sh.* 6 *d.*

Davies and Peck. Mathematical Dictionary and cyclopaedia of mathematical science. New-York. 18 *sh.*

Compendio de matematicas puras y mixtas, por Don J. M. Vallejo. Para uso de los colegios de la republica mejicana. Nueva edicion. 2 Vol. Paris chez Garnier frères.

Angewandte Mathematik.

HEYM, Dr. Die Anfertigung des Rechnungsabschlusses von Grabekassen und Krankenkassen. Im Auftrage der K. S. Regierung verfasst. Leipzig, G. Wigand. ½ Th[illegible]

Grundriss für die Vorträge auf der königl. Artillerie- u[illegible] Ingenieurschule zu Berlin. I. Theil: Leitfaden für den Unte[illegible]richt im Planzeichnen, bearbeitet vom Ingenieur-Hauptmann FELL[illegible] Berlin, Behr. netto ⅓ Th[illegible]

PFLEIDERER, Prof. Entwurf einer mathematischen Geographi[illegible] 1. Theil. Stuttgart und Tübingen, Fues. netto ⅓ Thl[illegible]

DOMKE, Navigationslehrer. Nautische, astronomische und logarithmische Tafeln für die k. preuss. Navigationsschulen. 2. Auf[illegible] Berlin, Decker. 2 Thl[illegible]

besonderer Vorliebe verweilt der Verfasser bei der genannten Theorie und bespricht mit ebenso grosser Genauigkeit als Klarheit die beiden auf Tafel XIV verzeichneten Figuren, von denen die erste die Entstehung des Hauptbogens, die zweite die Entstehung der verschiedenen möglichen Nebenbögen erläutert. Uebrigens sind diese Figuren durchaus nicht complicirt und gewähren bei dem gewählten grossen Maassstabe ein vollkommen deutliches Bild.

Auf den noch übrigen fünf Tafeln sind verschiedene einfachere und zusammengesetztere optische Apparate in ihren Wirkungen dargestellt, z. B. die Linse von bester Form, das achromatische Prisma, das achromatische Fernrohr sowohl mit astronomischen als terrestrischen Ocular, das Gregory'sche Spiegelteleskop u. s. w.; der zugehörige Text ist vermöge der früheren einleitenden Betrachtungen kürzer gehalten, ohne jedoch der Deutlichkeit Eintrag zu thun.

Was nun den Schulgebrauch des Werkes anbelangt, so möchten wir nicht rathen, die Originalkupfertafeln den Schülern vorzulegen, denn selbst abgesehen von möglichen Beschädigungen würde es doch nur einer sehr geringen Schülerzahl möglich sein, die Zeichnungen so deutlich zu sehen, dass hierdurch eine wesentliche Förderung der mündlichen Exposition erreicht werden könnte; wir rathen dagegen, die Tafeln in grösserem etwa doppelten Maassstabe copiren und angemessen coloriren zu lassen, was namentlich in Realschulen und polytechnischen Instituten durch die Schüler selbst geschehen kann, diese Zeichnungen als Wandtafeln zu benutzen und daran den Vortrag zu knüpfen. Dieses Verfahren, welches am hiesigen polytechnischen Institute bei allen Gegenständen, von denen keine Modelle zu Gebote stehen, seit Jahren angewendet wird, können wir als ein den besten Erfolg verheissendes allseitig empfehlen.

Schliesslich wünschen wir, dass die vorliegende Anzeige etwas zu einer möglichst weiten Verbreitung des genannten, neuerdings auch in einer englischen Ausgabe erschienenen Werkes beitragen und der Verleger hierdurch einen Ersatz der aufgewendeten, jedenfalls nicht geringen Kosten finden möge.

SCHLÖMILCH.

Programme.

1. Eine Gruppe von Aufgaben über das geradlinige Dreieck. Von Dr. Grebe. Osterprogramm von 1856 des Gymnasiums zu Marburg.

Bekanntlich schneiden sich die drei Höhen des ebenen Dreiecks in einem und denselben Punkte. Dieser liegt beim spitzwinkligen Dreieck, welches die genannte Abhandlung ausschliesslich berücksichtigt, innerhalb der Figur. Dabei erscheinen sowohl die Seiten als die Höhen des Dreiecks als Summen je zweier Abschnitte, so dass im Ganzen zwölf Segmente vorhanden sind; drei von diesen bestimmen im Allgemeinen das Dreieck und es knüpft sich daran die Aufgabe, aus irgend drei Segmenten die übrigen neun und damit das ganze Dreieck zu berechnen. Hierin liegen 43 einzelne Aufgaben, unter denen 28 durch Gleichungen ersten und zweiten Grades lösbar sind, 14 auf Gleichungen höherer Grade führen und eine entweder unmöglich oder unbestimmt ist. Für die 28 ersten giebt der Verfasser die vollständig entwickelten Werthe der jedesmaligen 9 Unbekannten (ohne Beweis, da dieser in den meisten Fällen nicht die geringste Schwierigkeit

Analytical view of Newton's Principia. By H. Lord Brougham and E. J. Routh. London, Longman, Brown and Comp. 14 sh.

Handbook of natural philosophy. By Dion. Lardner. Hydrostatics, Pneumatics and Heat. London, Longman, Brown and Comp. 5 sh.

Gilliss, the United-States Astronomical expedition to the southern hemisphere, during the years 1849, 1850, 1851 *and* 1852. *Washington.* 4 L.

Physik.

Frick, Prof. Dr. Die physikalische Technik. 2. vermehrte und verbesserte Auflage. Braunschweig, Vieweg u. Sohn. netto 2½ Thlr.

Schweigger, Prof. Dr. Ueber Magnetismus in akustischer Beziehung und damit zusammenhängende weltharmonische Gesetze. (Abhandl. d. naturforsch. Ges. zu Halle.) Halle, Schmidt. n. ⅔ Thlr.

Knochenhauer, Dir. Ueber die gemeinsame Wirkung zweier elektrischer Ströme. (Sitzungsber. d. kais. Akademie zu Wien.) Wien, Braumüller. netto ⅓ Thlr.

Dove, H. W. Darstellung der Wärmeerscheinungen durch fünftägige Mittel von 1782—1855 mit besonderer Berücksichtigung der strengen Winter. (Abhandl. d. Berliner Akademie.) Berlin, Dümmler. netto 3 Thlr.

Reichenbah, Dr. C. v. Odisch-magnetische Briefe. Erste Reihe. 2. Ausgabe. Stuttgart, Cotta. netto 27 Ngr.

Martin. Repertorium der Galvanoplastik. Erster Band. Wien, Gerold's Sohn. 1½ Thlr.

Stein, Prof. Die Naturwissenschaften in ihren Beziehungen zu den materiellen und geistigen Interessen der Menschheit. Dresden, Schönfeld. ¼ Thlr.

Erdmann, Prof. Dr. Ueber die Fortschritte der Naturwissenschaften unter der Regierung Sr. Maj. des Königs Fr. Wilhelm IV. Festrede am 15. October 1855. Berlin, Hirschwald. 4 Ngr.

Allgemeine Encyclopädie der Physik, bearbeitet von W. Brix, G. Decher, O. v. Feilitzsch etc., herausgegeben v. G. Karsten. 1. Lieferung. Leipzig, Voss. 2⅔ Thlr.

Heusser. Das Erdbeben im Vispertha le, Kanton Wallis, 1855. (Neujahrsblatt der Züricher naturforsch. Gesellschaft.) 20 Ngr.

Zaborowski, De triplici in materia cohaerendi statu. Disquisitio physica. Posnaniae. 12 Ngr.

Traité élémentaire de physique expérimentale et de météorologie: par A. Ganot. 6. édition. Paris chez l'auteur; rue de Vaugirard 52.

Elémens de physique expérimentale et de météorologie: par M. Pouillet. 7. *édition. Paris, Hachette.* 18 *francs*

Manuel de télégraphie électrique, par L. Breguet. Paris, Vict. Dalmont.

Traité d'éléctricité théorique et appliquée, par A. de la Rive. 2 *vol. Paris* (Erscheint noch Band 3.)

Traité d'éléctricité et de magnétisme, par Ant. et Edm. Becquerel. Tome Magnétisme et électro-magnétisme. Paris. pro Band 2⅔ Thlr.

Carpenter, the microscope and its revelations. Illustrated by 345 *wood-engravings. London.* 5 Th

---

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Uebungen in der Anwendung der Integralrechnung. Von Dr. M. Ohm, Professor etc. Nürnberg, Fr. Korn'sche Buchhandlung. 1856.

Die Ansichten des Verfassers sind so hinreichend bekannt und werden von so Wenigen getheilt, dass wir eine Erörterung derselben für überflüssig halten; es mag in dieser Beziehung die Notiz genügen, dass Herr Prof. Ohm seit der Herausgabe seiner ersten Versuche zur Construktion eines „vollkommen consequenten" Systems der Mathematik nichts gelernt und nichts vergessen hat, wie denn auch hier die in allen Ohm'schen Werken stereotype Redensart „der Anfänger kann aus diesem Buche sehr viel lernen" unverdrossen wiederholt wird. Der Uebungen nun, welche der Verf. mittheilt, sind drei, und diese lassen sich wieder auf eine reduciren, denn man findet im ganzen Buche eigentlich nichts weiter als Beispiele zu der bekannten Aufgabe von der Substitution neuer Variabelen in ein- oder mehrfache bestimmte Integrale. Die erste Uebung betrifft die Umwandlung von

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

mittelst der Substitution $x = \varphi(z)$ unter Rücksicht auf die etwaige Mehrdeutigkeit von $\varphi(z)$. Die zweite Uebung hat es mit dem Doppelintegrale

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy$$

zu thun, dessen Integrationsgrenzen durch eine gegebene Bedingung, z. B. $x^2 + y^2 \leqq h^2$, bestimmt sind; hier werden der Reihe nach die einzelnen Fälle durchgegangen, ob man bloss für x, oder nur für y, oder für x und y gleichzeitig neue Variabeln einführen will, welche mit den ursprünglichen Veränderlichen durch bekannte Gleichungen verbunden sind (wie z. B. beim Uebergange von rechtwinkligen zu Polarcoordinaten: $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$). Eine gleich ausführliche Behandlung wird dem dreifachen Integrale

$$\int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

zum Theil. Die geometrische Bedeutung solcher Transformationen hebt der Verfasser klar und deutlich hervor; für das dreifache Integral namentlich benutzt derselbe die Veranschaulichung, $dx\, dy\, dz$ als Volumenelement,

Meyer, Gymnas.-Prof. Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien. 1. Theil: Planimetrie. 8. Aufl. Mühlheim a. d. Ruhr, Bagel. n. 17½ Ngr.

Brennecke, Dir. Dr. Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Mit in den Text gedr. Holzschnitten. Berlin, Enslin. netto ⅜ Thlr.

Gallenkamp, Rector. Sammlung trigonometrischer Aufgaben. 1. Abth.: Rein mathematische Aufgaben. 2. Ausgabe. Mühlheim a. d. Ruhr, Bagel. netto 12 Ngr.

Meyer, C. Th. und Dr. M. H. Constructive Aufgaben über Kegelschnitte. (Abgedr. aus der axonometrischen Projectionslehre.) Leipzig, Hässel. 1 Thlr.

Arithmétique des écoles primaires; par Crimotel. 7. édition. Paris chez Dézobry, E. Magdeleine.

Arithmétique élémentaire par A. Dumouchel. Ouvrage autorisé par le conseil de l'instruction publique. Paris chez Dézobry, E. Magdeleine.

Traité d'Arithmétique par A. Dumouchel et J. Dupuis. Ouvrage autorisé par l'université. Paris chez Dézobry, E. Magdeleine.

Leçons sur le système métrique et sur les applications de l'arithmétique à la mesure des longueurs, des surfaces etc.: par A. Thirion. 9. édition. Paris chez Dézobry, E. Magdeleine.

Cours élémentaire de trigonométrie rectiligne: par A. Guilmin. Paris. Durand.

Mémoire sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes ou sphériques: par M. A. Serret. (Extrait des Comptes rendues.) Paris, Mallet-Bachelier.

Encyclopédie mathématique, par de Montferrier. 1. partie: Mathématiques pures. Paris. (Complet en 4 volumes ou en 20 livraisons à 15 Ngr.)

Principes de mathématique, arithmétique, algèbre, géométrie et trigonométrie; par l'abbé Chastain. 2. édition. Toulouse chez E. Privat.

Manual of Euclid. Books I and II. By Galbraith and Haughton, Fellows of the Trinity College etc. London, Longman, Brown and Comp.

Kimber. Mathematical course for the university of London. 2. edition. London, Longman. 9 *sh.*

Whewell. Conic sections, their principles proved geometrically. 3. edit. London, Parker and Son. 2 *sh.* 6 *d.*

Davies and Peck. Mathematical Dictionary and cyclopaedia of mathematical science. New-York. 18 *sh.*

Compendio de matematicas puras y mixtas, por Don J. M. Vallejo. Para uso de los colegios de la republica mejicana. Nueva edicion. 2 Vol. Paris chez Garnier frères.

Angewandte Mathematik.

Heym, Dr. Die Anfertigung des Rechnungsabschlusses von Grabekassen und Krankenkassen. Im Auftrage der K. S. Regierung verfasst. Leipzig, G. Wigand. ⅓ Thlr.

Grundriss für die Vorträge auf der königl. Artillerie- und Ingenieurschule zu Berlin. I. Theil: Leitfaden für den Unterricht im Planzeichnen, bearbeitet vom Ingenieur-Hauptmann Feller. Berlin, Behr. netto ⅓ Thlr.

Pfleiderer, Prof. Entwurf einer mathematischen Geographie. 1. Theil. Stuttgart und Tübingen, Fues. netto ⅓ Thlr.

Domke, Navigationslehrer. Nautische, astronomische und logarithmische Tafeln für die k. preuss. Navigationsschulen. 2. Aufl. Berlin, Decker. 2 Thlr.

$$S = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

die Substitution $x = a\varrho \cos\varphi$, $y = b\varrho \sin\varphi$ als sehr erspriesslich, weil sie constante Integrationsgrenzen herbeiführt, nämlich

$$S = ab \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(a\varrho\cos\varphi, b\varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi$$

und nun die Anordnung der Integrationen willkührlich wird; dagegen wäre diese Substitution bei dem Integrale

$$T = \int_0^a \int_0^{a-\frac{x^2}{a}} f(x,y)\,dx\,dy$$

übel angebracht, vielmehr muss man hier $x = ut$, $y = u(1 - t^2)$ setzen um constante Integrationsgrenzen zu erhalten, nämlich

$$T = \int_0^a \int_0^1 f(ut, u - ut^2)\,u\,(1 + t^2)\,du\,dt.$$

Mit nur einiger Gewandtheit entdeckt man dabei leicht die Fälle, in denen die Reduction auf ein einfaches Integral allgemein möglich ist. So ersieht man z. B. aus der zweiten Form von S unmittelbar, dass die Reduction gelingt, sobald $f(x,y)$ eine Funktion von $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ist; etwas Aehnliches gilt für das Integral T wenn $f(x,y) = \varphi'(4x^2 + y^2)$, es wird nämlich nach der zweiten Form

$$T = \int_0^1 \int_0^a \varphi'\,[u^2(1+t^2)^2]\,u\,(1+t^2)\,dt\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\varphi\,[a^2(1+t^2)^2] - \varphi(0)}{1+t^2}\,dt,$$

was, beiläufig bemerkt, nicht bekannt zu sein scheint.

Wir zweifeln nicht, dass das vorliegende Werk des Herrn Prof. Ohm von dessen Verehrern mit der nöthigen Bewunderung hingenommen werden wird, möchten es aber über diesen Kreis hinaus Niemandem empfehlen.

SCHLÖMILCH.

Lehrbuch der unbestimmten Analytik für höhere Lehranstalten. Von W. BERKHAN, Oberlehrer am Gymnasium zu Blankenburg. Erste Abtheilung. (Auch unter dem besonderen Titel: Die Auflösung der Diophantischen Gleichungen ersten Grades.) Halle, bei H. W. Schmidt. 1855.

Bei dem allgemeinen Interesse, welches die unbestimmten Aufgaben von jeher auf sich gezogen haben und bei der geringen Anzahl von aus-

schliesslich diesem Gegenstande gewidmeten Lehrbüchern darf man eine neue Bearbeitung der Diophantischen Probleme als einen zeitgemässen Gedanken bezeichnen; in wie weit der Verfasser bei Ausführung desselben glücklich gewesen ist, wollen wir etwas näher untersuchen.

Gleich *in medium rem* gehend lehrt der Verfasser auf S. 3 das bekannte Verfahren, wonach die Gleichung $ax \pm by = c$ durch successive Substitutionen so lange in andere mit kleineren Coefficienten versehene Gleichungen transformirt wird, bis man auf eine Gleichung kommt, worin einer der Coefficienten der Einheit gleich ist; zur Erläuterung dieser Methode folgt circa ein Dutzend in äusserster Vollständigkeit ausgerechneter Beispiele. Diess ist allerdings sehr praktisch, jedoch wenig wissenschaftlich. Das Verfahren selber begreift sich zwar leicht, nicht aber dessen Nothwendigkeit, jedenfalls durfte es der Verfasser nicht bei der blossen Angabe einer Regel bewenden lassen, deren Pointe (nämlich die fortwährende Verkleinerung der Coefficienten) überdiess unerwähnt bleibt, er hätte im Gegentheil beweisen müssen, dass früher oder später eine Gleichung erscheint, worin ein Coefficient $= 1$ ist, dass man also schliesslich doch zu einer Auflösung gelangt und sich nicht etwa mit endlosen Transformationen im Kreise herumtreibt. Die auf S. 13 stehende Bemerkung, dass bei Gleichungen von der Form $x \pm by = c$ die obige Regel nicht erst angewendet zu werden brauche sondern ohne Weiteres $x = c \pm by$ zu nehmen sei, hätte dann den Anfang machen müssen und es wäre an die Stelle einer unmotivirten Regel der heuristische Gedanke getreten, $ax \pm by = c$ auf eine der Formen $\alpha\xi \pm \eta = \gamma$ oder $\xi \pm \beta\eta = \delta$ zurückzuführen.

Ebensowenig kann sich Referent damit einverstanden erklären, dass erst auf S. 17 gezeigt wird, wie aus e i n e r Auflösung $x = u$ und $y = v$ die allgemeine Auflösung

$$x = u + nb, \quad y = v + na \quad (n \text{ eine beliebige ganze Zahl})$$

folgt, und dass gar erst auf S. 75 die Möglichkeit der Auflösung einer unbestimmten Gleichung nachgewiesen wird. Letztere Deduction musste den Anfang machen und es wäre dann folgende Anordnung entstanden, welche Referent für die einzige von wissenschaftlicher Strenge hält. 1) Wenn die Coefficienten a und b in der Gleichung $ax \pm by = c$ einen gemeinschaftlichen Theiler t haben, so muss dieser auch in c aufgehen, sonst ist die Gleichung in ganzen Zahlen unlösbar. Man dividire also mit t und nenne α, β, γ die Quotienten, so kommt es jetzt auf die Lösung von $\alpha x \pm \beta y = \gamma$ an, worin α und β r e l a t i v e P r i m z a h l e n sind. 2) Die vorstehende Gleichung giebt

$$y = \mp \frac{\alpha x - \gamma}{\beta}$$

und nun liegt gewiss kein Gedanke näher, als versuchsweise für x die ganzen Zahlen 1, 2, 3 . . . . . zu setzen und zuzusehen, ob einmal der Quotient rechter Hand zu einer ganzen Zahl wird. Nimmt man aber für x der Reihe nach 1, 2, 3 . . . . β, so erhält man durch die β verschiedenen Divisoren auch β v e r s c h i e d e n e Reste, wie sich wegen der relativ primen α und β leicht zeigen lässt; alle jene β Reste sind $< \beta$ mithin ist einer $= 0$. 3) Aus der einen hiermit gefundenen Auflösung folgen andere nach den vorhin erwähnten Formeln. 4) Weiss man einmal, dass die Auflösung möglich ist, so kann man zur Auffindung derselben auch verschiedene andere Wege einschlagen; hier reihen sich die mannichfaltigsten Methoden leicht

einander, je nachdem man dem einen oder anderen Grundgedanken folgt.

Ausser dem anfangs genannten Reductionsverfahren theilt der Verfasser noch die Auflösungen durch Kettenbrüche, durch Systembrüche, durch cyklische Perioden und zuletzt eine von Prof. Kunze in Weimar herrührende Methode mit, welche freilich, nach des Verfassers Urtheile, einen aufmerksamen und gewandten Rechner verlangt. Ungern hat Referent die überaus elegante Auflösung vermisst, die Cauchy in seinem *Mémoire sur la resolution des équations indéterminées du premier dégré en nombres entiers* (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, Tome II, Paris* 1841) gegeben hat. Bezeichnet nämlich n die Anzahl der relativen Primzahlen zu N, welche kleiner als N sind, so ist die Auflösung der Gleichung

$$Mx \pm Ny = L \text{ oder } \mp y = \frac{Mx - L}{N}$$

in der einfachen Formel

$$x = LM^{n-1} + Nz$$

enthalten, wo z eine beliebige ganze Zahl bedeutet; vermöge dieses Werthes von x wird nämlich

$$\mp y = L\frac{M^n - 1}{N} + Mz,$$

und hier ist $\frac{M^n - 1}{N}$ eine ganze Zahl zufolge des von Euler erweiterten Fermat'schen Satzes. Diese Auflösung wird zwar in allen den Fällen wo M^n eine grosse Zahl ist, keinen praktischen Vortheil gewähren, aber sie hat dagegen den eigenthümlichen wissenschaftlichen Werth, dass sie ohne alle Zwischenrechnung das Problem auf die Fundamentalaufgabe der Zahlenlehre, nämlich auf die Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren, zurückführt. Ist diese Zerfällung nach dem Schema

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots.$$

gemacht, so hat man bekanntlich

$$n = N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\ldots.$$

und dann sogleich die fertige Lösung. Für die Gleichung

$$5x - 12y = 11$$

ergiebt sich z. B. wegen $N = 12$ und $n = 4$

$$x = 11 . 5^3 + 12z = 1375 + 12z = 7 + 12(114 + z)$$

d. i. wenn $114 + z = s$ gesetzt wird

$$x = 7 + 12s \text{ und } y = \frac{5x - 11}{12} = 2 + 5s;$$

ebenso für die Gleichung

$$5x + 12y = 101,$$

$$x = 101 . 5^3 + 12z = 1 + 12t, \quad y = 8 - 5t.$$

Der Verfasser wird vielleicht einwenden, dass der Beweis dieser Auflösung zu viel Vorbereitungen erfordere; diess ist aber nicht der Fall. Der Euler'sche Satz kann bequem auf einer Seite entwickelt werden und die Ableitung der Formel für n bedarf ebenfalls nur weniger Worte, sobald man sich eines von Dirichlet herrührenden und später durch Andere be-

kannt gewordenen Verfahrens bedient*). Der Raum hierzu würde sich gefunden haben wenn der Verfasser mit Beispielen, oder wenigstens mit vollständig ausgerechneten Beispielen, minder freigebig gewesen wäre.

Betrachten wir das Buch im Ganzen, so möchten wir sagen, dass die wissenschaftliche Seite desselben weniger bedeutend ist als seine technische. Der Verfasser stellt die verschiedenen Auflösungsmethoden neben einander wie es kommt, ohne deren inneren Zusammenhang aufzudecken; dass manche Methode von der anderen sachlich gar nicht sondern nur in der äusseren Anlage der Rechnung abweicht, sagt der Verfasser nirgends und doch wäre diess zur Beförderung einer tieferen Einsicht gerade da sehr nöthig gewesen, wo anscheinend ganz verschiedene Wege zum Ziele führen. Dagegen wollen wir nicht leugnen, dass der Verfasser das, was er giebt, sehr klar und deutlich vorträgt, und wir zweifeln nicht, dass das Buch Lehrern, denen an einer reichen Sammlung von Beispielen für mehrere Auflösungsmethoden gelegen ist, recht willkommen sein wird.

Schlömilch.

*) Wenn die Zahl N nach dem Schema $N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$ in ihre Primfaktoren zerlegt ist, so bilde man folgende Tabelle:

$$1, 2, 3, \ldots . N,$$

$$a, 2a, 3a \ldots \frac{N}{a} a; \quad b, 2b, \ldots \frac{N}{b} b; \quad c, 2c, \ldots \frac{N}{c} c; \ldots .$$

$$ab, 2ab, \ldots \frac{N}{ab} ab; \quad ac, 2ac, \ldots \frac{N}{ac} ac; \quad bc, 2bc, \ldots \frac{N}{bc} bc; \ldots$$

$$abc, 2abc, \ldots \frac{N}{abc} abc; \quad abd, 2abd, \ldots \frac{N}{abd} abd; \ldots .$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

In dieser kommt jede unter N liegende relative Primzahl zu N nur einmal vor (in der ersten Reihe), jede nicht zu N prime Zahl mehrmals. Irgend eine Zahl K, welche nicht relative Primzahl zu N ist, enthalte $\varkappa$ der Faktoren $a, b, c \ldots$, dann kommt K in der ersten Reihe 1 mal, in der zweiten $\varkappa$ mal, in der dritten $\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2}$ mal, in der vierten $\frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{1.2.3}$ mal etc. vor. Addirt man jene Reihen mit wechselnden Zeichen, so hat man K zusammen

$$\left[1 - \frac{\varkappa}{1} + \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2} - \frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{1.2.3} + \ldots\right] \text{mal}$$

d. h. nullmal genommen; bei der erwähnten Addition verschwinden folglich alle Zahlen, die nicht relative Primzahlen zu N sind und es bleiben allein diese letzteren übrig. Will man statt der Summe der relativen Primzahlen ihre Menge wissen, so braucht man nur jede in der obigen Tabelle vorkommende Zahl durch eine 1 zu ersetzen und dann zu addiren, wobei die von nicht relativen Primzahlen herrührenden Einheiten wie vorhin ausfallen; diess giebt

$$n = N - \left(\frac{N}{a} + \frac{N}{b} + \frac{N}{c} + \ldots\right) + \left(\frac{N}{ab} + \frac{N}{ac} + \ldots\right) - \ldots .$$

d. h.

$$n = N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \ldots .$$

Dieses äusserst sinnreiche Verfahren passt auch auf beliebige Funktionen der relativen Primzahlen. Man erhält z. B. die Summe ihrer Quadrate, wenn man statt jeder in obiger Tabelle vorkommenden Zahl deren Quadrat setzt und dann addirt; nach gehöriger Zusammenziehung findet man diese Quadratsumme

$$= \tfrac{1}{3} N (N^2 \pm \tfrac{1}{2} abc \ldots)\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \ldots .$$

$$= \tfrac{1}{3} (N^2 \pm \tfrac{1}{2} abc \ldots) n$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem die Anzahl der Primfaktoren $a, b, c \ldots$ gerade oder ungerade ist.

$$S = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x, y)\, dx\, dy$$

die Substitution $x = a\varrho \cos\varphi$, $y = b\varrho \sin\varphi$ als sehr erspriesslich, weil sie constante Integrationsgrenzen herbeiführt, nämlich

$$S = ab \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(a\varrho \cos\varphi, b\varrho \sin\varphi)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi$$

und nun die Anordnung der Integrationen willkührlich wird; dagegen wäre diese Substitution bei dem Integrale

$$T = \int_0^a \int_0^{a-\frac{x^2}{a}} f(x, y)\, dx\, dy$$

übel angebracht, vielmehr muss man hier $x = ut$, $y = u(1 - t^2)$ setzen um constante Integrationsgrenzen zu erhalten, nämlich

$$T = \int_0^a \int_0^1 f(ut, u - ut^2)\, u\, (1 + t^2)\, du\, dt.$$

Mit nur einiger Gewandtheit entdeckt man dabei leicht die Fälle, in denen die Reduction auf ein einfaches Integral allgemein möglich ist. So ersieht man z. B. aus der zweiten Form von S unmittelbar, dass die Reduction gelingt, sobald $f(x, y)$ eine Funktion von $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ist; etwas Aehnliches gilt für das Integral T wenn $f(x, y) = \varphi'(4x^2 + y^2)$, es wird nämlich nach der zweiten Form

$$T = \int_0^1 \int_0^a \varphi'\, [u^2 (1 + t^2)^2]\, u\, (1 + t^2)\, dt\, du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi\,[a^2 (1 + t^2)^2] - \varphi(0)}{1 + t^2}\, dt,$$

was, beiläufig bemerkt, nicht bekannt zu sein scheint.

Wir zweifeln nicht, dass das vorliegende Werk des Herrn Prof. Ohm von dessen Verehrern mit der nöthigen Bewunderung hingenommen werden wird, möchten es aber über diesen Kreis hinaus Niemandem empfehlen.

SCHLÖMILCH.

Lehrbuch der unbestimmten Analytik für höhere Lehranstalten. Von W. BERKHAN, Oberlehrer am Gymnasium zu Blankenburg. Erste Abtheilung. (Auch unter dem besonderen Titel: Die Auflösung der Diophantischen Gleichungen ersten Grades.) Halle, bei H. W. Schmidt. 1855.

Bei dem allgemeinen Interesse, welches die unbestimmten Aufgaben von jeher auf sich gezogen haben und bei der geringen Anzahl von aus-

in den §§. 12 und 13 abgehandelt; den Beschluss macht im §. 14 die anhangsweise Betrachtung mehrerer anderer Rollcurven.

Wir müssen dem Verfasser das Zeugniss geben, dass er seinen Gegenstand mit eben so viel Fleiss als Geschick bearbeitet hat; den Freunden der cyclischen Curven können wir das Werkchen als eine sehr vollständige Monographie derselben empfehlen, angehende Mathematiker werden es als ein verständlich geschriebenes Uebungsbuch in der analytischen Geometrie, der Differential- und Integralrechnung benutzen können.

SCHLÖMILCH.

Die Naturwissenschaften in ihren Beziehungen zu den materiellen und geistigen Interessen der Menschheit, von W. STEIN, Prof. der Chemie an der Königl. polytechn. Schule zu Dresden. (38 S. 8°.) ¼ Thlr.

Wenn auch diese Gelegenheitsschrift eine Frage behandelt, über deren Beantwortung die meisten Leser dieser Zeitschrift vollständig im Klaren und mit dem Verfasser im vollkommnen Einverständniss sein werden, so hält es Referent doch nicht überflüssig auch hier auf dieselbe aufmerksam zu machen, weil darin in musterhaft einfacher und verständlicher und darum wohl überzeugender und gewinnender Weise das Thema behandelt wird. Die darin niedergelegte Schilderung des wohlthätigen Einflusses der Naturwissenschaften auf Förderung der geistigen wie materiellen Interessen des Menschen ist ein Wort zur rechten Zeit gewissen Anfeindungen gegenüber, welchen die Pflege der Naturwissenschaften aus Missverständniss, so mag man es nennen, ausgesetzt ist, indem oder weil Ueberschreitungen Einzelner auf dem Gebiete naturwissenschaftlicher Speculation fälschlich im Wesen dieser Wissenschaften, statt in allgemeinen Zeitverhältnissen sowie in der Individualität dieser Excedenten — deren es übrigens ja zu allen Zeiten auf allen Gebieten der Wissenschaften gegeben hat — als begründet gesucht und gefunden werden. Die Schrift enthält ferner ein Wort der Beruhigung für ängstliche Gemüther, denen es bei den gewaltigen Fortschritten der Naturwissenschaften und ihres Einflusses auf die gesammte Menschheit bangt, das Heiligste, was sie besitzen und ihren Nachkommen auch unverkürzt vererben möchten, angeblich oder scheinbar unterschätzt und preisgegeben zu sehen oder zu wissen durch rastlose Bestrebungen profanen Menschenwitzes und Wissens. So wenig es nämlich zu billigen und für die Sache der Naturwissenschaften selbst förderlich ist, wenn gewisse Resultate wissenschaftlicher Untersuchungen in einer für den gemeinen Menschenverstand paradoxen Form hingestellt und mit Speculationen gleichsam gespickt werden, welche zum Theil dem Gebiete der betreffenden Wissenschaften gar nicht angehören, zum Theil auch aus einer ähnlichen Effecthascherei hervorgehen, wie sich beispielsweise jetzt auch auf dem Gebiete der dramatischen Kunst und Musik in bizarrer Manier hervorthut — so verwerflich auch dergleichen Kundgebungen sein mögen; so ist es doch andererseits unbestritten wahr, dass einmal, wie schon angedeutet, die Naturwissenschaften und die Gesammtheit ihrer Verehrer und Träger nicht dafür verantwortlich gemacht werden können, und dass zweitens, was die Hauptsache ist, keine Wissenschaft so stark und reichlich die Elemente ihrer eignen Rectification und Purification von möglichen Abwegen und Irrthümern in sich selbst trägt, als die Naturwissenschaften, so dass man in aller

einander, je nachdem man dem einen oder anderen Grundgedanken folgt.

Ausser dem anfangs genannten Reductionsverfahren theilt der Verfasser noch die Auflösungen durch Kettenbrüche, durch Systembrüche, durch cyklische Perioden und zuletzt eine von Prof. Kunze in Weimar herrührende Methode mit, welche freilich, nach des Verfassers Urtheile, einen aufmerksamen und gewandten Rechner verlangt. Ungern hat Referent die überaus elegante Auflösung vermisst, die Cauchy in seinem *Mémoire sur la resolution des équations indéterminées du premier dégré en nombres entiers* (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, Tome II, Paris* 1841) gegeben hat. Bezeichnet nämlich n die Anzahl der relativen Primzahlen zu N, welche kleiner als N sind, so ist die Auflösung der Gleichung

$$Mx \pm Ny = L \text{ oder } \mp y = \frac{Mx - L}{N}$$

in der einfachen Formel

$$x = LM^{n-1} + Nz$$

enthalten, wo z eine beliebige ganze Zahl bedeutet; vermöge dieses Werthes von x wird nämlich

$$\mp y = L\frac{M^n - 1}{N} + Mz,$$

und hier ist $\frac{M^n - 1}{N}$ eine ganze Zahl zufolge des von Euler erweiterten Fermat'schen Satzes. Diese Auflösung wird zwar in allen den Fällen wo M^n eine grosse Zahl ist, keinen praktischen Vortheil gewähren, aber sie hat dagegen den eigenthümlichen wissenschaftlichen Werth, dass sie ohne alle Zwischenrechnung das Problem auf die Fundamentalaufgabe der Zahlenlehre, nämlich auf die Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren, zurückführt. Ist diese Zerfällung nach dem Schema

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots.$$

gemacht, so hat man bekanntlich

$$n = N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\dots.$$

und dann sogleich die fertige Lösung. Für die Gleichung

$$5x - 12y = 11$$

ergiebt sich z. B. wegen $N = 12$ und $n = 4$

$$x = 11 \,.\, 5^3 + 12z = 1375 + 12z = 7 + 12(114 + z)$$

d. i. wenn $114 + z = s$ gesetzt wird

$$x = 7 + 12s \text{ und } y = \frac{5x - 11}{12} = 2 + 5s;$$

ebenso für die Gleichung

$$5x + 12y = 101,$$

$$x = 101 \,.\, 5^3 + 12z = 1 + 12t, \quad y = 8 - 5t.$$

Der Verfasser wird vielleicht einwenden, dass der Beweis dieser Auflösung zu viel Vorbereitungen erfordere; diess ist aber nicht der Fall. Der Euler'sche Satz kann bequem auf einer Seite entwickelt werden und die Ableitung der Formel für n bedarf ebenfalls nur weniger Worte, sobald man sich eines von Dirichlet herrührenden und später durch Andere be-

Beobachtungen in aller Kürze sowohl wie mit hinlänglicher Klarheit auseinandergesetzt sind, und kommt dann (S. 10) auf die Erklärung des Grundeises und seiner Entstehung zu sprechen. Er widerlegt zunächst die häufig sich vorfindende Erklärung, insbesondere auch die in Gehler's physik. Lexicon aufgenommene: „der deutsche Name Grundeis bezeichnet diese Art von Eis so bestimmt, dass es keiner Erklärung bedarf, es ist Eis, welches auf dem Grunde entsteht“ und stellt dem entgegen auf, dass das Grundeis ebenfalls wie jedes andere Eis auf der Oberfläche des Wassers entsteht und als unentwickeltes Treibeis anzusehen ist. Das bei starker Kälte auf der Oberfläche gebildete Eis werde durch den Wind, welcher allen Beobachtungen zufolge bei der Entstehung des Grundeises mitwirkend erscheint, gehindert zu festen zusammenhängenden Stücken anzuwachsen, sodass es nur in zusammengeschobenen Blättchen sich locker verbinde und so mit dem erregten Wasser leichter fortgerissen auch theilweise unter die Oberfläche und bei Stromschnellen selbst tiefer nach dem Grunde zu getrieben werden könne, zumal da bei der lockeren Beschaffenheit desselben der hydrostatische Auftrieb weniger wirksam sei. Ist es auf diese Weise hinter den Stromschnellen, an den sogenannten stauen Stellen, auf dem Grunde angekommen, so werde es, weil daselbst ein verhältnissmässig langsameres Strömen, bisweilen sogar ein Stillstand des Wassers vorhanden ist, an Steinen und sonstigen Erhöhungen sich ansetzen und zwar zuerst wohl schmelzen, doch später, nachdem der Grund dadurch mehr erkaltet ist, bei fortgesetzter Zufuhr in unveränderter Weise sich anlegen und zu compakteren Massen zusammenfrieren. Der Verfasser unterstützt seine Erklärung sowohl durch bekannte physikalische Erscheinungen und Gesetze, als auch durch besondere Beobachtungen von Schiffern und Reisenden, sowie durch seine eignen Erfahrungen in einer eben so wohlgeordneten und klaren wie anspruchlosen Darstellung und Beweisführung. So fest er auch von der Wahrheit seiner Ansichten überzeugt ist, so giebt er doch bescheiden genug dieselben einer weitern Prüfung anheim, wozu er nicht blos auffordert, sondern auch Mittel und Wege anführt, wodurch die Entstehung des Grundeises in allen ihren Einzelheiten festgestellt werden könnte.

Nimmt schon die Berufsstellung des Verfassers die Anerkennung desselben als eines praktisch erfahrenen wie theoretisch durchgebildeten Mannes im Voraus in Anspruch, so giebt auch der Inhalt des Schriftchens diesem vorausgenommenen Urtheil nachträglich eine beachtenswerthe Begründung. WITZSCHEL.

Anfangsgründe der Physik, für den Unterricht in den obern Klassen der Gymnasien und Realschulen, sowie zum Selbstunterricht, von K. KOPPE, Prof. und Oberl. am Königl. Pr. Gymnasium zu Soest. 5. Auflage, 8. 412 S. mit eingedruckten Holzschn. Essen, Bädecker. 1 Thlr. 5 Ngr.

Dieses für den ersten Unterricht in der Physik ganz treffliche Lehrbuch ist schon vielseitig in den früheren Auflagen günstig beurtheilt worden; die in verhältnissmäsig kurzem Zeitraume nöthig gewordene 5. Auflage legt gleichfalls von der Brauchbarkeit desselben ein auffallendes Zeugniss ab. In der That, sein gedrängter Inhalt bei einer mässigen Bogenzahl, seine Reichhaltigkeit erklärender Figuren, in deren Ausführung

Die cyclischen Curven. Von Dr. H. WEISSENBORN. Eisenach, bei J. Fr. Baerecke.

Der Verfasser giebt in der Vorrede zwei Gründe an, die ihn zur Herausgabe seiner Schrift bewogen haben. Er weist zunächst darauf hin, dass die Cycloiden für die Mechanik der irdischen Körper (d. h. für die Maschinenlehre) von eben so grosser Wichtigkeit sind wie die Kegelschnitte für die Mechanik des Himmels, dass aber trotzdem eine Monographie der cyclischen Curven mit besonderer Rücksicht auf die in der Praxis hauptsächlich vorkommenden verlängerten und verkürzten Cycloiden zur Zeit noch fehle. Als zweiten Grund bezeichnet der Verfasser ein gewisses methodisches Interesse und äussert sich hierüber wie folgt: „Da in den Lehrbüchern der Differentialrechnung fast immer angenommen ist, die Ordinate sei unmittelbar als Funktion der Abscisse gegeben, so leuchtet von selbst ein, dass bei den cyclischen Curven, bei denen beide Coordinaten durch eine dritte Variable ausgedrückt sind, die aufgestellten Regeln nicht anwendbar sind.“ So gern Referent den ersten Grund als einen vollgültigen anerkennt, so wenig scheint ihm der zweite von Gewicht zu sein; der Berührungswinkel τ ist durch die Formel

$$\tan\tau = Lim\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

unter allen Umständen bestimmt, die Curve mag herkommen wo sie will, ja selbst, wenn sie durch einen beliebigen regellosen Zug mit dem Bleistifte entstanden wäre; ebendesswegen ist es auch ganz gleichgültig, ob man sich y als Funktion von x, oder x als Funktion von y, oder endlich beide Coordinaten als Funktionen einer dritten Variabele t denkt, nur hat man im letzteren Falle selbstverständlich auch dx und dy durch t auszudrücken. Die Polemik des Verfassers richtet sich hier gegen eine Anschauungsweise, die man bei den besseren Schriftstellern wohl kaum antreffen möchte.

Wenden wir uns zum Buche selbst, so finden wir zuerst eine recht gute durch scharfe Begriffsbestimmung ausgezeichnete Classification der Curven nach ihrer Entstehungsweise, woran sich in §. 2 die Construction der verschiedenen Cycloiden anschliesst. Hieraus werden in §. 3 die Gleichungen der betreffenden Curven und daraus in §. 4 die verschiedenen Constructionen für die Tangenten und Normalen an denselben abgeleitet. Die in dem vorigen Paragraphen durch Anwendung der Differentialrechnung gefundenen Resultate verificirt der Verfasser in §. 5 auf elementarem Wege mittelst phoronomischer Betrachtungen, die wir für eine der gelungensten Partieen des Buches halten. §. 6 behandelt die Rectification und Quadratur der Cycloiden, §. 7 ihre Krümmungshalbmesser und Evoluten; hier, sowie in den drei folgenden Paragraphen, welche sich mit verschiedenen geometrischen Eigenschaften der cyclischen Curven beschäftigen, findet man eine reichhaltige Sammlung theils bekannter theils neuer Constructionen und Lehrsätze, die übrigens fast immer allgemein d. h. so gehalten sind, dass sie auf alle Arten von Cycloiden gleichförmig passen.

In §. 11 verallgemeinert der Verfasser den Begriff der Cycloide insofern, als er die Ebene des wälzenden Kreises nicht mehr mit der Ebene des ruhenden Kreises zusammenfallen sondern um irgend einen Winkel gegen dieselbe geneigt sein lässt; die entstehenden Cycloiden werden in diesem Falle zu sphärischen Curven.

Die verschiedenen mechanischen und physikalischen Eigenschaften der cyclischen Curven (z. B. Brachistochrone, Catacaustica und dergl.) sind

licher Anzahl (20), von denen nur ein geringer Theil bekannt zu sein scheint. Die kurze elegante Darstellung und ihre netten Resultate werden sich ohne Zweifel viele Freunde gewinnen, welche das Schriftchen beim Unterrichte und namentlich bei der Einübung der ursprünglichsten trigonometrischen Formeln gut gebrauchen dürften.

---

3. Ueber das Florentiner Problem. Von Dr. Kloss. Osterprogramm für 1856 des Gymnasiums zu Bautzen.

Viviani stellte bekanntlich den Geometern seiner Zeit die Aufgabe, eine sphärische Curve zu finden, deren Fläche entweder selbst geometrisch quadrirbar ist, oder, von einem angebbaren Theile der Kugelfläche weggenommen, einen quadrirbaren Rest übrig lässt. Die Bestimmung dieser sphärischen Curve geschieht analytisch durch ihre Projection auf die Ebene eines grössten Kugelkreises, und schon Euler hat auf diesem Wege bemerkt, dass die Aufgabe unendlich viel Lösungen zulässt. Die einfachste, von Viviani selbst gefundene Lösung giebt ein Kreis, dessen Durchmesser dem Halbmesser der Kugel gleichkommt; die sphärische Curve ist dann einer der beiden Durchschnitte der Kugel mit demjenigen geraden Cylinder, welcher auf der Ebene eines grössten Kreises senkrecht steht und jenen kleinen Kreis zum normalen Querschnitte hat. Hierzu bemerkte Montucla, dass auch der von der Kugelfläche begrenzte Theil des Cylindermantels leicht quadrirbar und zwar gleich dem Quadrate des Kugeldurchmessers ist; ferner zeigte Bossut, dass der Inhalt dieses Cylinders, vom Inhalte der ihn einschliessenden Halbkugel weggenommen, einen Rest $= \frac{1}{9}$ vom Cubus des Kugeldurchmessers übrig lässt; endlich hat Fuss nachgewiesen, dass der Umfang eines der Durchschnitte von Kugel und Cylinder dem halben Umfange einer Ellipse gleichkommt, deren kleine Halbachse und deren lineare Excentricität mit dem Kugelradius übereinstimmt. Diesen einfachen und eleganten metrischen Relationen sind in neuerer Zeit durch Herrn Prof. Drobisch noch mehrere angereiht worden, namentlich in Folge der Bemerkung, dass jede Auflösung des Florentiner Problems zwei connexe Lösungen mit sich führt, welche durch Projection der einmal gefundenen sphärischen Curve auf zwei andere zu zu der ersten Ebene senkrechte Ebenen grösster Kreise entstehen (Abhandl. d. mathem.-physikal. Classe der K. S. Ges. d. W. Bd. I. S. 431 und Berichte derselben Gesellschaft aus dem Jahre 1854, S. 14). An die letzteren Arbeiten schliesst sich die Abhandlung des Verfassers insofern an, als sie vorzüglich darauf ausgeht, zwischen der Mantelfläche oder dem Volumen des projicirenden Cylinders und der Oberfläche oder dem Inhalte des durchbrochenen Gewölbes einfache Verhältnisse aufzufinden. Dabei wird die allgemeinere Voraussetzung gemacht, dass das Gewölbe keine Kugel, sondern ein zwei- oder dreiachsiges Ellipsoid oder ein Paraboloid sei und in der That lässt sich ein grosser Theil der vorhin genannten Sätze in entsprechender Weise auf diese Annahme übertragen. Darstellung und Calcul des Verfassers zeichnen sich durch Uebersichtlichkeit und Eleganz vortheilhaft aus; Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten werden die gegebenen Entwickelungen als Beispiele für Cubaturen, Complanationen etc. ohne Zweifel sehr willkommen sein.

Schlömilch.

---

4. Bemerkungen zur Methode des physikalischen Unterrichts, von Dr. LANGGUTH, Programm des Stiftsgymnasiums in Zeitz 1856.

Der Verfasser entwickelt in dieser Gelegenheitsschrift Ansichten über die Anlage und Betreibung des physikalischen Unterrichts (auf Gymnasien) denen man im Allgemeinen durchgängig beipflichten kann, wenn sich auch bezüglich der besonderen Ausführung der aufgestellten Grundsätze und des von ihm gegebenen Abrisses von dem mechanischen Theile der Physik abweichende Meinungen geltend machen und durchführen liessen. Ob z. B. die Bewegungslehre erst nach der Lehre vom Gleichgewicht für alle drei Aggregatzustände folgen, oder dieselbe für jeden Aggregatzustand gesondert der Statik der betreffenden Körper unmittelbar angereiht werden soll, darüber können unterschiedliche Verhältnisse maassgebend werden, sodass man weder die eine noch andere Anordnung vorzugsweise rathsam oder verwerflich finden kann. Sehr richtig aber citirt der Verfasser in Betreff der gewöhnlichen Darstellungen der Physik in den meisten Lehrbüchern die Worte D'Alembert's: „Man ist mehr bemüht gewesen, das Gebäude der Mechanik zu vergrössern, als dessen Eingange Licht zu geben; man hat den Bau immer fortgesetzt, ohne für die gehörige Festigkeit des Grundes zu sorgen." Es ist vielleicht nirgends nöthiger und unabweislicher dieser Worte stets eingedenk zu sein, als beim Unterrichte der Physik auf Gymnasien, oder überhaupt auf allen den Anstalten, wo es nicht blos auf Vermehrung der positiven Kenntnisse der Schüler, sondern hauptsächlich mit auf die regelrechte Ausbildung ihrer Geisteskräfte ankommt, nicht blos auf Nahrung für den Verstand, sondern auch auf eine harmonische Entwickelung desselben abgesehen ist. Derselbe Grund ist es auch, welcher Referenten bestimmt hat, in dem von ihm herausgegebenen Lehrbuche der Physik (Leipzig bei O. Wigand) den mechanischen Abschnitten einen verhältnissmässig grössern Theil vom Ganzen einzuräumen, als es gewöhnlich der Fall ist (M. s. die Vorrede).

Herr Dr. LANGGUTH giebt sodann von einer experimentalen Darstellung einen Abriss der Statik und Mechanik der ponderabelen Körper in den 3 Aggregatzuständen, womit man im Ganzen genommen sich recht wohl einverstanden erklären kann; namentlich ist die Entwickelung der Hebelgesetze und der darauf gegründeten Zusammensetzung von Kräften, welche einen Punkt wirken, beachtenswerth, wenn auch nicht ganz neu. Ob aber der Verfasser bei consequenter Ausarbeitung und Durchführung des in diesem Abrisse Angedeuteten nicht auf einzelne Schwierigkeiten stossen würde, die sich zwar verdecken nicht aber so leicht heben lassen, mag dahingestellt bleiben. So ist die Ausdehnung des Hebelgesetzes auf den Winkelhebel, ohne Anwendung der Rolle (wenn man nicht das Gesetz des gleicharmigen Winkelhebels anticipiren will) nicht gut experimentell nachzuweisen oder auf das Gesetz des gradarmigen Hebels zu basiren, so lange der Einfluss der Richtung der Kraft auf deren Wirkung ausser Betracht bleiben soll. Prof. Müller hat daher in seinem Lehrbuche doch so ganz Unrecht nicht, wenn er, wie Herr Dr. Langguth bemerkt, „als von selbst verstehend" annimmt, dass eine Kraft in ihrer Wirkung nicht verändert wird, wenn man sie an einem über eine Rolle gelegten Faden wirken lässt. Man kann diesen Satz eben so gut als Grundsatz oder von gleicher Evidenz annehmen, wie den von Herrn Dr. L. an die Spitze gestellten Archimedischen Grundsatz vom gleicharmigen Hebel, man braucht nur hinzuzufügen, dass es

gleichgültig ist, ob die gleichen Arme einen gestreckten oder einen andern beliebigen Winkel mit einander bilden.

Ferner heisst es im zweiten Abschnitt des gegebenen Abrisses (S. 15) bei Entwickelung der Fallgesetze vermittels der schiefen Ebene:

„§. 1. Durch Versuche ergeben sich zunächst folgende drei Gesetze:

1. Alle Körper fallen im luftleeren Raume gleich schnell.
2. Die auf einer schiefen Ebene in verschiedenen Zeitabschnitten durchlaufenen Räume verhalten sich wie die Quadrate der während des Fallens verflossenen Zeiten.
3. In einem vertikalen Kreise werden alle Sehnen, welche in dem tiefsten Punkte desselben zusammenstossen, in derselben Zeit durchlaufen. Da nun der Quotient einer Sehne durch den Sinus des Winkels, welche sie mit der im tiefsten Punkte an den Kreis gezogenen Tangente bildet, gleich der vertikalen Sehne ist, so ist leicht einzusehen, dass das Fallgesetz der schiefen Ebene auch für den freien Fall Geltung hat."

Wie der unter Nr. 3. zuerst bemerkte Satz durch unmittelbaren Versuch sich ergiebt, darüber wäre eine nähere Angabe von Seiten des Herrn Verfassers recht erwünscht gewesen!

Im Uebrigen aber würde, wie schon angedeutet, eine weitere Ausführung des gegebenen Abrisses und eine in diesem Sinne gegebenen Verarbeitung des ganzen Gebietes der Physik gewiss eine nicht unverdienstliche Arbeit sein, so wenig es auch Mangel an physikalischen Lehrbüchern, Leitfaden und dergleichen giebt. WITZSCHEL.

Bibliographie

vom 15. April bis 1. Juni 1856.

Periodische Schriften.

Journal für reine und angewandte Mathematik v. A. L. CRELLE. Bd. 52, Heft 1 u. 2. Berlin, Reimer. compl. 4 Thlr.

Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereines; in dessen Auftr. herausgeg. von d. K. preuss. Telegraphendirection. Redigirt von Dr. P. W. BRIX. Jahrgang III, 1856. 1. Heft. (Compl. in 12 Heften). Berlin, Ernst u. Korn. compl. n. 6⅔ Thlr.

Mélanges physiques et chimiques, tirés du bulletin physico-mathématique de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome II, livraison 4. Leipzig, Voss. 14 Ngr.

Société des sciences naturelles du grand duché de Luxembourg. Tome 3. *Luxembourg, Bück.* 1⅓ Thlr.

Annual of scientific discovery, or, Year-Book of facts in science and art for 1856. *Edited by D. Wells. Boston. London.* 7 *sh.* 6 *d.*

Annali di scienze matematiche et fisiche, compilati par B. Tortolini. 1856; *Nr.* 2. *Roma.*

Annuario marittimo per l'anno 1856 *compilato dal Lloyd austriaco coll' approvazione dell' eccelso i. r. governo centrale marittimo. IV. Annata. Trieste, Direzione del Lloyd austr.* n. 1 Thlr.

Annuario del Reale osservatorio astronomico di Napoli per l'anno 1856, *o si Almanacco annuale, che contiene inoltre particolari tavole utili e necessarie alla Nautica, Gnomonica, Geografia e scienze affini. Napoli.* 1 Thlr. 18 Ngr.

das Wesentliche berücksichtigt, jeder überflüssige Luxus aber vermieden ist, und seine Wohlfeilheit machen das Lehrbuch in mehr als einer Hinsicht zur Einführung in Schulen empfehlenswerth und es haben, wie auch der Erfolg zeigt, sowohl der Verfasser, wie die Verlagsbuchhandlung ihre Aufgabe recht wohl begriffen und durchgeführt, wenn sie diesem Werke möglichst viele Freunde erwerben wollten. In der Anordnung des Lehrstoffes unterscheidet sich das Lehrbuch nicht wesentlich von anderen, doch ist die Darstellung von der Art, dass der Lehrer nach Bedürfniss von der im Buche gegebenen Reihenfolge der einzelnen Theile der Physik ohne besondere Schwierigkeiten abweichen kann. Ob daher von den drei Hauptabtheilungen und den Unterabtheilungen derselben, in welche der Verfasser den Inhalt des Ganzen getheilt hat (erste Abtheil. mechanische Erscheinungen, zweite Abth. chemische, magnetische und elektrische Erscheinungen, dritte Abth. Schall, Licht, Wärme) der eine oder andere Abschnitt dem Schüler eher oder später vorgeführt wird, verbleibt hiernach unwesentlich; bei der im Buche gegebenen Anordnung beabsichtigte vielmehr der Verfasser, wie recht, dass jede für einen Jahrescursus bestimmte Abtheilung des Lehrbuchs in ihren einzelnen Abschnitten ein gehörig geordnetes Ganze bilde. Gegen die Einreihung der einen oder andern Erscheinung und ihrer Erklärung sowie des bezüglichen Gesetzes an dem gegebenen Platze lässt sich zwar Manches einwenden (z. B. Capillarität, Endosmose §. 14. u. 15. in die Einleitung gestellt, statt nach der Entwickelung der hydrostatischen Gesetze, zu welchen jene Erscheinungen doch in eine Art Gegensatz treten; ferner die Einschiebung der Begriffserklärungen von Wirkungsfähigkeit, lebendiger Kraft behufs der Ableitung der Pendelgesetze, statt jenen weit greifenden und wichtigen Begriffen eine abgesonderte Darstellung an passender Stelle einzuräumen); doch ist nicht zu verkennen, dass der Verfasser bei Herausgabe einer neuen Auflage seines schon weit verbreiteten Schulbuches auf die früheren Auflagen bisweilen mehr Rücksicht nehmen muss, als es ihm vielleicht selbst nach seinen eignen wie fremden Erfahrungen im betreffenden Lehrfache wünschenswerth sein mag. Uebrigens bleiben dergleichen Ausstellungen von wenig Belang für die Beurtheilung des Ganzen und werden eben so wenig wie früher die günstige Aufnahme auch dieser Auflage wesentlich beeinträchtigen. WITZSCHEL.

Programme.

2. Ueber die Proportionalität von Stücken des geradlinigen Dreiecks mit den trigonometrischen Functionen der ganzen, halben und doppelten Winkel desselben. Von DR. GREBE. Osterprogramm für 1856 der Realschule zu Cassel *).

Der Fundamentalsatz der Trigonometrie, dass die Seiten eines ebenen Dreiecks dem Sinus der Gegenwinkel proportional sind, hat den Verfasser zu der Frage veranlasst, ob es nicht Dreiecksstücke giebt, welche sich wie die Cosinus, Tangenten etc. der ganzen, halben oder doppelten Winkel verhalten. Derartige Beziehungen findet der Verfasser in nicht unbeträcht-

*) Herr Dr. Grebe wurde im Herbste des vorigen Jahres vom Gymnasium in Marburg als Director der Realschule nach Cassel versetzt; hieraus erklärt sich, dass zu Ostern dieses Jahres zwei zu verschiedenen Schulen gehörende Programme desselben Verfassers erscheinen konnten.

Tables of the Moon, constructed from Plana's theory with Airy's and Longstreth's corrections. Washington. 21 *sh.*

Tables of the Moon's Parallax, constructed from Walker's and Adam's formulae. Washington. 5 *sh.*

Physik.

Kunzek, A. Studien aus der höheren Physik. Wien, Braumüller's Verlagsconto. 2 Thlr. 4 Ngr.

Reichenbach, v. Odische Erwiderungen an die Herren Prof. Fortlage, Schleiden, Fechner und Carus. Wien, Braumüller's Verlagsconto. 16 Ngr.

Berghaus, H. Grundlinien der physikalischen Erdbeschreibung. 2. Ausg. Stuttgart, Hallberger. 27 Ngr.

Tuxen, Marinelieutn. Die Deviation der Compassnadel, sowie Regeln für die Aufstellung und Untersuchung des Compasses am Bord. In's Deutsche übertr. v. Navigationslehrer Graff. Stettin, Müller. n. 12½ Ngr.

Weber, Bootsmeister. Die Entstehung des Grundeises, nach Erfahrungssätzen und physikalischen Regeln erläutert. Schandau (Dresden, Burdach). n. ⅙ Thlr.

Hausmann, J. Fr. L. Ueber die durch Molecularbewegungen in starren leblosen Körpern bewirkten Formveränderungen. (Abhandl. d. Göttinger Gesellsch. der Wissensch.) Göttingen, Dietrich. n. 1½ Thlr.

Gartenhauser, C. G. Gemeinfassliche Naturlehre auf bekannte Erscheinungen des täglichen Lebens gestützt. Carlsruhe, Braun. 16 Ngr.

Am Himmel und auf der Erde. Naturwissenschaftliche Unterhaltungen. Mit Beiträgen von Dr. L. Heros, Prof. Dr. Mädler etc., herausgegeben von Ant. Gubitz. Mit Holzschnitten im Texte. Berlin, Vereinsbuchhandlung. 1½ Thlr.

Göbel, Ad. Untersuchung eines am 29. April (1. Mai) 1855 auf Oesel niedergefallenen Meteorsteines. (Aus dem Archiv für die Naturkunde Liv-, Esth- u. Kurlands.) Dorpat, Gläser. 9 Ngr.

Kessler, Dr. Photographie auf Stahl, Kupfer und Stein, zur Anfertigung von Druckplatten. Berlin, artistische Anstalt. Verklebt. 1 Thlr.

Kohlrausch und W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitätsmessungen auf absolutes Maass. (Aus den Abhandl. der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig). Leipzig, Hirzel. n. 16 Ngr.

Pisko, Gymnas.-Lehrer. Lehrbuch der Physik für Unterrealschulen. 2. Aufl. Mit Holzschnitten im Texte. Brünn, Winiker. n. 24 Ngr.

Schenkl, Dr. Der Barometer und seine Benutzung, vorzüglich als Instrument zum Höhenmessen. Brünn, Winiker. n. 8 Ngr.

Déscription de quelques instruments météorologiques et magnétiques; par Fr. Bonalds ancien directeur de l'observatoire de Kew. Paris, impr. de Brière.

Sartorius v. Waltershausen. Gauss zum Gedächtniss. Leipzig, Hirzel. n. 1 Thlr.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwicklung von Leibniz bis auf Lagrange, als ein historisch-kritischer Beitrag zur Geschichte der Mathematik dargestellt von Dr. HERMANN WEISSENBORN. Halle 1856.

Ueber Zweck und Plan dieses Werkchens giebt der Herr Verfasser selbst in der Vorrede uns Auskunft. Es soll nur „eine Darstellung der Principien der höheren Analysis sein, weil die Aufstellung derselben der bei weitem schwierigste und wichtigste Schritt in der Geschichte der Mathematik war, und weil ihre Begründung eine so mannigfaltige für den Mathematiker sowohl als Philosophen interessante ist.“ Eine historische Darstellung wird gewählt, weil „einmal durch die Entwicklungsgeschichte einer jeden Wissenschaft ein richtiges Urtheil über den gegenwärtigen Stand derselben ermöglicht und zweitens durch sie vermöge der von ihr hervorgebrachten Erweiterung des Gesichtskreises die allgemeine Bildung gefördert wird.“ Und endlich als historisch-kritisch wird die Arbeit bezeichnet, weil der Verfasser, „um ein möglich treues Bild von der Art und Weise, wie sich ein jeder der in dieser Schrift erwähnten Männer ausdrückte, zu verschaffen, die Sätze erst in der Form wiedergab, wie sie sich bei ihnen finden, sodann aber, indem er das ihnen zu Grunde liegende Princip hinzustellen versuchte, sie einestheils in der jetzigen Sprache der Wissenschaft ausdrückte, anderntheils ihre Richtigkeit oder Unrichtigkeit prüfte.“

Sehen wir nun im Einzelnen zu, wie diese Aufgabe von dem Herrn Verfasser gelöst wird.

Nachdem das Hauptverdienst Descartes mit Recht darin gefunden wird, dass er zuerst den Begriff der Veränderung in die Geometrie einführte, giebt Herr W. eine Eintheilung sämmtlicher auf Descartes fussenden Arbeiten nach drei Kategorien. Die erste umfasst die Arbeiten, „welche vom Begriffe der Funktion ausgehend die Natur der Curven untersuchen,“ wie Lagrange's Derivationsrechnung. In der zweiten sind umgekehrt diejenigen Entdeckungen enthalten, bei welchen, von der Geometrie ausgehend, die Analysis ihre weitere Ausbildung fand, d. h. die Differenzial- und Integralrechnung seit Leibniz. Endlich als dritte Methode wird die genannt, welche auf die reine Bewegungslehre oder die Phoronomie sich stützt, und welche die Newton'sche Fluxionsrechnung bildet. Auf diesen Eintheilungsgrund hin zerfällt das Buch in drei Kapitel:

1. die Fluxionsrechnung,
2. die Differenzialrechnung,
3. die Derivationsrechnung,

indem die drei Methoden nach ihrer historischen Zeitfolge durchgenommen werden. Die für sämmtliche Kategorieen wichtigen Vorarbeiten von Descartes, Fermat, Cavaleri werden als bekannt vorausgesetzt und so wird denn Roberval als der erste genannt, in dessen Auflösung des Tangentenproblems eine phoronomische Anschauung zu Tage kommt, indem immer zwei oder mehrere Bewegungen gesucht werden, vermittelst deren die Curve entstanden gedacht werden kann, und die Resultante dieser zu Kräfteparallelogrammen vereinigten Richtungen als die Tangente im betreffenden Curvenpunkte sich erweist. Wenn daher der Herr Verf. (S. 8) den Satz ausspricht: „diese Methode könne mit Klarheit und ohne Zwang nur dann angewandt werden, wenn eine Definition zu Grunde gelegt worden ist, die die Vorstellung einer continuirlichen Bewegung involvirt,“ so scheint uns dieses eine Tautologie, da das Aufsuchen dieser Definition selbst schon zu der Methode gehört, und wenn an einzelnen Beispielen gezeigt wird, wie die Methode bald mehr bald minder klar, so möchte dieses weniger an dem ersten Erfinder liegen, als an dem Verfasser des Aufsatzes: *Observations sur la composition des mouvements etc.* Diese Abhandlung rührt nämlich bekanntlich von einem anonymen Schüler Robervals her, der, wie die handschriftlichen Randbemerkungen des letzteren verrathen, nicht immer durch die Art seiner Auseinandersetzung dessen Zufriedenheit erwarb, wenn auch Roberval den ganzen Aufsatz 1668 zum Thema eines Vortrages in der Academie machte.

Eine fernere Ausstellung, die wir in Bezug auf Robervals Arbeiten zu machen haben, ist die, dass seine Quadratur der Cycloide gleich hier behandelt wird, während sie offenbar dem Principe nach zu den Anfängen der Differentialrechnung gehört, gleichwie die zweite Tangentenmethode Barrow's, die der Herr Verf. mit vollem Rechte von den übrigen Arbeiten dieses Autors abgesondert hat.

Die erste Tangentenmethode Barrow's, die sich von Roberval's Methode nur dadurch wesentlich unterscheidet, dass der Begriff der Geschwindigkeit klarer hingestellt ist, und dass die Bewegungen, welche die Curve erzeugen, auf zwei bestimmte Linien (*directrix* und *generatrix*) zurückgeführt werden, findet ihre verdiente ausführliche Darstellung (S. 16—21), die zugleich als Einleitung zu den Arbeiten Newton's dient.

Wir konnten uns für diese leider nicht dieselben Ausgaben verschaffen, deren Herr W. sich bediente; doch dürfte der Unterschied der Texte bei Horsley und Castillon meistens nur wenig bedeutend sein, namentlich in der Hauptabhandlung *De quadratura curvarum* und in der *Analysis per aequationes etc.*, die zuerst lateinisch erschienen; wenn auch die *methodus fluxionum etc.* eine grössere Verschiedenheit zulässt, da Castillon sie erst aus dem Englischen (Colson) und Französischen (Buffon) ins Lateinische zurückübersetzte. Von den *Principia philosophiae naturalis mathematica* benutzten wir die Ausgabe: Amsterdam 1723 (ein Abdruck der sogenannten Bentley'schen Ausgabe von 1713).

Wir würden uns desshalb fast scheuen, einige Citate des Herrn Verf. zu berichtigen, wenn nicht ähnliche Irrthümer auch an Stellen vorkämen, wo uns sicherlich dieselbe Quelle zu Gebote stand, und wo der Fehler offenbar eine Vergesslichkeit des Herrn Verf. ist, dem bei an drei Jahre lan-

gem Zurücklegen seiner Arbeit Manches aus dem Gedächtnisse geschwunden sein mag. So ist (S. 26 in der Note) eine Stelle aus der *Quadrat. curv.* citirt, welche sich in dieser ganzen Abhandlung nicht findet, wohl aber in der *Methodus fluxionum, Probl. II, praeparatio in solutionem* (*ed. Cast. I, pag.* 63). S. 56 in der Note ist statt *Propositio IX.*, *Propositio XI.* zu lesen. S. 116 ist aus den *acta erudit.* 1694 pag. 437 angegeben, Bernoulli schreibe *omn. ydx*, während an der angegebenen Stelle *integr. ydx* steht und *omn.* in dieser Bedeutung nur in anderen Aufsätzen vorkommt. S. 119 in der Note ist *Acta erudit.* 1696 pag. 78 statt pag. 82 citirt. Wenn wir auf diese Mängel aufmerksam machen, so geschieht es, weil wir aus Erfahrung wissen, wie unangenehm ein falsches Citat für den aufmerksamen Leser ist. Eine ähnliche Vergesslichkeit ist wohl Schuld daran, wenn (S. 45 in der Note) zuerst richtig citirt ist: *Newton conçoit les fluxions comme les dernières raisons* ... und dann übersetzt wird *les fluxions sont comme les dernières raisons* ..., was natürlich den Sinn durchaus verändert und Gelegenheit giebt Montucla der Begriffsverwirrung zu beschuldigen. Nicht weniger setzte uns in Erstaunen, wie der Herr Verf. (S. 77 in der Note) behaupten kann, Leibniz habe den Barrow vor der Entdeckung der Differenzialrechnung studirt, und zur Unterstützung die Stelle anführt: *ubi magnam partem meorum theorematum praereptam vidi*, die offenbar grade beweist, dass Leibniz die *theoremata* schon besass, als er des Barrow *Lectiones* zum ersten Male sah. Zudem sagt Leibniz in den *acta erudit.* 1686, pag. 298, nachdem er von dem charakteristischen Dreiecke gesprochen, *unde statim innumera theoremata nullo negotio condebam quorum partem postea apud Gregorios et Barrovium deprehendi.* Doch kehren wir zu Newton und dessen Fluxionsrechnung zurück.

Zuerst ist (S. 22) von der Abhandlung *de analysi per aequationes etc.* die Rede und der darin enthaltenen Quadratur der parabolischen Curven, die allerdings in dem verschwindenden Wachsthume der Fläche den Grundgedanken der sich später klarer entwickelnden Methode benutzt. Doch dürfte es zu weit gegangen sein (S. 23) zu behaupten, Newton bezeichne hier das Increment der Abscisse von vornherein durch Null; das Increment wird vielmehr durch *o* bezeichnet, wie deutlich aus der Stelle hervorgeht: *si jam supponamus Bβ in infinitum diminui et evanescere, sive o esse nihil, erunt v et y aequales* (*Demonstratio quadraturae Curvarum simplicium in regula prima, praeparatio pro regula prima demonstranda; ed. Cast. I, pag.* 25).

Das eigentliche System der Fluxionsrechnung wird hierauf (S. 24 flgg.) entwickelt, wie es sich in der *Methodus fluxionum*, in der *Quadratura curvarum* und in den *Principia philosophiae* ausspricht. Es wird gezeigt, wie Raum und Zeit nur durch dritte Grössen, welche dieselben repräsentiren, verglichen werden können, und wie als diese dritte Grössen gewisse Linien, Coordinaten benutzt werden, die als solche ab- und zunehmend gedacht werden und den Namen Fluenten erhalten, während die Geschwindigkeit ihrer momentanen Veränderung Fluxion, die momentane Veränderung selbst Moment heisst. Unbegreiflich erscheint uns nur, wie trotz dieser lichten Darstellung Herr W. (S. 25 in der Note) sagen kann: „Newton spreche sich nirgends bestimmt aus, ob er unter Fluenten den Raum und die Zeit, oder die Repräsentanten derselben, die Coordinaten, also Linien verstanden wissen wolle.“ Uns wenigstens bleibt kein Zweifel darüber nach Vergleichung folgender Stellen: *In iis, quae sequuntur, Tempus formaliter non considero: sed suppono quod una ex propositio quantitatibus homogenea cum aliis*

crescat aequabili fluxu, adquam ceterae, tanquam ad Tempus, referantur, quae ideo per analogiam non inconcinne dici potest Tempus. Quoties igitur vox Tempus in sequentibus invenietur (eam autem saepiuscule usurpavi perspicuitatis et distinctionis causa) hoc verbum sumendum est, non quasi Tempus intellexissem in sua formali significatione, sed tanquam significans quantitatem illam a Tempore diversam, cujus aequabili incremento vel fluxu Tempus exponitur et mensuratur. (*Method. flux.: Transitio ad methodum fluxionum; ed. Cast. I, pag.* 54) und: *Considerando igitur quod quantitates aequalibus temporibus crescentes et crescendo genitae, pro velocitate majori vel minori, qua crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores, methodum quaerebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum, quibus generantur: et has motuum vel incrementorum velocitates nominando fluxiones et quantitates genitas nominando fluentes incidi paulatim annis* 1665 *et* 1666 *in methodum fluxionum* (*Quadrat. curv.: Introductio: ed. Cast. I, p.* 204). Bestimmter, scheint uns, hätte sich Newton nicht ausdrücken können. Was aber die von Herrn W. citirte entgegensprechende Stelle betrifft, so heisst sie nach unserer Berichtigung des Citates folgendermassen: *In proposita aequatione symbola fluxionum (sunt enim quantitates diversi generis ab iis quarum fluxiones sunt) in singulis terminis ascendere debent ad aeque altas dimensiones* (*ed. Cast. I, pag.* 63). Wir können aber darin keinen Widerspruch finden, indem wir interpretiren *symbola fluxionum* bedeute hier einfach $\dot{x}$, $\dot{y}$ als die Bezeichnung der Fluxion oder der Geschwindigkeit, und dass diese von den fluirenden Coordinaten verschieden ist, versteht sich von selbst.

Im Wesentlichen hat nun die Fluxionsrechnung zwei Aufgaben zu lösen: Bei gegebenen Fluenten ein Verhältniss der Fluxionen zu finden und umgekehrt, aus einer Gleichung zwischen Fluxionen auf den Zusammenhang der Fluenten zu schliessen. Die erste Aufgabe löst Newton für algebraische Functionen, wenn auch mit vielen Umschweifen. Weniger glücklich ist seine Lösung des zweiten Problems, die nur in einzelnen Fällen richtig ist (S. 32 flgg.). Und diese Unvollkommenheit der Newton'schen Methode überall, wo sie das Gepräge analytischer Untersuchung zeigt, verläugnet sich auch nicht in ihren geometrischen Anwendungen. So ist das Tangentenproblem nur zum Theil gelöst (S. 46); am besten das Problem der Maxima und Minima, an welches eine Betrachtung der Krümmungsverhältnisse, der Evolution und der Rectification sich anschliesst (S. 47—51); am unzureichendsten aber sind die Methoden zur Quadratur (S. 51—55). Wenn wir so den Gang angegeben haben, den der Herr Verf. bei der Darstellung und Kritik der Newton'schen Fluxionsrechnung einhält, so könnten wir noch bemerken, dass er an einzelnen Stellen sich unnöthig Schwierigkeiten bereitet. Wenn z. B. (S. 35) gesagt wird: „aus der Fluxionsgleichung $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$ folgere Newton $y = \frac{a}{0} = \infty$ in Hinblick auf die Quadrirung der gleichseitigen Hyperbel", so ist dieses gewiss erst ein nachträglicher Gedanke Newton's gewesen, wenn er ihn je hatte. Da unser Autor sagt, dass diese Fluentengleichung aus seiner Regel folge: *Aequatio* $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$ *dat* $y = \frac{a}{0}$; *nam si* $\frac{a}{x}$ *multiplicetur per x conficitur a, et si a dividatur per numerum dimensionum x, videlicet per* 0, *habetur* $\frac{a}{0}$ *quae quantitas infinita debet esse valor y* (*ed. Cast. I, pag.* 67).

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwicklung von Leibniz bis auf Lagrange, als ein historisch-kritischer Beitrag zur Geschichte der Mathematik dargestellt von Dr. Hermann Weissenborn. Halle 1856.

Ueber Zweck und Plan dieses Werkchens giebt der Herr Verfasser selbst in der Vorrede uns Auskunft. Es soll nur „eine Darstellung der Principien der höheren Analysis sein, weil die Aufstellung derselben der bei weitem schwierigste und wichtigste Schritt in der Geschichte der Mathematik war, und weil ihre Begründung eine so mannigfaltige für den Mathematiker sowohl als Philosophen interessante ist." Eine historische Darstellung wird gewählt, weil „einmal durch die Entwicklungsgeschichte einer jeden Wissenschaft ein richtiges Urtheil über den gegenwärtigen Stand derselben ermöglicht und zweitens durch sie vermöge der von ihr hervorgebrachten Erweiterung des Gesichtskreises die allgemeine Bildung gefördert wird." Und endlich als historisch-kritisch wird die Arbeit bezeichnet, weil der Verfasser, „um ein möglich treues Bild von der Art und Weise, wie sich ein jeder der in dieser Schrift erwähnten Männer ausdrückte, zu verschaffen, die Sätze erst in der Form wiedergab, wie sie sich bei ihnen finden, sodann aber, indem er das ihnen zu Grunde liegende Princip hinzustellen versuchte, sie einestheils in der jetzigen Sprache der Wissenschaft ausdrückte, anderntheils ihre Richtigkeit oder Unrichtigkeit prüfte."

Sehen wir nun im Einzelnen zu, wie diese Aufgabe von dem Herrn Verfasser gelöst wird.

Nachdem das Hauptverdienst Descartes mit Recht darin gefunden wird, dass er zuerst den Begriff der Veränderung in die Geometrie einführte, giebt Herr W. eine Eintheilung sämmtlicher auf Descartes fussenden Arbeiten nach drei Kategorien. Die erste umfasst die Arbeiten, „welche vom Begriffe der Funktion ausgehend die Natur der Curven untersuchen," wie Lagrange's Derivationsrechnung. In der zweiten sind umgekehrt diejenigen Entdeckungen enthalten, bei welchen, von der Geometrie ausgehend, die Analysis ihre weitere Ausbildung fand, d. h. die Differenzial- und Integralrechnung seit Leibniz. Endlich als dritte Methode wird die genannt, welche auf die reine Bewegungslehre oder die Phoronomie sich stützt, und welche die Newton'sche Fluxionsrechnung bildet. Auf diesen Eintheilungsgrund hin zerfällt das Buch in drei Kapitel:

tient nennt. Der Grund dieses Schwankens scheint uns darin zu liegen, dass die eine Ansicht bequemer in der geometrischen Anwendung war, die andere geeigneter Angriffen zu widerstehen, wie die von Nieuwentiit, zu welchen noch später die *Remarques de M. Rolle touchant le problème général des tangentes, Paris* 1703 kam, welche eine Erwähnung wohl verdient hätten. Die Frage, ob Leibniz, der die Differenzialrechnung jedenfalls später entdeckte, als Newton seine Fluxionsmethode, von dieser Letzteren wenigstens indirect Kenntniss gehabt haben könne, wird (S. 105 — 114) gleichfalls genau beleuchtet, wenn auch eine gewisse Pietät, wie es scheint, Herrn W. zurückhält offen zu gestehen, was in der ganzen Untersuchung durchdringt, dass er nämlich glaubt, dass Leibniz diese Kenntniss gehabt habe; ein Urtheil, welches wir zwar ungern aber vollständig unterschreiben. Wir möchten z. B. zu den S. 111 citirten Stellen, an welchen Leibniz phoronomische Begriffe wie Geschwindigkeit, momentaner Zuwachs und dergl. gebraucht, noch eine hinzufügen. In den *Acta erudit.* 1695, pag. 315 drückt Leibniz sich so aus: *Nempe ut jam alias notare memini, quantitas ordinaria, quantitas infinitesima prima seu differentialis et quantitas differentio-differentialis vel infinitesima secunda sese habent, ut motus et celeritas et solicitatio, quae est elementum celeritatis.*

Nachdem nun als Beispiel der weiteren Ausbildung der Differenzialrechnung im 17. Jahrhunderte gezeigt wird (S. 115 — 122), wie Johannes Bernoulli die nach ihm benannte Reihe entwickelte, und wie derselbe die Beaune'sche Aufgabe löste, geht Herr W. zur Theorie Nieuwentiit's über, die er etwas ausführlicher (S. 123 — 138) auseinandersetzt, als sie es wohl verdiente; indem wir keineswegs beistimmen können, es sei dieser Thèorie damit Unrecht geschehen, dass sie so bald in gänzliche Vergessenheit gerieth. Da indessen der Herr Verf. einigen Werth darauf zu legen scheint, so möge er uns eine kleine Berichtigung erlauben. Schon früher (S. 97) und wiederholt (S. 123) wird angenommen, die ersten Angriffe Nieuwentiit's gegen Leibniz seien in den *Acta erudit.* 1695 pag. 272 erfolgt. Dem ist aber nicht so, sondern diese citirte Stelle enthält nur eine Anzeige einer kleinen Schrift von Nieuwentiit, welche unter dem Titel: *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis*, *Amstelod.* 1694 drei Bogen stark erschien. Was den Verfasser der angeführten Recension betrifft, so könnte es allerdings eine Selbstanzeige sein, wenn nicht ein eigenthümlicher Umstand uns bestimmte, einer anderen Meinung anzuhängen. In dem Exemplare der *acta eruditorum* nämlich, welches die Heidelberger Universitätsbibliothek besitzt, sind bei den meisten Recensionen wahrscheinlich von der Hand eines gleichzeitigen Besitzers die Namen der Verfasser mit Dinte beigefügt, und auf diese Weise ist angegeben, jene Anzeige der Nieuwentiit'schen Schrift rühre von Magister Martin Knorr her. Nun lebte allerdings ein Professor der Mathematik dieses Namens in Wittenberg, der unter Anderen *De quadratica aequatione* und *De methodo exhaustionis et indivisibilium* schrieb und am 23. März 1699 in Leipzig starb. Er soll (*Acta erudit.* 1699, pag. 192 *nota*) eifriger Mitarbeiter dieses Journals gewesen sein, und da er in den Registern nirgends als Verfasser selbständiger Aufsätze angegeben wird, so kann sich seine Mitarbeiterschaft nur auf anonyme Kritiken beziehen. Es wäre also jedenfalls zu erforschen, ob nicht noch andere Exemplare in ähnlicher Weise mit Randbemerkungen versehen sind, die Martin Knorr als Urheber der freilich höchst unwichtigen Anzeige documentiren.

Noch eine andere Bemerkung, die wir hier einzuschalten haben, bezieht sich auf einen weniger unbekannten Mann. Schon (S. 103) wird „ein damaliger Basler Mathematiker Hermann" genannt, der dann (S. 124) „ein von Leibniz erwähnter Basler Mathematiker Namens Herrmann" heisst. Wir glauben, dass Jacob Hermann, der berühmte Verfasser der *Phoronomia*, *Amstelod.* 1716 in einem geschichtlichen Werke wohl etwas weniger geringschätzend hätte angeführt werden dürfen.

Weiter geht der Herr Verfasser noch zu Brook Taylor über (S. 139 bis 153) dem Begründer der Differenzenrechnung, von welcher einige schätzbare Proben gegeben werden; und nachdem endlich Euler's Begründung der Differenzialrechnung angedeutet worden, enthält ein letzter Paragraph dieses zweiten Kapitals (S. 155—160) noch Ideen über die Möglichkeit einer strengen Begründung der Differentialrechnung. Es wird bemerkt, dass bereits der anonyme Verfasser der Schrift: *The analyst* (wahrscheinlich war es Berkley, Bischof von Cloyne) gezeigt hat, dass wenn einerseits die Richtigkeit der Schlussresultate bei der Fluxionsrechnung auf einem gegenseitigen Aufheben von Fehlern beruhen müsse, andrerseits diese Fehlercompensation in gewissen Fällen streng nachgewiesen werden könne. Und diese Methode des strengen Nachweises, wie in entgegengesetztem Sinne gleich grosse Fehler begangen worden, eine Methode, welche erst Carnot wieder hervorgesucht habe, hält Herr W. für die sicherste und wissenschaftlichste Basis. Jedenfalls, glauben wir, dürfte ein Versuch, eine derartige höhere Analysis zu schreiben, zu den mühseligsten und verhältnissmässig nicht dankbaren Arbeiten gehören, und so müssen wir bezweifeln, ob noch Mathematiker geneigt wären, sich derselben zu unterziehen.

Doch wir eilen zum Schlusse, von dem wir bereits nur wenig entfernt sind, da das dritte Kapitel (S. 160—185) in compendiösester Weise die Derivationsrechnung von Lagrange behandelt und noch spätere Arbeiten mit Recht ganz übergeht, da sie theils hinlänglich bekannt sind, theils ihrer Neuheit wegen noch nicht eigentlich der Geschichte angehören.

Fassen nun wir endlich das Urtheil kurz zusammen, welches sich in uns bei der Abfassung dieses durch die Wichtigkeit des Gegenstandes gebotenen ausführlichen Referates gebildet hat, so müssen wir zugeben, dass der Herr Verfasser, wenn er auch nicht alle Schwierigkeiten überwunden hat, die sein überreiches Thema ihm bot, doch viel schätzbaren Stoff bewältigte, und dass in seiner Schrift ein neuer, bequemerer Ausgangspunkt für weitere Forschungen gewonnen ist, deren Einige wir vielleicht im Laufe unseres Referates angedeutet haben. — M. Cantor.

Versuch, die Differenzialrechnung auf andre als die bisherige Weise zu begründen. Eine mathematische Abhandlung von H. Sloman, Dr. Paris bei Gläser. 1856.

Der in Paris lebende Verfasser scheint an der eleganten Manier, womit die Franzosen die Differentialrechnung nach der sogenannten Grenzenmethode behandeln, wenig Gefallen gefunden zu haben, namentlich vermisst er darin die philosophische Tiefe, die er als ein nothwendiges Requisit jener abstrakten Rechnung ansieht. Ein paar hierauf bezügliche Stellen der Abhandlung führen wir zunächst an, weil sie für den Standpunkt des Verfassers bezeichnend sind. S. XXXV: „Ausserdem besteht die Eleganz in einer coquettirenden Ueberrumplung beim Beweisen und in einer Freude

an der äusserlichen Symmetrie der Formeln. Die Gleichung der geraden Linie, wenn zwei ihrer Punkte ($x'\,y'$ und $x''\,y''$) gegeben sind, schreibt man z. B. am liebsten

$$\alpha)\qquad y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$$

oder gar

$$\beta)\qquad \frac{y-y'}{x-x'}=\frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

anstatt ehrlich zu gestehen, dass

$$\gamma)\qquad y=\frac{y'-y''}{x'-x''}x+\left[y'-\frac{y'-y''}{x'-x''}x'\right].$$

Diese letztere Schreibart, oder algebraische Denkweise ist, obgleich für das Auge nicht so symmetrisch, für den Geist viel klarer, da sie es gleich fasst, dass das Ende der Formel

$$\delta)\qquad y'-\frac{y'-y''}{x'-x''}x'$$

die Constante und y das zu Bestimmende ist.“ — Referent muss diese Weisheit geradezu als schülerhaft bezeichnen, denn nur Anfängern wird es schwer, sich die Gleichung einer Geraden in einer anderen als in der stereotypen Form $y=ax+b$ vorzustellen, jeder Mathematiker aber versteht unter der Gleichung einer Curve nichts weiter als diejenige Gleichung, welche zwischen den Coordinaten eines Punktes stattfinden muss, wenn dieser Punkt auf der Curve liegen soll; ob dabei y als „das zu Bestimmende“ angesehen, oder ob die Gleichung auf x reducirt oder nach keiner von beiden Coordinaten aufgelöst wird, ist ganz gleichgültig; „für den Geist“ des Mathematikers existirt hier nur das in einer Gleichung ausgesprochene Gesetz des Zusammenhanges, die Form bleibt ihm willkürlich.— Weiter heisst es auf S. 116: „Ich denke an die Zeit, als ich noch gläubig an dem Grenzenbeweis hing, aber doch nicht umhin konnte, zu lächeln, wenn ein Professor im Collegium eine Menge Zahlen und Buchstaben in Reihen an die langen Tafeln gezeichnet hatte und dann plötzlich sich umwendend sagte: *Maintenant Messieurs passons à la limite.* Wie im Nu wurden dann durch einen nassen Schwamm die langen Rechnungen wieder weggetrieben.“ Auch hier hat sich der Verf. lediglich von der Form der Rechnung täuschen lassen; es ist allerdings kein empfehlenswerthes Verfahren, $f(x)$ dadurch zu differenziren, dass man $f(x+h)$ in eine nach Potenzen von h fortgehende Reihe etwa

$$f(x+h)=f(x)+X_1h+X_2h^2+\ldots$$

verwandelt, nachher

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=X_1+X_2h+X_3h^2+\ldots.$$

entwickelt und zuletzt bei der *passage aux limites* Alles bis auf X_1 wegstreicht (denn das heisst im Grunde den Taylor'schen Satz oder wenigstens einen speciellen Fall desselben anticipiren), aber dieses Verfahren ist gar nicht etwa der Grenzenmethode eigenthümlich, im Gegentheil muss letztere gerade ohne Reihenentwickelungen auskommen um nachher die Reihentheorie desto sicherer begründen zu können. So z. B. billigt es Ref. kei-

Einer der eifrigsten Nachfolger und Verehrer Newton's war Maclaurin (S. 58—69), dessen *Treatise of fluxions* indessen nur wenig beitrug, die Theorie seines Lehrers von den Vorwürfen der Unklarheit zu reinigen, die ihr von verschiedenen Seiten gemacht wurden. Im Gegentheile ist bei ihm die Begründung nur um so mehr Angriffen ausgesetzt, als er halb missverstandene Begriffe aus der Differenzialrechnung mit hineinzieht (S. 64). Zudem ist dieses Werk Nichts weniger als angenehm zu lesen, was der synthetischen Beweisführung zuzuschreiben ist, deren sich Maclaurin (wohl in Nachahmung der *Principia philosophiae naturalis mathematica*) immer bedient. Von bleibendem Werthe ist nur die nach ihm benannte Reihenentwicklung, bei deren Darstellung (S. 67) wir indessen die Untersuchung vermissen, ob Maclaurin wirklich der Erfinder, oder ob Stirling sie schon vorher ersonnen. Letztere Ansicht wurde bekanntlich von Binet in seinem Aufsatze über Euler'sche Integrale (*Journal de l'école polyt. T. XVI*) zuerst aufgestellt, und ihm folgten Cournot, Franke und Andere. Wenn wir auch persönlich von der Ungerechtigkeit der Ansprüche Stirling's überzeugt sind, so dürften indessen auch nach der Widerlegung durch Grunert (Archiv der Phys. und Math. Bd. 17, liter. Bericht über Franke's Lehrbuch der höheren Mathematik) noch interessante Forschungen darüber anzustellen sein; z. B. ob das bei Montucla angeführte Werk Stirlings *Methodus differentialis* wirklich existirt, oder ob dieses nur der zweite Titel des bekannten Werkes *Tractatus de summatione* ist. In dem Cataloge der Schumacher'schen Bibliothek fanden sich von Stirling Nro. 1129: *The differential method or a treatise concerning summation and interpolation of infinite series.* 4°. *London* 1749 und Nro. 1129 *a*: *Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum.* 4°. *Londini* 1764, welches für die letztere Ansicht zu sprechen scheint. Dann aber wäre die Prioritätsfrage endgültig entschieden, da die erwähnte Formel in dem *Tractatus de summatione* nicht vorkommt (wie Herr Prof. Stern in Göttingen uns mit Bestimmtheit versichert; wir selbst haben die Schrift uns nicht verschaffen können).

Das nun folgende zweite Kapitel ist der Darstellung der Geschichte der Differenzialrechnung gewidmet, und beginnt mit der Entwicklung der Arbeiten über Quadratur von Gregorius a S. Vincentio (S. 70), der zweiten Tangentenmethode Barrow's (S. 73), der ziemlich unbedeutenden Versuche über die drei Hauptprobleme der Tangenten, der Maxima und Minima und der Quadratur von Tschirnhaus (S. 78), und der weit wichtigeren Formeln zur Quadratur von Sturm (S. 82). Hier, glauben wir, wäre auch der richtigere Platz für Robervals Quadratur der Cycloide gewesen, zu welchen noch Pascals Untersuchungen hinzuzufügen sind. Ueberhaupt sind die Verdienste dieses Mathematikers viel zu wenig bekannt, und wir hoffen, dass ein geistvolles Mitglied der Pariser Akademie, Herr Bienaymé, sein uns mündlich gegebenes Versprechen erfüllen und seine Forschungen in dieser Beziehung bald veröffentlichen werde.

Die Entdeckung der Differenzialrechnung durch Leibniz endlich ist (S. 84—104) mit grosser Gründlichkeit vorgetragen, wobei der Herr Verf. die trefflichen Vorarbeiten von Guhrauer und Gerhardt mit Fleiss und Einsicht benutzt hat. Ein besonderes Gewicht wird mit Recht auf den bei Leibniz selbst nirgends motivirten Wechsel der Ansichten gelegt, wonach er die Differenziale bald ohne Weiteres in Rechnung zieht und sie unendlich kleine Grössen sein lässt; bald statt ihrer andere endliche Grössen nimmt, die nur in dem Verhältnisse stehen, welches man Differenzialquo-

Theil beschränken. Allgemein ausgedrückt wäre hiernach die Aufgabe der Differenzialrechnung folgende: „man zerlege den Differenzenquotienten in zwei Theile nach dem Schema

$$\varepsilon) \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x) + \psi(x,h)$$

und untersuche, ob $\varphi(x)$ die Anfangswirkung des h d. h. diejenige Wirkung von h ist, wo $f(x)$ noch Funktion von x und noch nicht von $x+h$ war; dann heisst $\varphi(x)$ der Differenzialquotient von $f(x)$.“ Nach dieser Erklärung, die sich im Buche selber scharf ausgesprochen eigentlich nicht findet, die wir aber für richtig im Sinne des Verf. halten müssen, weil sie aus den Worten der S. 9 zusammengesetzt und nur dahin verallgemeinert ist, dass $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x,h)$ statt x^2, $2x$, h gesagt wurde, scheint es, als ob die Differentiation auf eine blosse algebraischr Transformation hinauskäme. Freilich scheint es auch nur so; denn erstens, woher weiss denn der Verf., dass eine Gleichung von der Form ε) möglich ist, und zweitens, wenn sie möglich ist, welche Operationen sind nothwendig, um die postulirte Zerspaltung von $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ in $\varphi(x)$ und $\psi(x,h)$ auszuführen. Ist ferner diese Aufgabe eine bestimmte oder unbestimmte, kann man nicht vielleicht diese Zerspaltung auf mehrere verschiedene Weisen ausführen; welche Zerlegung ist dann die richtige, oder was auf Dasselbe hinauskommt, woran erkennt man, dass $\varphi(x)$ die Anfangswirkung und $\varphi(x)+\psi(x,h)$ die Wirkung des „massenhaften“ h darstellt? Das Alles sind Fragen, auf die wir vergeblich nach einer bestimmten klaren Antwort gesucht haben. Noch schlimmer wird die Sache in der Praxis d. h. da, wo nun wirklich diese und jene Funktion *lege artis* differenzirt werden soll. So spendabel der Verf. mit allgemeinen Redensarten ist, so knauserig ist er mit dem Calcül. Die postulirte Zerlegung in $\varphi(x)$ und $\psi(x,h)$ geht freilich recht gut bei x^m, aber schon bei a^x muss der Verf. den allgemeinen binonischen Satz zu Hülfe nehmen, um

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x\left[-(1-a) - \tfrac{1}{2}(1-a)^2 - \tfrac{1}{3}(1-a)^3 - \ldots\right]$$

mühselig genug herauszubringen, wobei noch sehr die Frage ist, was man für $a > 1$ mit der divergenten Reihe anfangen soll. Hiermit erreicht der ganze Calcül sein Ende, und seltsam genug nimmt sich auf S. 77 die Befriedigung des Verf. aus, wenn er sagt: „Damit ist die Differenzialrechnung beendet. Denn wenn sie die Hauptrechnungsarten, die Hauptreihen x, x^m, a^x differenzirt, d. h. ihrer Subtractivität nach verglichen, mit der Subtractivität der einfachsten Reihe x, welche dx ist, gemessen hat, also ihr Sein aus ihrem einfachsten Werden, ihr Integral aus ihrem Differenzial begriffen und eine Brücke zwischen beiden erbaut hat, so ist die Differenzirung aller denkbaren Funktionen möglich gemacht, da alle andern unendlich vielen Reihen oder Ordnungen und Gesetzlichkeiten, die in die Vielheit hineingebracht werden können, nur Nebenreihen jener Hauptreihen sind.“ — Woher der Verf. weiss, dass z. B. $\sin x$ auf x^m oder a^x zurückgeführt werden kann, ist uns unbegreiflich, es müsste denn sein, dass sich der Verf. auf die Sinusreihe beriefe, die aber freilich erst durch die Differenzialrechnung entwickelt wird.

Die Stellung des Verfassers ist hiernach mit wenig Worten zu bezeich-

nen. Lagrange setzte die Möglichkeit einer Entwickelung von der Form

$$f(x+h)=f(x)+X_1 h+X_2 h^2+\ldots$$

voraus um X_1 als ersten Differenzialquotienten definiren zu können; Herr Sloman macht die Hypothese einer Zerlegung nach dem Schema ε), wobei aber $\psi(x,h)$ für $h=0$ verschwinden muss, wenn $\varphi(x)$ die Anfangswirkung von h sein soll, d. h. er setzt stillschweigend den Satz

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\tfrac{1}{2}h^2 f''(x+\vartheta h)$$

voraus, um nachher

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\tfrac{1}{2}hf''(x+\vartheta h)$$

und an $f'(x)$ den ersten Differenzialquotienten zu haben; das Eine wie das Andere ist ein ὕστερον πρότερον. In der Praxis kommt Beides auf dasselbe und zwar darauf hinaus, dass die Differentiation einer Funktion nicht eher geschehen kann, als bis die Funktion selber oder eine ihr nahe verwandte in eine unendliche Reihe umgesetzt ist. — Das heisst die Sachen auf den Kopf stellen.

Was die Darstellung des Verfassers anbelangt, so haben wir derselben keinen Geschmack abgewinnen können. Eine gewaltige Breite und der Gebrauch von Ausdrücken wie „Absolutheit", „subtractive Relativität" etc., von denen keine Definition gegeben wird, machen die Darstellung schwerfällig und dunkel, sodass man sich oft veranlasst fühlt, den bekannten Satz „ein klarer Gedanke lässt sich auch klar aussprechen", zum Nachtheile des Verfassers umzukehren. SCHLÖMILCH.

Lehrbuch der Mechanik, von Dr. G. C. J. ULRICH, ordentl. Prof. an der Georg-Augusts-Universität etc. — Erste Lieferung: die Grundlehren über Bewegung und mechanische Kräfte, sowie Statik fester Körper enthaltend. — Göttingen, Dieterich'sche Buchhandlung. 1855.

Der in weiteren Kreisen namentlich durch sein „Lehrbuch der praktischen Geometrie" (Göttingen, 1832 und 33) rühmlich bekannte Verfasser unternimmt in dem vorliegenden Werke in einer ähnlichen Weise die durch ihre mannigfachen Anwendungen im praktischen Leben immer wichtiger werdenden mechanischen Wissenschaften zu behandeln. Nach Inhalt der Vorrede hat er sich dabei die Aufgabe gestellt, die Grundlagen dieser Disciplinen gehörig zu erörtern und ihre Entwickelung klar und von verschiedenen Gesichtspunkten aus zu unternehmen, so dass man in den Stand gesetzt werde, ein richtiges Verständniss der oft für schwierig gehaltenen Lehren und eben dadurch eine Selbständigkeit in weiterer Untersuchung, sowie für technische Anwendungen zu erlangen. Der Gang der Entwickelung, welchen der Verfasser bei Behandlung seines Lehrgegenstandes einschlägt, weicht in so mancher Hinsicht von dem gewöhnlichen ab, dass der Referent, wenn er sich auch nicht allenthalben mit den angebrachten Neuerungen einverstanden erklären kann, den Lesern einen nützlichen Dienst zu erweisen glaubt, indem er ihnen den Inhalt des vorliegenden Theiles des auf einen grösseren Umfang berechneten Werkes näher angiebt.

Von dem richtigen Gesichtspunkte ausgehend, dass man nur durch die Erscheinungen der Bewegung zu einer klaren Vorstellung von dem gelangen könne, was in der Mechanik mit dem Namen „Kraft" bezeichnet wird, beginnt das Lehrbuch mit Entwickelung der auf Bewegung bezüglichen Grundbegriffe. Vorausgeschickt ist eine kurze Erörterung über die allgemeinen Eigenschaften der Körper, die Begriffe der Masse und Dichte, sowie über die Aggregatzustände (§. 1 und 2). Wenn hierbei in strenger Festhaltung einer atomistischen Naturansicht der Unterschied zwischen den Volum- und Massenverhältnissen der Körper lediglich auf Rechnung der Porosität gebracht wird, so dürfte der Verfasser in dieser Hinsicht wohl schwerlich allgemeine Beistimmung finden. Dem Referenten wenigstens scheint es schon in didaktischer Hinsicht zweckmässiger, den Begriff der Masse dahin zu verweisen, wo bei Betrachtung der verschiedenen Wirkung derselben Kraft auf verschiedene Körper seine Nothwendigkeit bedingt wird.

An die phoronomische Untersuchung der geradlinigen gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten Bewegung (§. 4—12) schliesst sich mit Einführung des Trägheitsgesetzes die Lehre von der Messung der bewegenden Kräfte durch die von ihnen nach gleichen Zeiten herrührenden Quantitäten der Bewegung (§. 13—17), sowie ein Excurs über die Schwerkraft, in welchem die Gesetze der Fallbewegung und die Atwood'sche Fallmaschine zur Sprache kommen (§. 18—21). Der Verfasser erläutert hierauf die Begriffe der mechanischen Arbeit, sowie der davon herrührenden lebendigen Kraft der bewegenden Masse, wobei nach Bélanger für das halbe Product der Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit der Name lebendige Potenz (*puissance vive*) eingeführt wird. Zur Erläuterung der Theorieen sind die Bewegungsgesetze eines in gerader Linie schwingenden materiellen Punktes untersucht, dessen Schwingung durch eine Kraft bedingt wird, welche seinem Abstande von einem festen Punkte seiner Bahn proportional ist (§. 22—28).

Bis hierher sind die vom Verfasser zur Verdeutlichung der mechanischen Begriffe an mehreren Stellen benutzten praktischen Beispiele so gewählt, dass sie, wenn dies auch nicht immer unmittelbar ausgesprochen wird, nach dem Standpunkte der vorgeführten Theorie zunächst nur auf die Bewegung materieller Punkte bezogen werden dürfen. Jetzt wendet er sich zum Principe der Gleichheit des Druckes und Gegendruckes (§. 29—31), und das Bestreben, auch dieses Princip möglichst anschaulich zu erläutern, führt auf einmal zur Lehre vom centralen Stosse fester Körper, sowie zur Theorie des Einrammens der Pfähle (§. 32—40). Selbstverständlich kann hierbei, wo die Theorie auf die Gleichheit von Druck und Gegendruck während der durch den Stoss bedingten Formveränderung basirt ist, von blossen materiellen Punkten nicht mehr die Rede sein. Es ist dies nun zwar durchaus auch nicht die Ansicht des Verfassers, wohl aber vermisst man an dieser Stelle das vermittelnde Band, wodurch die Bewegung eines festen Körpers an die eines seiner Punkte geknüpft wird. Der Inhalt der §§. 29 und 30 kann wenigstens hierzu nicht als ausreichend erscheinen; ebensowenig rechtfertigt sich das plötzliche Auftreten des Schwerpunktsbegriffes, welcher erst viel später in der Statik fester Körper seine gehörige

---

*) *Cours de mécanique, ou Résumé de leçons sur la dynamique, la statique et leurs applications à l'art de l'ingenieur. Paris* 1847.

Begründung findet. Das Lehrbuch giebt nicht an, für welchen Leserkreis es zunächst bestimmt ist; die Vorrede sagt nur, dass es mehrjährigen akademischen Vorträgen des Verfassers seinen Ursprung verdankt. Jedenfalls sind Leser vorausgesetzt, denen eine allgemeine Kenntniss der besprochenen Gegenstände nicht abgeht; ausserdem würde die Herausreissung eines Theiles der Dynamik fester Körper aus dem Zusammenhange sich schwer rechtfertigen lassen, auch wären dann Anticipationen nicht zulässig, wie z. B. auf S. 22, wo eine Masse nach Gewichtseinheiten gemessen wird, während erst auf S. 28 die Proportionalität von Masse und Gewicht zur Untersuchung gelangt. Gerade für einen solchen Leserkreis dürfte es aber am wenigsten nöthig sein, einem erläuternden Beispiele die logische Verbindung des Ganzen aufzuopfern, um so weniger, als an der Stelle, wo das Beispiel aufgenommen ist, es nicht einmal vollständig durchgeführt werden konnte. Da die hierzu nöthigen Grundlagen fehlen, so ist die ganze Stosstheorie eine theilweis ungenügende geworden; so muss z. B. die im §. 33 enthaltene angenäherte Berechnung der Zeit, innerhalb welcher die Erscheinungen des Stosses vor sich gehen sollen, jeder Erfahrung widersprechen, da sie auf der Annahme eines während der Formveränderung der sich berührenden Körper constant bleibenden Druckes basirt ist. Aehnliches gilt von der Theorie des Pfahlrammens, welche die Voraussetzungen enthält, dass Pfahl und Rammbär als absolut hart und unelastisch zu betrachten sind, und dass die Tiefe, um welche sich der Pfahl senkt, während er die durch den Stoss bedingte Geschwindigkeit annimmt, ausser Betracht gelassen werden kann.

In den §§. 41 bis 49 sind die Lehren von der Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen und der Kräfte mit einander verknüpft durch das Naturgesetz, dass ein materieller Punkt, auf welchen gleichzeitig mehrere äussere Ursachen wirken, sich für jede derselben gleich empfänglich zeigt. Bei der Zusammensetzung zweier geradlinigen Bewegungen, von denen die eine gleichförmig, die andere gleichförmig beschleunigt ist, vermisst Referent den allgemeinen Beweis dafür, dass die zusammengesetzte Bewegung eine parabolische sein müsse, indem die im §. 47 enthaltene mathematische Entwickelung sich nur auf das Beispiel der Wurfbewegung bezieht. Der Beweis würde dabei eine einfachere Form erlangt haben, wenn die Coordinatenachsen in die Richtungen der zusammenzusetzenden Bewegungen gelegt worden wären; das rechtwinklige Coordinatensystem mit horizontaler und vertikaler Achse empfiehlt sich einzig bei Berechnung der Wurfweite und Wurfhöhe. Beiläufig sei bemerkt, dass für die Richtigkeit der auf S. 68 ausgesprochenen Behauptung, die Parabel verdanke dem Umstande, dass sie Wurflinie ist, ihren Namen, der Nachweis schwer fallen dürfte.

Zur Anwendung der für die Zerlegung von Bewegungen aufgestellten Gesetze sind in den §§. 50 bis 64 die einfacheren Fälle der Lehre von den gezwungenen Bewegungen abgehandelt, wobei unter Anderm der Begriff der Centrifugalkraft entwickelt wird. An die Untersuchung der vertikalen Bewegung eines schweren Körpers auf gebrochener und krummer Linie schliesst sich die Theorie des einfachen Kreispendels, und hieran wieder die des conischen oder Centrifugalpendels. Das im Allgemeinen anerkennungswerthe Bestreben des Verfassers, die theoretischen Betrachtungen sofort durch praktische Beispiele zu erläutern, führt ihn hierbei zu einem Excurs über den Centrifugalregulator bei Dampfmaschinen, sowie über die

von G. A. Franke (ehemaligen Eleven der polytechnischen Schule zu Hannover) angegebene sinnreiche Verbesserung dieses Apparates, wonach die Schwingungspunkte der Schwungkugeln genöthigt werden, sich auf der Oberfläche eines Rotationsparaboloides zu bewegen. Nur will es Referenten bedünken, als ob sich dieser ganze Excurs wieder nicht an der rechten Stelle befinde, da für den Uebergang vom mathematischen zum materiellen Apparate die vermittelnden Anknüpfungspunkte fehlen.

Den Schluss des von den Grundlehren über Bewegung und mechanische Kräfte handelnden Abschnittes bildet die Theorie der relativen Bewegung (§. 64—76), worin nach dem Vorgange von Coriolis*) diejenigen Kräfte ermittelt werden, welche einem in relativer Bewegung befindlichen materiellen Punkte eine hiermit identische absolute Bewegung ertheilen würden.

Der zweite Hauptabschnitt enthält die Statik der festen Körper, wobei in dem vorliegenden Theile die durch die Natur des Lehrobjectes bedingte Anordnung des Stoffes im Wesentlichen dieselbe bleibt, wie in den übrigen besseren Lehrbüchern der Statik. Nachdem einleitungsweis (§. 78—89) die Bedingungen des Gleichgewichtes für solche Kräfte ermittelt sind, welche an demselben materiellen Punkte angreifen, wird die entsprechende Untersuchung für Kräfte mit verschiedenen, in starrer Verbindung stehenden, Angriffspunkten geführt, sowohl für den Fall, wo die Richtungen dieser Kräfte in einer Ebene (§. 90—119), als wo sie beliebig im Raume gelegen sind (§. 120—170). Es zeichnet sich dieser ganze Theil durch möglichst vollständige Behandlung aller hierher gehörigen Fälle, sowie durch geschickte Verwendung der dazu dienlichen Hülfsmittel aus. Namentlich verdient die Art und Weise Anerkennung, in welcher die Poinsot'schen Kräftepaare zu geeigneter Verwendung gelangen; dankenswerth ist auch jedenfalls die Aufnahme der bis jetzt in den meisten Lehrbüchern vermissten Möbius'schen Untersuchungen über Sicherheit und Unsicherheit des Gleichgewichtes, mit Feststellung der Function, aus deren Vorzeichen erkannt wird, ob ein gegebenes Gleichgewicht ein fortdauerndes oder augenblickliches sei.

An die allgemeinen Untersuchungen über Gleichgewicht und Bewegung schliesst sich die Lehre von den virtuellen Momenten (§. 171—183), wobei auch das Historische der Entdeckung des wichtigen Principes der virtuellen Geschwindigkeiten und die bezügliche Literatur Berücksichtigung erlangen. Den Schluss der ersten Lieferung bildet die Schwerpunktstheorie, in so umfänglicher Behandlung, dass wohl kaum eine dahin einschlagende Methode vermisst werden wird (§. 184—235). Auffällig ist es Referenten nur erschienen, dass, wie in vielen andern Lehrbüchern, so auch hier das Verdienst der Entdeckung der centrobarischen Methode dem Jesuiten Guldinus zugeschrieben wird, ohne dass dabei des Alexandriners Pappus Erwähnung geschieht.

Ob der Verfasser hiermit die Statik der festen Körper, deren theoretische Seite die vorliegende erste Lieferung möglichst erschöpfend behandelt hat, als vollendet ansieht, darüber geht dem Referenten jede Kenntniss ab, da sich nirgends eine Andeutung über den Plan der Fortsetzung des Werkes vorfindet. Wünschenswerth wäre es jedenfalls, wenn der statische Theil, der sich von dem vorausgehenden allgemeinen Abschnitte durch eine

*) *Traité de la mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines. Paris* 1844.

nen. Lagrange setzte die Möglichkeit einer Entwickelung von der Form

$$f(x+h) = f(x) + X_1 h + X_2 h^2 + \dots$$

voraus um X_1 als ersten Differenzialquotienten definiren zu können; Herr Sloman macht die Hypothese einer Zerlegung nach dem Schema ε), wobei aber $\psi(x, h)$ für $h = 0$ verschwinden muss, wenn $\varphi(x)$ die Anfangswirkung von h sein soll, d. h. er setzt stillschweigend den Satz

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \tfrac{1}{2} h^2 f''(x + \vartheta h)$$

voraus, um nachher

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \tfrac{1}{2} h f''(x + \vartheta h)$$

und an $f'(x)$ den ersten Differenzialquotienten zu haben; das Eine wie das Andere ist ein *ὕστερον πρότερον*. In der Praxis kommt Beides auf dasselbe und zwar darauf hinaus, dass die Differentiation einer Funktion nicht eher geschehen kann, als bis die Funktion selber oder eine ihr nahe verwandte in eine unendliche Reihe umgesetzt ist. — Das heisst die Sachen auf den Kopf stellen.

Was die Darstellung des Verfassers anbelangt, so haben wir derselben keinen Geschmack abgewinnen können. Eine gewaltige Breite und der Gebrauch von Ausdrücken wie „Absolutheit", „subtractive Relativität" etc., von denen keine Definition gegeben wird, machen die Darstellung schwerfällig und dunkel, sodass man sich oft veranlasst fühlt, den bekannten Satz „ein klarer Gedanke lässt sich auch klar aussprechen", zum Nachtheile des Verfassers umzukehren. SCHLÖMILCH.

Lehrbuch der Mechanik, von Dr. G. C. J. ULRICH, ordentl. Prof. an der Georg-Augusts-Universität etc. — Erste Lieferung: die Grundlehren über Bewegung und mechanische Kräfte, sowie Statik fester Körper enthaltend. — Göttingen, Dieterich'sche Buchhandlung. 1855.

Der in weiteren Kreisen namentlich durch sein „Lehrbuch der praktischen Geometrie" (Göttingen, 1832 und 33) rühmlich bekannte Verfasser unternimmt in dem vorliegenden Werke in einer ähnlichen Weise die durch ihre mannigfachen Anwendungen im praktischen Leben immer wichtiger werdenden mechanischen Wissenschaften zu behandeln. Nach Inhalt der Vorrede hat er sich dabei die Aufgabe gestellt, die Grundlagen dieser Disciplinen gehörig zu erörtern und ihre Entwickelung klar und von verschiedenen Gesichtspunkten aus zu unternehmen, so dass man in den Stand gesetzt werde, ein richtiges Verständniss der oft für schwierig gehaltenen Lehren und eben dadurch eine Selbständigkeit in weiterer Untersuchung, sowie für technische Anwendungen zu erlangen. Der Gang der Entwickelung, welchen der Verfasser bei Behandlung seines Lehrgegenstandes einschlägt, weicht in so mancher Hinsicht von dem gewöhnlichen ab, dass der Referent, wenn er sich auch nicht allenthalben mit den angebrachten Neuerungen einverstanden erklären kann, den Lesern einen nützlichen Dienst zu erweisen glaubt, indem er ihnen den Inhalt des vorliegenden Theiles des auf einen grösseren Umfang berechneten Werkes näher angiebt.

mit Benutzung der Gleichung $k = \frac{dv}{dt}$ die neue Variabele v eingeführt und dadurch für die Gesammtarbeit auf dem Wege s der nicht recht verständliche Ausdruck $\int\limits_0^s mv\,dv$ gewonnen. Wird dann weiter gesagt, man könne, wenn auf dem Wege s die Geschwindigkeit c_0 in c übergehe, statt der Grenzen des vorstehenden Integrales auch c_0 und c schreiben, so ist dies eine Form der Einführung der durch eine neue Variabele bedingten Integralgrenzen, die mindestens als nicht vollkommen klar bezeichnet werden muss. Derartige Stellen erscheinen um so auffälliger, da im Uebrigen die analytischen Untersuchungen des Verfassers einer gewissen Eleganz nicht entbehren.

Ein weiter gehendes Urtheil über das vorliegende Werk, an welchem Referent nochmals die Reichhaltigkeit des darin behandelten Materials hervorhebt, muss bis zu der Zeit zurückgehalten werden, wo dasselbe vollendet vorliegen wird. Die zu erwartende Fortsetzung wird jedenfalls Gelegenheit geben, darauf zurückzukommen. O. Fort.

Programme.

5. Die geometrische Heuristik. Für die Schule bearbeitet von Dr. M. A. F. Prestel, Oberlehrer am Gymnasium zu Emden. Erstes Buch. Die geometrischen Oerter nebst 128 Aufgaben. Emden, in Commission bei Noteboom. 1856.

Nach einer längeren Einleitung, worin die Nachtheile des synthetischen Verfahrens u. A. auch mit Zuziehung Mephistophelischer Kritik (aus der sogenannten Schülerscene) besprochen werden, erklärt der Verfasser, der Zweck seiner Arbeit sei, die Schüler mit den Grundsätzen bekannt zu machen, von denen man beim analytischen Verfahren ausgeht, die Anwendung der nöthigen Regeln zu zeigen und endlich die Anfänger durch gruppenweis zusammengestellte Aufgaben zur Selbstthätigkeit zu veranlassen. — Dem entsprechend, wird zunächst das analytische Verfahren im Allgemeinen charakterisirt und gezeigt, wie die synthetische Darstellung aus der umgekehrten Anordnung des analytischen Gedankenganges entspringt. Eine gewisse Breite der Diction abgerechnet, findet Referent gegen diese Partie nichts zu erinnern, nur der Schlusssatz: „die synthetische Form der Darstellung macht das Wesen alles Dessen aus, was man mit dem Namen klassisch bezeichnet“ dürfte eine gewagte Behauptung sein, da es hiernach sehr leicht wäre, klassisch zu schreiben und da andererseits auch viele unbezweifelt klassische Werke, wie z. B. die *Théorie analytique des probabilités*, nicht synthetischer Natur sind. Der Abschnitt II., „Regeln für geometrische Untersuchungen“ betitelt, enthält einen Versuch, das Erfinden zu lehren. Der Verfasser hat sich offenbar viel Mühe mit diesem Theile gegeben, ob er aber etwas damit erreichen wird, möchte zu bezweifeln sein. Das Erfundene begreifen kostet nur Arbeit, selber erfinden, verlangt Talent, und wo dieses fehlt, helfen auch die Regeln nichts. Ohnehin sind letztere meistens so allgemeiner Natur, dass sie wenigstens Schüler kaum

Begründung findet. Das Lehrbuch giebt nicht an, für welchen Leserkreis es zunächst bestimmt ist; die Vorrede sagt nur, dass es mehrjährigen akademischen Vorträgen des Verfassers seinen Ursprung verdankt. Jedenfalls sind Leser vorausgesetzt, denen eine allgemeine Kenntniss der besprochenen Gegenstände nicht abgeht; ausserdem würde die Herausreissung eines Theiles der Dynamik fester Körper aus dem Zusammenhange sich schwer rechtfertigen lassen, auch wären dann Anticipationen nicht zulässig, wie z. B. auf S. 22, wo eine Masse nach Gewichtseinheiten gemessen wird, während erst auf S. 28 die Proportionalität von Masse und Gewicht zur Untersuchung gelangt. Gerade für einen solchen Leserkreis dürfte es aber am wenigsten nöthig sein, einem erläuternden Beispiele die logische Verbindung des Ganzen aufzuopfern, um so weniger, als an der Stelle, wo das Beispiel aufgenommen ist, es nicht einmal vollständig durchgeführt werden konnte. Da die hierzu nöthigen Grundlagen fehlen, so ist die ganze Stosstheorie eine theilweis ungenügende geworden; so muss z. B. die im §. 33 enthaltene angenäherte Berechnung der Zeit, innerhalb welcher die Erscheinungen des Stosses vor sich gehen sollen, jeder Erfahrung widersprechen, da sie auf der Annahme eines während der Formveränderung der sich berührenden Körper constant bleibenden Druckes basirt ist. Aehnliches gilt von der Theorie des Pfahlrammens, welche die Voraussetzungen enthält, dass Pfahl und Rammbär als absolut hart und unelastisch zu betrachten sind, und dass die Tiefe, um welche sich der Pfahl senkt, während er die durch den Stoss bedingte Geschwindigkeit annimmt, ausser Betracht gelassen werden kann.

In den §§. 41 bis 49 sind die Lehren von der Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen und der Kräfte mit einander verknüpft durch das Naturgesetz, dass ein materieller Punkt, auf welchen gleichzeitig mehrere äussere Ursachen wirken, sich für jede derselben gleich empfänglich zeigt. Bei der Zusammensetzung zweier geradlinigen Bewegungen, von denen die eine gleichförmig, die andere gleichförmig beschleunigt ist, vermisst Referent den allgemeinen Beweis dafür, dass die zusammengesetzte Bewegung eine parabolische sein müsse, indem die im §. 47 enthaltene mathematische Entwickelung sich nur auf das Beispiel der Wurfbewegung bezieht. Der Beweis würde dabei eine einfachere Form erlangt haben, wenn die Coordinatenachsen in die Richtungen der zusammenzusetzenden Bewegungen gelegt worden wären; das rechtwinklige Coordinatensystem mit horizontaler und vertikaler Achse empfiehlt sich einzig bei Berechnung der Wurfweite und Wurfhöhe. Beiläufig sei bemerkt, dass für die Richtigkeit der auf S. 68 ausgesprochenen Behauptung, die Parabel verdanke dem Umstande, dass sie Wurflinie ist, ihren Namen, der Nachweis schwer fallen dürfte.

Zur Anwendung der für die Zerlegung von Bewegungen aufgestellten Gesetze sind in den §§. 50 bis 64 die einfacheren Fälle der Lehre von den gezwungenen Bewegungen abgehandelt, wobei unter Anderm der Begriff der Centrifugalkraft entwickelt wird. An die Untersuchung der vertikalen Bewegung eines schweren Körpers auf gebrochener und krummer Linie schliesst sich die Theorie des einfachen Kreispendels, und hieran wieder die des conischen oder Centrifugalpendels. Das im Allgemeinen anerkennungswerthe Bestreben des Verfassers, die theoretischen Betrachtungen sofort durch praktische Beispiele zu erläutern, führt ihn hierbei zu einem Excurs über den Centrifugalregulator bei Dampfmaschinen, sowie über die

Annali di scienze matematiche et fisiche, compilati par B. Tortolini. 1856; *Nr.* 2, 3, 4. *Roma, tipografia delle belle arti.*

Effemeridi astronomiche di Milano del' anno 1857. *Milano.* (München, Franz). 3 *L. austr.*

American Ephemeris and nautical Almanac for the year 1858; *published by Authority. Washington.*

Lunar Almanac and Meteorological Ephemeris for 1857. *London, Simpkin.* 1 *sh.*

Reine Mathematik.

Bretschneider, C. A., Prof. Dr. System der Arithmetik und Analysis. 1. Lehrgang. Jena, Mauke. 16 Ngr.

Meissel, Dr. E. F. Repetitor der Elementar-Mathematik. Berlin, artistische Anstalt. ½ Thlr.

Seidel, L. Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetze eines Kettenbruches und der Art des Fortgangs seiner Näherungsbrüche. (Aus d. Abhandl. der Bair. Akad. d. Wissensch.) München, Franz in Comm. n. 16 Ngr.

Riecke, Prof. Die Rechnung mit Richtungszahlen oder die geometrische Behandlung imaginärer Grössen. Stuttgart, Metzler. 1⅙ Thlr.

Sloman. Versuch, die Differenzialrechnung auf andere als die bisherige Weise zu begründen. Paris, Gläser. 1 Thlr.

Rouvroy, Generalmajor W. H. v. Sammlung von algebraischen Aufgaben und deren Auflösungen. Dresden, Adler und Dietze. ½ Thlr.

Balsam, Gymn.-Lehrer. Leitfaden der Planimetrie nebst einer geschichtlichen Uebersicht. Stettin, Grassmann. n. 12 Ngr.

Glasl, Prof. Geometrie für Sonntags- u. Gewerbschulen. Wien, Gerold's Sohn. 27 Ngr.

Kommerell, Dir. Schulbuch der ebenen Geometrie. Tübingen, Buchhandlung Zu-Guttenberg. n. ⅔ Thlr.

Hellwig, Lehrer. Das Problem des Apollonius nebst den Theorien der Potenzörter, Aehnlichkeitspunkte, Pole und Polaren etc. Halle, Schmidt. n. ¼ Thlr.

Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi promota etc., reimprimé sur l'édition originale de 1712 *avec l'indication des variantes de l'édition de* 1722, *complété par une collection de pièces justificatives et de documents; publié par B. Biot et J. Lefort. Paris.* 5 Thlr.

Tables des logarithmes pour les nombres et les sinus à cinq décimales, par J. Lalande, révues par le baron Raynaud. Paris, Mallet-Bachelier. 2 [illegible]

Angewandte Mathematik.

Bauernfeind, Prof. Dr. Elemente der Vermessungskunde. I. Bd. die Messinstrumente und ihr Gebrauch. Mit Holzschnitten im Text. München, litterarisch-artistische Anstalt. n. 2 Thlr. 24 Ngr. (3 fl. 48 xr. rh.)

Die Declination der Sonne und Zeitgleiche für die Jahre 1856 bis 1860 nach dem Meridian von Greenwich. Hamburg (Leipzig, Gerhard). ⅛ Thlr.

Anleitung zur militärischen Aufnahme, mit den Vorstudien der Terrainlehre und Situationszeichnung. Von W. K. 2. Aufl. Olmütz, Hölzel. n. 1¼ Thlr.

MARIN, Prof. **Elemente der Maschinenlehre für Oberrealschulen.** 2. Hälfte. Brünn, Buschak u. Irrgang. compl. n. 2 Thlr.

BURG, A. v. **Ueber den Einfluss des Maschinenwesens auf unsere socialen Verhältnisse.** Wien, Braumüller in Comm. n. 4 Ngr.

Précis de mécanique théorique et appliqué pour l'enseignement des lycées; par M. Deguin. Paris, Eug. Belin.

A Course of practical Geometry; by W. Pease. 3. edit. London. 2 sh. 6 d.

The Principles of Hydrostatics; by Thomas Webster. 4. edit. Cambridge, Deighton Bell & Comp. 7 sh. 6 d.

The Theory of the Motion of Fluids; by the same Author. By the same. 9 sh.

Lunar-Motion, Correspondence between the Astronomer Royal et Mr. Symon on this subject, with the arguments on each side. Groombridge. 1 sh.

Physik.

FRICK, Prof. Dr. **Anfangsgründe der Naturlehre.** 3. Aufl. Mit Holzschnitten im Texte. Freiburg im Br., Wagner. n. 27 Ngr.

HAECKER, P. W. **Zur Theorie des Magnetismus.** Nürnberg, J. L. Schmidt. 2 Thlr.

Physikalisches Lexicon von O. MARBACH, fortges. von S. CORNELIUS. 2. Aufl. Lieferung 45 bis 48. Leipzig, O. Wigand. à ⅓ Thlr.

CORNELIUS, Dr. C. **Grundriss der physikalischen Geographie.** 2. verb. Aufl. Halle, Schmidt. n. ⅓ Thlr.

BAUMGAERTNER, Dr. A. v. **Das mechanische Aequivalent der Wärme und seine Bedeutung in den Naturwissenschaften.** Vortrag in der feierl. Akademiesitzung vom 30. Mai 1856. Wien, Braumüller. 4 Ngr.

HOFFMANN, F. **Zur Widerlegung der absoluten und bedingten Atomistik.** Leipzig, Bethmann. ⅙ Thlr.

PRESTEL, Gymn.-Lehrer Dr. **Tabellarischer Grundriss der Experimentalphysik.** Emden (Leipzig, F. Fleischer). n. 1 Thlr.

HINRICHS, Gust. **Die elektromagnetische Telegraphie;** mit einer Telegraphenkarte von Mitteleuropa. Hamburg, Perthes, Besser und Mauke. n. ⅓ Thlr.

Das Windsystem oder die Luftbewegungen an der Erdoberfläche und in den höheren Regionen der Atmosphäre. Von Dr. LARTIGUE. Nach der 2. Aufl. deutsch bearb. von D. TRÖBST. Weimar, Voigt. ½ Thlr.

Observations météorologiques faites à l'Observatoire imp. de Paris pendant les années 1854 et 1855. Paris. 1⅓ Thlr.

Cours de Physique rédigé conformément aux programmes officiels etc. par M. Peyré. 3. édition. Paris chez Delalain. 4 fr. 50 c.

Exposé des applications de l'électricité: par le vicomte Th. du Moriel. Tome 1. Notions technologiques. Paris, Hachette. 5 fr.

Solution d'un problème d'acoustique musicale. Loi physique et mathématique de la gamme et de la division de ses intervalles; par Eug. Vignon. Paris, Firmin Didot.

The Stereoscope, its History, Theory and Construction; by David Brewster. London, Murray. 5 sh. 6 d.

Theory of the winds, by Captain Wilkes U. S. N. New York.

Handbook of Electricity, Magnetism and Acoustics; by Dr. Lardner. London. 5 sh.

Hansteen, Chr. *Den magnetiske Inclinations Forandering i den nordlige tempererte Zone.* Leipzig, Lorck. 1 Thlr.

Druckfehler.

In den Formeln 27) und 28) des Aufsatzes XI. ist rechter Hand $\frac{1}{8} h F'(x)$ durch $\frac{1}{8} h \triangle F'(x)$ zu ersetzen.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

gebrauchen können. Wenn es z. B. in II., 2 heisst „man zerlege die Schwierigkeit in so viel Theile als möglich", so ist erstens die Frage, wo eigentlich die Schwierigkeit steckt und zweitens, wie sie zerlegt werden soll. Ebensowenig nützt es etwas, wenn der Verfasser in Beziehung auf die Hülfslinien sagt: „Hat man die Aufgabe sorgfältig durchdacht, so wird man durch die in ihr enthaltenen Bedingungen in der Regel schon auf die nöthigen Hülfslinien hingeführt", denn das Aufsuchen der Hülfslinien ist meistens schwer und jenes „in der Regel" möchte nur bei sehr leichten Aufgaben wahr bleiben.

Für weit verdienstlicher hält Referent den letzten Abschnitt „Aufgaben und geometrische Oerter." Der Verfasser stellt nämlich Gruppen von Aufgaben in der Weise zusammen, dass eine oder zwei unbestimmte Aufgaben den Anfang einer solchen Gruppe bilden, und dass nachher eine Schaar von bestimmten Aufgaben folgt, die sich mittelst der aus jenen unbestimmten Aufgaben abgeleiteten geometrischen Oerter leicht lösen lassen. Diese Anordnung bietet den Vortheil, dass sie die Ansprüche auf Talent zur Erfindung auf ein Minimum reducirt ohne die Selbstthätigkeit des Schülers aufzuheben. Hauptsächlich dieser Aufgabensammlung wegen glaubt Referent das Prestel'sche Schriftchen den Schulmännern zur Beachtung empfehlen zu müssen.

Schlömilch.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 15. August 1856.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellsch. der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem. phys. Classe. Jahrgang 1856. I, Leipzig, Hirzel. n. ⅙ Thlr.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissensch. zu Wien. Mathem.-naturwissensch. Classe. Bd. XVIII, Heft 2, Jahrg. 1855. Wien, Braumüller in Comm. n. 1⅚ Thlr.

Dieselben Bd. XIX, Jahrg. 1856. Heft 1 und 2. Ebendas. n. 1⅚ Thlr.

Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der K. Baierischen Akademie der Wissenschaften. Bd. VII. Abth. 3. (In der Reihe der Denkschriften Bd. XXVIII). München 1855, Franz in Commission. n. 2 Thlr. (3 fl. 36 xr. rh.)

Vierteljahresschrift der naturforschenden Gesellsch. in Zürich. Red. v. R. Wolf. 1. Jahrg., 1. Heft. Zürich, Höhe in Comm. pr. 4 Hefte. n. 3 Thlr.

Archiv der Mathematik von J. A. Grunert. Theil 26, Hefte 2 und 3. Greifswald, Koch.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; par J. Liouville. Deuxième série. Tome 1, cahiers 2, 3, 4, 5. Paris, Mallet-Bachelier.

protestirt) der Trigonometrie vorausgesetzt. Eben so erlaubt wäre es gewesen, auch das Wichtigste über Reihenconvergenz als bekannt anzusehen und dadurch gründlichere Betrachtungen zu erzielen, als die sind, auf welche z. B. die Berechnung von e (S. 42) sich stützt. Wir sind der Meinung, dass alle diese sogenannten elementaren Entwicklungen des natürlichen Exponentialsystems doch nur ungenügend ausfallen müssen, und dass man daher entweder auf dem Boden der Analysis sich bewegen soll, oder zugestehen, dass man hier eine noch nicht ausgefüllte (vielleicht nicht auszufüllende) Lücke vor sich habe.

Bei seinen Vorlesungen über Analysis pflegt Referent folgenden Gang einzuschlagen, der, wie er glaubt, noch nicht veröffentlicht ist. Die Reihe für e^x wird nach Cauchy entwickelt und dann als Definition der Potenz im allgemeinsten Sinne gegeben. Hierauf wird als Argument dieser Funktion e^x der Werth $x\sqrt{-1}$ eingesetzt, wodurch die Gleichung entsteht

$$e^{x\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

In der Elementarmathematik wurde aber bewiesen, dass wenn ein Punkt der Zahlenebene gegeben war, zu dem ein Weg führte, der theils direct (d. h. positiv oder negativ), theils lateral war, jener erste Theil als Cosinus, jener zweite als Sinus eines Bogens φ betrachtet werden konnte, während der Radius als neue Einheit genommen wurde. In diesem Falle wird daher

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots = \cos\varphi, \quad \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots = \sin\varphi$$

zu setzen sein. Der Bogen φ ist unbekannt, wird aber auf irgend eine Weise von x abhängen. Wir führen daher die neue Bezeichnung ein, dass wir die erstere Reihe (also $\cos\varphi$) jetzt $\cos x$ nennen wollen, und ebenso werden wir den $\sin\varphi$ jetzt $\sin x$ nennen, wo also x irgend eine Zahl, keine Drehung bedeutet.

Fanden wir nun

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x,$$

so wird ganz analog

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos(-x) + \sqrt{-1}\,\sin(-x)$$

sein müssen. Wir werden aber auch $-x\sqrt{-1}$ für den Exponenten in die Exponentialreihe substituiren können und erhalten alsdann

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,.\,\sin x.$$

So ergiebt sich, dass auch in der neuen Bezeichnung:

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x,$$

wie es sich bei Drehungen bekantermaassen verhält.

Werden ausserdem die beiden Gleichungen:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi, \quad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos\varphi - \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi$$

multiplicirt und in Erwägung gezogen, dass schon in den Elementen der Satz $(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = 1$ bewiesen wurde, so ist evident

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{x\sqrt{-1}}}$$

woraus folgt, dass die Rechnung mit Exponentialgrössen mit lateralen Exponenten ganz auf dieselbe Weise ausgeführt wird, wie die mit directen Exponenten. Referent fühlt wohl, dass auch dieser Beweis noch nicht vollkommen streng ist, glaubt aber in diesem analytischen Wege die richtige Methode gefunden zu haben, die nur noch der Ausarbeitung bedarf.

Es scheint uns diesen analytischen Weg schon deshalb vorzuziehen, weil dadurch es jedem Geschmacke freigestellt bleibt, ob man die Zahlenebene als blosses Bild benutzen will oder mit dem Herrn Verfasser die Definition der Zahl (S. 110) als einer nach einer bestimmten Einheit gemessenen graden Linie aufstellt.

Unter den vielen schönen Anwendungen, welche ein Drittel des ganzen Buches ausmachen, heben wir besonders die Methoden hervor, mittelst deren angenäherte Rectificationen und Wurzelausziehungen erzielt werden. Letztere beruhen auf dem eleganten Satze, dass wenn $\sqrt[n]{A} = x$ und a ein zu kleiner Näherungswerth von x ist, immer die Grenzen existiren:

$$\frac{a}{a^n}\left\{a^n + \frac{A - a^n}{n}\right\} > x > \frac{a}{A}\left\{A + \frac{A - a^n}{n}\right\}.$$

Auch die Discussion der quadratischen (S. 95) und cubischen Gleichungen (S. 100) ist voller Interesse.

Am Schlusse finden sich noch historische und literarische Notizen, zu welchen einige Zusätze erlaubt sein mögen, die wir zum Theile unserem oben erwähnten eigenen Leitfaden entnehmen:

Français, Nouveaux principes de géométrie de position in Gergonnes Annales des mathématiques Tome IV, pag. 61 (*année* 1813) bedient sich bei richtigen Ansichten der Zeichen

$$1_0 = +, \quad 1_\pi = -; \quad 1_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}, \quad 1_{-\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{-1}.$$

In demselben Bande pag. 133 beansprucht Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les construction géométriques*, die Priorität dieser Ansichten unter Berufung auf eine Schrift desselben Titels wie der Aufsatz, welches letztere vom Herrn Professor Riecke auf S. 162 angeführt ist.

Endlich bemerkt Cauchy in einem Aufsatze in den *Comptes rendus de l'académie des sciences* (*T.* 29, 1849, *pag.* 250): „*sur les quantités géométriques*“, welcher gleichfalls hierher gehört, als Anmerkung: *Une grande partie des résultats de ces recherches avaient été, à ce qu'il parait, obtenue même avant le siècle présent et dès l'année* 1786 *par un savant modeste, Mr. Henry-Dominique Truel, qui après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année* 1810, *à Mr. Augustin Normand constructeur de vaisseaux au Havre.*

Zum Schluss müssen wir noch die sorgfältige Ausstattung erwähnen, indem uns nur ein Druckfehler aufgestossen ist. Auf S. 170 wird nämlich der Verfasser der *Etudes philosophiques sur la science du calcul* Vallas genannt, während er Vallès heisst.

Möge die Schrift recht viele Leser finden und den vom Herrn Verfasser gewünschten Erfolg im vollsten Maasse haben. Cantor.

Theorie der Determinanten und ihre hauptsächlichsten Anwendungen. Von Dr. FRANCESCO BRIOSCHI, Professor an der Universität Pavia. Aus dem Italiänischen übersetzt. Mit einem Vorwort von Prof. SCHELLBACH. Berlin, Verlag von Duncker & Humblot. 1856.

Bei der Auflösung linearer Gleichungen zwischen mehreren Unbekannten stösst man bekanntlich auf gewisse Funktionen der Coefficienten, welche Funktionen früher (von Cramer und Bezout) Resultanten genannt wurden, gegenwärtig aber, nach dem Vorgange von Gauss, allgemein Determinanten heissen. Bei zwei Gleichungen z. B.

$$a_1 x + b_1 y = k_1, \qquad a_2 x + b_2 y = k_2$$

ist der gemeinschaftliche Nenner von

$$x = \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ und } y = \frac{k_2 a_1 - k_1 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

die Determinante aus den Elementen a_1, a_2, b_1, b_2; die Zähler sind gleichfalls Determinanten und entstehen dadurch, dass man einmal a_1, a_2, und das andere Mal b_1, b_2 durch k_1, k_2 ersetzt. In gleicher Weise geschieht die Auflösung der drei Gleichungen

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2,$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3;$$

man bildet zunächst die Determinante dritter Ordnung

$$f(a, b, c) = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

und hat nachher

$$x = \frac{f(k, b, c)}{f(a, b, c)}, \quad y = \frac{f(a, k, c)}{f(a, b, c)}, \quad z = \frac{f(a, b, k)}{f(a, b, c)}.$$

Ueberhaupt ist die Determinante aus den n^2 Elementen

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots & a_{2,n}, \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots & a_{3,n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots & a_{n,n}, \end{array}$$

ein Aggregat von lauter Produkten aus je n Elementen; jedes solche Produkt kann aus dem als positiv angesehenen Produkte

$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \ldots a_{n,n}$$

durch Permutation der Indices abgeleitet werden und erhält das positive oder negative Vorzeichen, jenachdem die Anzahl der ersten Indices, welche permutirt wurden, gerade oder ungerade ist. Nach Jacobi bezeichnet man diese Determinante mit

$$\Sigma(\pm\, a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \ldots a_{n,n}),$$

in den Fällen aber, wo specielle Operationen mit den Elementen auszuführen sind, oder wo einige Elemente besondere Werthe annehmen, wählt man die ausführlichere Bezeichnung

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

in welcher alle Elemente sichtbar sind; also z. B.

$$\Sigma(\pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3} + a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3}$$
$$- a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3} - a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3} - a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3}.$$

Das Bildungsgesetz der Determinanten und die daraus folgenden Eigenschaften, wonach die Determinanten ihr Vorzeichen wechseln oder verschwinden, sobald gewisse Elemente permutirt oder gleichgesetzt werden, waren bereits Laplace und Vandermonde bekannt, ebenso die Zusammensetzung einer Determinante aus Determinanten niedrigerer Ordnung. In den Abhandlungen über die Rotation eines festen Körpers und über die dreiseitige Pyramide hat Lagrange einen sehr ausgedehnten Gebrauch von den Determinanten dritter Ordnung gemacht und namentlich auch die beiden Sätze bewiesen, dass das Quadrat einer Determinante wieder eine Determinante ist, und dass zweitens die Determinante aus den sogenannten reciproken Elementen einer Determinante dritter Ordnung dem Quadrate dieser letzten Determinante gleichkommt. Die erste dieser Eigenschaften erhielt eine Erweiterung durch Gauss, welcher in den *Disquiss. arithm.* zeigte, dass das Produkt zweier Determinanten zweiter oder dritter Ordnung wiederum eine Determinante ist z. B.

$$(ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma)$$
$$= (a\alpha + b\beta)(c\gamma + d\delta) - (a\gamma + b\delta)(c\alpha + d\beta)$$

d. h.

$$\begin{vmatrix} a, b \\ c, d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta, & a\gamma + b\delta \\ c\alpha + d\beta, & c\gamma + d\delta \end{vmatrix}.$$

Das allgemeine Multiplicationstheorem für Determinanten beliebiger Ordnungen und die Haupteigenschaften der Determinanten mit reciproken Elementen hat Cauchy entwickelt im *Journ. de l'école polyt. Cah. XVII* (1815). Erst im Jahre 1841, also über ein Vierteljahrhundert später, legte Jacobi in seiner Abhandlung *De formatione et proprietatibus determinantium* (Crelle's Journal Bd. 22) den Grund zu einer eigentlichen Theorie der Determinanten und gab zugleich die wichtige Lehre von den Funktionaldeterminanten, welche letztere auf die Weise entstehen, dass n abhängige Variabele $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$ als Funktionen der n unabhängigen Variabelen $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ betrachtet und die partiellen Differenzialquotienten

$$\frac{dy_1}{dx_1}, \frac{dy_1}{dx_2}, \frac{dy_1}{dx_3} \dots \frac{dy_1}{dx_n},$$
$$\frac{dy_2}{dx_1}, \frac{dy_2}{dx_2}, \frac{dy_2}{dx_3} \dots \frac{dy_2}{dx_n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dy_n}{dx_1}, \frac{dy_n}{dx_2}, \frac{dy_n}{dx_3} \cdots \frac{dy_n}{dx_n}$$

als Elemente zur Bildung der Determinante

$$\Sigma\left(\pm \frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy_2}{dx_2}\frac{dy_3}{dx_3} \cdots \frac{dy_n}{dx_n}\right)$$

benutzt werden. Hieran schliessen sich zahlreiche Arbeiten sowohl über einzelne Punkte der Theorie als über deren Anwendungen auf algebraische Gleichungen, Zahlenlehre, Analysis, Geometrie und Mechanik, woran sich Jacobi, Hesse, Borchardt, Joachimsthal, Cauchy, Hermite, Cayley, Sylvester, Salmon, Brioschi, Malmstén u. A. betheiligten. „Trotz der regen Thätigkeit auf diesem neuen Felde der Wissenschaft war an Lehrbüchern der Determinantentheorie ein empfindlicher Mangel; die Abhandlungen Jacobi's und eine nicht sehr correkte Schrift von Spottiswoode bet. *Elementary theorems relating to determinants*, *London, George Bell* 1851, waren bisher die einzigen Mittel zum Erlernen der genannten Theorie. Der Verfasser sowie der ungenannte Uebersetzer verdienen daher den Dank des wissenschaftlichen Publikums für die Herausgabe des vorliegenden neuen Lehrbuches, dessen Inhalt wir näher angeben wollen.

Nachdem der Verfasser in den beiden ersten Paragraphen Bezeichnung und Bildungsgesetz der Determinanten erörtert hat, entwickelt er in §. 3 die allgemeinen, auf Vertauschung der Elemente, Vorzeichenwechsel und Verschwinden der Determinanten bezüglichen Eigenschaften; so ist z. B.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

und zwar bedeutet diese Determinante das 16fache Quadrat von dem Inhalte desjenigen Dreiecks, dessen Seiten x, y, z sind. Ein anderes gutes Beispiel, welches der Verfasser hier beibringt, ist folgendes. Wenn s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 die Summen der 0ten, 1ten, 2ten, 3ten und 4ten Potenzen von den Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

bedeuten, so ist die Gleichung

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0$$

die Bedingung dafür, dass jene Gleichung zwei gleiche Wurzeln besitzt.

Die allgemeine Auflösung der linearen algebraischen Gleichungen zwischen beliebig vielen Unbekannten bildet den Inhalt des vierten Paragraphen. Als Anwendungen davon giebt der Verfasser eine rapide Entwickelung der Theorie der Pole und Polaren für Kegelschnitte, und einige Betrachtungen über die homogenen Funktionen. Setzt man nämlich die beiden ersten partiellen Differentialquotienten einer homogenen Funktion zweier Variabelen gleich Null und eliminirt die Variabelen aus den so gewonnenen

zwei Gleichungen, so bleibt eine Bedingungsgleichung übrig, deren linke Seite (vorausgesetzt, dass die Gleichung auf Null gebracht ist) die Discriminante jener homogenen Funktion heisst. Für die homogene Funktion zweiten Grades

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

sind die Differentialgleichungen

$$ax + by = 0, \quad bx + cy = 0,$$

nach Elimination von y bleibt die Bedingungsgleichung

$$ac - b^2 = 0,$$

mithin ist $ac - b^2$ die Discriminante jener Funktion. Mittelst eines überaus einfachen von Sylvester angegebenen Verfahrens kann diese Discriminante immer als Determinante dargestellt werden; sie ist für die obige Funktion

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c \end{vmatrix};$$

für die homogene Funktion dritten Grades

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

bei welcher die Entwickelung auf gewöhnlichem Wege schon ziemlich weitläufig ausfallen würde, ist die Discriminante

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2).$$

Ueberhaupt besteht die Discriminante einer homogenen Funktion n^{ten} Grades mit zwei Variabelen aus einer homogenen Funktion $(2n - 2)^{\text{ten}}$ Grades der Coefficienten.

Die Multiplication und Potenzirung der Determinanten findet ihre Erörterung in §. 5 und wird auf verschiedene Beispiele angewendet. So kann man u. A. die bekannte cubische Gleichung

$$\left.\begin{array}{c}(a-s)(b-s)(c-s) \\ -\alpha^2(a-s) - \beta^2(b-s) - \gamma^2(c-s) + 2\alpha\beta\gamma\end{array}\right\} = 0,$$

welche zur Bestimmung der Hauptachsen der Flächen zweiter Ordnung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2\alpha yz + 2\beta xz + 2\gamma xy + \ldots = 0,$$

sowie zur Ermittelung der Hauptträgheitsachsen eines Körpers etc. gebraucht wird, in Form einer Determinante schreiben, nämlich

$$\begin{vmatrix} a-s, & \gamma, & \beta \\ \gamma, & b-s, & \alpha \\ \beta, & \alpha, & c-s \end{vmatrix} = 0$$

und daraus nach Sylvester's Anleitung einen einfachen Beweis für die Realität ihrer drei Wurzeln herleiten. Von nicht minderem Interesse sind die übrigen Anwendungen auf die analytische Geometrie, das Tetraëder etc.

Der 6. Paragraph behandelt die Determinanten mit sogenannten reciproken Elementen (Determinanten von Determinanten); bezeichnet man nämlich mit P die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

betrachtet sie als Funktion ihrer variabelen Elemente und setzt zur Abkürzung den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = \alpha_{r,s},$$

so versteht Brioschi unter der zur Determinante P gehörigen Determinante mit reciproken Elementen die folgende

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Die Haupteigenschaft der letzteren besteht darin, dass ihr Werth $= P^{n-1}$ ist. Man wird durch die hieher gehörigen Formeln in den Stand gesetzt, mehrere geometrische Probleme mit grösster Leichtigkeit zu lösen, z. B. den Flächeninhalt eines Dreiecks zu finden, wenn die Gleichungen seiner Seiten gegeben sind, oder das Volumen eines Tetraëders aus den Gleichungen seiner Seitenebenen herzuleiten, ferner zu entscheiden, ob ein gegebener Punkt innerhalb, auf oder ausserhalb einer gegebenen Linie oder Fläche zweiten Grades liegt und dergl. mehr.

Der 7. Paragraph behandelt die Eigenschaften der Unterdeterminanten, welche aus einer ursprünglichen vollständigen Determinante durch Weglassung einer beliebigen Anzahl von Horizontalreihen oder Verticalcolonnen entstehen. Zur Anwendung der gewonnenen Resultate bespricht der Verfasser das Problem „eine quadratische Funktion von n Variabelen durch lineare Substitutionen in eine andere quadratische Funktion zu verwandeln, welche nur die Quadrate der neuen Variabelen enthält", was für $n = 3$ die Aufgabe von der Bestimmung der Hauptachsen einer Fläche zweiter Ordnung ist. Soll nämlich die Funktion

$$U = \Sigma_r \, \Sigma_s \, a_{r,s} \, x_r x_s$$

mittelst der Substitutionen

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{1,1} z_1 + c_{2,1} z_2 + \dots + c_{n,1} z_n \\ x_2 &= c_{1,2} z_1 + c_{2,2} z_2 + \dots + c_{n,2} z_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= c_{1,n} z_1 + c_{2,n} z_2 + \dots + c_{n,n} z_n \end{aligned}$$

auf die Form

$$V = \Sigma_r A_r z_r^2$$

gebracht werden, so sind die n Coefficienten A_r die Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - s & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - s & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Dass diese Gleichung, auf welche zuerst Laplace bei seinen Untersuchungen über die sacularen Ungleichheiten der Planeten stiess, n reelle Wurzeln besitzt, haben früher schon Jacobi und Borchardt gezeigt; der Verf. giebt einen neuen Beweis von ausserordentlicher Kürze.

Eine Determinante, deren Elemente die Eigenschaft $a_{s,r} = -a_{r,s}$ besitzen, heisst eine überschlagene (*gobbo*, *gauche*) und ausserdem symmetrisch, wenn zugleich $a_{r,r} = 0$. Diese besonderen Determinanten betrachtet der Verf. in §. 8; charakteristisch für dieselben sind die beiden Eigenschaften, dass jede überschlagene symmetrische Determinante ungerader Ordnung gleich Null, und jede überschlagene symmetrische Determinante gerader Ordnung ein Quadrat ist. Die Benutzung derartiger Determinanten bietet wesentliche Vortheile bei der Theorie der Rotation eines Körpers um einen Punkt (Hamilton, Cayley) und bei den Formeln für die Variation der willkürlichen Constanten durch störende Kräfte. Noch erwähnt der Verf. die einfach symmetrischen Determinanten, deren Elemente der Bedingung $a_{s,r} = + a_{r,s}$ genügen, wie z. B.

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ b_2 & b_3 & \ldots & b_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & b_{n+1} & \ldots & b_{2n-1} \end{vmatrix}$$

und macht davon Gebrauch zur Entwickelung eines in die Theorie der algebraischen Gleichungen gehörenden Satzes.

Die Determinanten der Wurzeln algebraischer Gleichungen werden in §. 9 betrachtet; mit ihrer Hülfe lassen sich mehrere ziemlich versteckt liegende Relationen sehr einfach beweisen. Als Anwendung dient die Untersuchung solcher Determinanten, deren Elemente bestimmte einfache Integrale sind; der Werth der Determinante ist in diesem Falle ein mehrfaches Integral, und es können auf diesem Wege Reductionen von vielfachen Integralen auf Determinanten einfacher Integrale gewonnen werden. Im Zusammenhange damit stehen die Determinanten der particulären Integrale linearer Differentialgleichungen; hierbei ergiebt sich auch der interessante Malmstén'sche Satz, dass aus $n - 1$ particulären Integralen einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung das letzte (n^{te}) particuläre Integral abgeleitet werden kann.

Die in §. 10 auseinandergesetzte Theorie der Funktionaldeterminanten liefert die Mittel zur Einführung neuer Variabelen in Differentialgleichungen, wodurch mehrere von Jacobi, Laplace, Sylvester u. A. gefundene Transformationen entwickelt werden. Auch ergiebt sich aus dieser Theorie die allgemeine Formel zur Einführung neuer Variabelen in ein mehrfaches Integral, welche bekanntlich das hauptsächlichste Mittel zur Reduction vielfacher Integrale und schon mehrfach, wenn auch nicht immer auf so einfache Weise behandelt worden ist.

Der 11. und letzte Paragraph beschäftigt sich mit den Determinanten Hesse's. Bezeichnet nämlich u eine ganze homogene Funktion der Variabelen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ und setzt man

$$\frac{d^2 u}{dx_r\, dx_s} = u_{r,s} = u_{s,r},$$

so wird die Determinante

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n} \end{vmatrix}$$

nach ihrem Erfinder genannt; ist u vom m^{ten} Grade, so bildet v eine homogene Funktion des $n(m-2)^{ten}$ Grades. Hauptsächlich bei geometrischen Untersuchungen spielt diese Determinante eine hervorragende Rolle; bezeichnet z. B. $u=0$ die homogene Gleichung einer Curve m^{ter} Ordnung zwischen drei sogenannten Linearcoordinaten, so ist das Verschwinden von v die Bedingung dafür, dass jene Curve aus m durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden besteht*); wenn ferner $u=0$ die homogene Gleichung einer Fläche m^{ter} Ordnung zwischen vier Linearcoordinaten bedeutet, so wird die Fläche zu einem Kegel für $v=0$.

Aus dieser Mittheilung wird man ersehen, dass das Brioschi'sche Werk einen sehr reichen Inhalt bietet, der übrigens auf verhältnissmässig kleinem Raume (102 Seiten in 4to) zusammengedrängt ist. So gern Refer. diess anerkennt, so wenig darf er andererseits verschweigen, dass das Streben nach Kürze und Concinnität den Verfasser oft zu lakonischen Redensarten und Gedankensprüngen veranlasst hat, wie sie in einem Lehrbuche keinenfalls vorkommen dürften. Pflicht des Uebersetzers wäre es daher gewesen, diese Lücken auszufüllen, überhaupt ungeübteren Lesern mit erläuternden Noten unter die Arme zu greifen; dass dies nicht geschehen, muss Referent als einen wesentlichen Mangel der Uebersetzung bezeichnen. Ferner möchte Referent die Angabe des Vorworts, dass Brioschi sorgfältig auf die Quellen verweise, nicht unbedingt unterschreiben; der Verf. citirt allerdings viel aber oft nur secundäre Quellen, und fast möchte man glauben, Brioschi habe sich von den Engländern so sehr imponiren lassen, dass ihm nicht selten die primitiven Quellen aus dem Gesichtskreise entschwunden sind. Es wäre nämlich ausserdem unbegreiflich, warum der Verf. sich oft an die miserable englische Terminologie anschliesst, wo schon Gauss und Jacobi die passendere Bezeichnung früher angegeben haben. So sagt Jacobi nicht Unterdeterminante, sondern partielle Determinante; ungeschickt ist ferner der Ausdruck „Determinante mit reciproken Elementen, weil man nach deutscher Redeweise hiernach schliessen muss, dass die neue Determinante aus den Elementen $\frac{1}{a_{1,1}}, \frac{1}{a_{1,2}}$ etc. gebildet ist; es muss statt dessen heissen: Determinante mit adjun-

---

*) Die Gleichung der Kegelschnitte z. B.

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

wird homogen wenn man $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ setzt, nämlich

$$u = Ax_1^2 + Bx_2^2 + 2Cx_1x_2 + 2Dx_1x_3 + 2Ex_2x_3 + Fx_3^2 = 0;$$

mithin ist die genannte Bedingung

$$v = \begin{vmatrix} 2A & 2C & 2D \\ 2C & 2B & 2E \\ 2D & 2E & 2F \end{vmatrix} = 0$$

d. i. nach Ausrechnung und Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors 8

$$AE^2 + BD^2 - 2CDE + (C^2 - AB)F = 0,$$

was mit einem bekannten Satze der analytischen Geometrie übereinstimmt.

;irten Elementen. Auch hier hätte der Uebersetzer, wenn er etwas von ler Sache verstand, die bessere Bezeichnung anführen sollen. Was Hesse's Determinante (englisch *A Hessian!*) betrifft, so dürfte vielleicht der Ausdruck nflexionsdeterminante durch seine Erinnerung an den Gebrauch lieser Determinante passend sein.

Trotz dieser Ausstellungen bleibt indessen Brioschi's Buch immer ine werthvolle Arbeit, die von Seiten der deutschen Mathematiker alle Beachtung verdient. Die typographische Ausstattung der Uebersetzung st eben so elegant wie die des Originales und scheint auch von Druckehlern fast gänzlich frei zu sein. SCHLÖMILCH.

Die Lehre der Messung von Kräften mittelst der Bifilarsuspension. Von Dr. CHR. STÄHELIN. Aus den neuen Denkschriften der allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften. Bd. XIII. Zürich 1853. — (In Quart mit gr. Kupfertaf.)

Bei dem allgemeinen Bestreben, alle Naturerscheinungen nach Zahl und Maass zu bestimmen, und dadurch eine von der sinnlichen Anschauung und blossen Schätznng möglichst unabhängige Grundlage für die Theorie zu gewinnen und die physikalischen Probleme so auf mathematische zurückzuführen, handelt es sich vielfach darum, sehr kleine Kräfte der Anziehung und Abstossung nicht blos zur Erscheinung zu bringen, sondern auch quantitativ genau zu bestimmen. Das Letztere ist in vielen Fällen äusserst schwierig, um so mehr, je kleiner die zu messenden Kräfte sind. Der Grund davon liegt gewöhnlich in der Reibung; denn es wird häufig durch dieselbe ein grosser Theil der zu messenden Kraft annullirt und der Beobachtung entzogen, so dass selbst unter günstigen Umständen sich oft kaum mehr erreichen lässt, als die Reibung eben zu überwinden. Dann ist zwar das Vorhandensein der Kraft nachgewiesen und dieselbe ist qualitativ bestimmbar, aber von einer Messung derselben kann in diesem Falle nicht die Rede sein; denn es müsste dann die Reibung einer scharfen quantitativen Bestimmung fähig sein und für die zu messende Kraft substituirt werden können, was durchaus nicht der Fall ist. Man muss daher bei jeder feineren Messung voraussetzen können, dass die Reibung im Vergleich mit der zu messenden Kraft nur ein verschwindend kleiner Bruchtheil sei. Diese Voraussetzung lässt sich nur bei der Messung grösserer Kräfte machen und selbst dann muss auf möglichste Veränderung der Reibung Bedacht genommen werden, sobald es sich um feinere Bestimmungen handelt. Zur Messung sehr kleiner Kräfte aber, wie der Variationen der erdmagnetischen Kraft, oder schwacher elektrischer Kräfte oder Ströme oder der Anziehung zweier ponderabler Massen gegenüber der Schwerkraft u. s. w. lässt sich nur dann ein Instrument herstellen, wenn die Reibung gänzlich ausgeschlossen wird. Diesem letzteren Bedürfnisse verdanken zwei sehr wichtige Vorrichtungen ihren Ursprung: die Drehwaage von Coulomb, überhaupt die unifilare Aufhängung, und die bifilare Aufhängung (Bifilarsuspension) von Gauss. Beiden Instrumenten hat Gauss die bekannte sinnreiche Einrichtung mit Spiegel, Scale und Fernrohr zur Bestimmung der Drehungswinkel hinzugefügt, wodurch dieselben zu den feinsten Messwerkzeugen erhoben worden sind, die man vielleicht gegenwärtig hat, und mit denen sich daher, da sie überdiess ausser den bisherigen gewiss

noch mancher anderer Anwendungen fähig sind, jeder angehende Physiker vertraut machen sollte.

Hierzu ist die Abhandlung des Herrn Dr. Stähelin (gegenwärtig Professor der Physik an der Universität zu Basel), in welcher Theorie und Praxis der bifilaren Aufhängung (die unifilare kann als ein besonderer Fall derselben angesehen werden) äusserst klar und erschöpfend vorgetragen werden, in hohem Grade geeignet und ist dieselbe als ein sehr dankenswerthes Unternehmen zu begrüssen.

Referent hat im Jahre 1850 im Programme der Zittauer Gewerbschule schon eine Theorie der bifilaren Aufhängung gegeben*), musste sich aber damals bei dem zugemessenen Raume, den eine solche Gelegenheitsschrift nur gewährt, auf die Theorie derselben beschränken, und konnte auch diese nur soweit ausführen, als die Bifilaraufhängung einzig nur der Schwerkraft unterworfen ist. Derselbe hatte damals am Schluss seiner Abhandlung die Absicht ausgesprochen, in einem späteren Programme den praktischen Theil der bifilaren Aufhängung behandeln zu wollen.

Durch die vorliegende Arbeit des Herrn Stähelin hat sich aber diese Aufgabe völlig erledigt. Derselbe hat ausser der Theorie der bifilaren Aufhängung, sofern dieselbe blos unter dem Einflusse der Schwere steht, auch die Fälle behandelt, wo sogenannte adjungirte Kräfte hinzutreten, was eigentlich die Hauptbestimmung des Apparates ausmacht; ferner hat derselbe die ausserordentliche Leistungsfähigkeit dieses Instruments in seinen verschiedenen Leistungen überall in's klare Licht gesetzt und endlich in einem besonderen praktischen Theil über die Einrichtung des Apparates für verschiedene Zwecke, dessen Aufstellung und Behandlung vor und bei den Beobachtungen das Nöthige hinzugefügt, so dass diese Arbeit wohl Alles enthält, was auf Theorie und Praxis der bifilaren Aufhängung Bezug hat und bei deren Anwendung zu wissen nöthig ist. Es scheint, dass diese vorzügliche Arbeit noch nicht die Beachtung gefunden hat, welche sie verdient, daher es bei der Wichtigkeit des Gegenstandes nicht unangemessen sein dürfte, wenn wir in Folgendem über den Hauptinhalt derselben etwas ausführlicher referiren, als es sonst wohl zu geschehen pflegt.

Zuerst giebt der Verfasser einige historische Notizen und erwähnt, dass eine Aufhängung an zwei Fäden früher vielleicht schon öfter benutzt worden sei, aber nur um die Wirkung äusserer Kräfte qualitativ zu zeigen (durch W. Weber, 1833, um die Wirkung galvanischer Ströme zur Erscheinung zu bringen, wobei allerdings die beiden Aufhängungsdräthe nur zur Zu- und Ableitung des galvanischen Stromes dienten). Snow Harris scheint (1836) den ersten Versuch gemacht zu haben, die bifilare Aufhängung zu quantitativer Bestimmung äusserer Kräfte zu benutzen, doch kann sein Apparat als ein Bifilarapparat im jetzigen Sinne nicht angesehen werden und hat auch keinen Eingang gefunden. Die wahre Methode der bifilaren Aufhängung und die Erkennung der richtigen Gesetze derselben ist zuerst von Gauss aufgefunden und zu allseitigem Vortheile der Wissenschaft in das Gebiet der Physik eingeführt worden; — zuerst als Bifilarmagnetometer, ein Instrument, das gegenwärtig allgemein verbreitet ist und zur Bestimmung der Intensitätsänderungen des Erdmagnetismus dient, — sodann als Stellvertreter der astatischen Nadel, in verkehrter Lage

*) Die Theorie der bifilaren Aufhängung von Franz Dietzel. Programm der Gewerbschule zu Zittau. Ostern 1850.

Dass diese Gleichung, auf welche zuerst Laplace bei seinen Untersuchungen über die säcularen Ungleichheiten der Planeten stiess, n reelle Wurzeln besitzt, haben früher schon Jacobi und Borchardt gezeigt; der Verf. giebt einen neuen Beweis von ausserordentlicher Kürze.

Eine Determinante, deren Elemente die Eigenschaft $a_{s,r} = - a_{r,s}$ besitzen, heisst eine überschlagene (*gobbo*, *gauche*) und ausserdem symmetrisch, wenn zugleich $a_{r,r} = 0$. Diese besonderen Determinanten betrachtet der Verf. in §. 8; charakteristisch für dieselben sind die beiden Eigenschaften, dass jede überschlagene symmetrische Determinante ungerader Ordnung gleich Null, und jede überschlagene symmetrische Determinante gerader Ordnung ein Quadrat ist. Die Benutzung derartiger Determinanten bietet wesentliche Vortheile bei der Theorie der Rotation eines Körpers um einen Punkt (Hamilton, Cayley) und bei den Formeln für die Variation der willkürlichen Constanten durch störende Kräfte. Noch erwähnt der Verf. die einfach symmetrischen Determinanten, deren Elemente der Bedingung $a_{s,r} = + a_{r,s}$ genügen, wie z. B.

$$\begin{vmatrix} b_1 \, b_2 \, \ldots\ldots \, b_n \\ b_2 \, b_3 \, \ldots\ldots \, b_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n \, b_{n+1} \ldots b_{2n-1} \end{vmatrix}$$

und macht davon Gebrauch zur Entwickelung eines in die Theorie der algebraischen Gleichungen gehörenden Satzes.

Die Determinanten der Wurzeln algebraischer Gleichungen werden in §. 9 betrachtet; mit ihrer Hülfe lassen sich mehrere ziemlich versteckt liegende Relationen sehr einfach beweisen. Als Anwendung dient die Untersuchung solcher Determinanten, deren Elemente bestimmte einfache Integrale sind; der Werth der Determinante ist in diesem Falle ein mehrfaches Integral, und es können auf diesem Wege Reductionen von vielfachen Integralen auf Determinanten einfacher Integrale gewonnen werden. Im Zusammenhange damit stehen die Determinanten der particulären Integrale linearer Differentialgleichungen; hierbei ergiebt sich auch der interessante Malmstén'sche Satz, dass aus $n - 1$ particulären Integralen einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung das letzte (n^{te}) particuläre Integral abgeleitet werden kann.

Die in §. 10 auseinandergesetzte Theorie der Funktionaldeterminanten liefert die Mittel zur Einführung neuer Variabelen in Differentialgleichungen, wodurch mehrere von Jacobi, Laplace, Sylvester u. A. gefundene Transformationen entwickelt werden. Auch ergiebt sich aus dieser Theorie die allgemeine Formel zur Einführung neuer Variabelen in ein mehrfaches Integral, welche bekanntlich das hauptsächlichste Mittel zur Reduction vielfacher Integrale und schon mehrfach, wenn auch nicht immer auf so einfache Weise behandelt worden ist.

Der 11. und letzte Paragraph beschäftigt sich mit den Determinanten Hesse's. Bezeichnet nämlich u eine ganze homogene Funktion der Variabelen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ und setzt man

$$\frac{d^2 u}{dx_r \, dx_s} = u_{r,s} = u_{s,r},$$

so wird die Determinante

hatte. Jedenfalls liegt in dieser Anwendung des Dynamometers noch eine reiche Quelle zu Untersuchungen für die Zukunft und es werden vielleicht auf diese Weise Ströme und elektrische Schwingungen in der Natur entdeckt werden, die für uns bis jetzt noch verborgen sind.

Diese ausserordentlichen Leistungen des Bifilardynamometers glaubte Referent ausführlicher hervorheben zu müssen, um namentlich angehende Physiker auf die Wichtigkeit und Bedeutung dieses Instruments hinzuweisen.

§§. 29—71. schickt der Verfasser einen allgemeinen Ueberblick der Resultate der Theorie voraus, hauptsächlich wohl, um das Verständniss der eigentlichen Theorie vorzubereiten, sowie um einige nöthige Begriffsbestimmungen vorausgehen zu lassen. Die Bifilarsuspension ist hiernach die Aufhängung eines Körpers an zwei Fäden nach bestimmten Regeln, mit der Absicht, die Kräfte zu messen, welche von anderen Körpern auf ihn ausgeübt werden, und zwar vermittelst kleiner Drehungen, die der Körper um die Vertikale durch seinen Schwerpunkt erleidet und die man Ablenkungen nennt; hierbei wird der Ablenkungswinkel gemessen, aber auch Schwingungsbeobachtungen lassen sich mit derselben Schärfe ausführen. Bei diesen Messungen ist in der Regel eine mit dem Apparate verbundene Spiegeleinrichtung vorauszusetzen. Die Theorie zeigt (§§. 78—88), dass Alles in Bezug auf die durch den Schwerpunkt des aufgehängten Körpers gedachte Vertikale, Drehungsaxe oder kurzweg Axe, symmetrisch sein muss; die Fäden können dabei entweder vertikal oder geneigt sein. Unter dem blossen Einflusse der Schwere stellt sich eine Gleichgewichtslage ein, in welcher die durch die zwei untern Fadenendpunkte gedachte Gerade, welche der Verfasser die Copula nennt, und die Gerade durch die zwei obern Fadenenden einander parallel sind. Wird der Körper aus dieser Lage abgelenkt, so steigt er etwas, und die Schwere strebt ihn in die Gleichgewichtslage zurückzuführen mit einem Drehungsmoment, welches hinlänglich genau dem Sinus des Ablenkungswinkels ϱ proportional gesetzt werden kann, und welches der Verfasser das rücktreibende Moment der Schwere nennt; die horizontalen Kräfte, durch die es versinnlicht werden kann, werden die Kräfte der Schwere genannt. Für $\varrho = 90^0$ ist das rücktreibende Moment ein Maximum und heisst dann (nach Gauss) das Directionsmoment der Schwere oder das statische Directionsmoment (die mathematischen Ausdrücke werden wir weiter unten folgen lassen). Wenn äussere Kräfte dem Körper eine Ablenkung ϱ ertheilen, so ist ihr Drehungsmoment gleich dem rücktreibenden Moment der Schwere ϱ; dieses letztere aber lässt sich aus dem Ablenkungswinkel, den man gemessen hat, berechnen: das Moment der äussern Kräfte ist also bekannt, die Kräfte sind gemessen. Es handelt sich folglich nur darum, das rücktreibende Moment oder vielmehr ein für allemal das Directionsmoment der Schwere auszumitteln; dieses wird im theoretischen Theile (§. 223 ff.) gelehrt.

Wenn nun neben der Schwere noch andere Kräfte (Kräftepaare) auftreten, welche der Verf. adjungirte Kräfte nennt, so tritt ein neuer Gleichgewichtszustand ein, den man den complexen nennen kann. Mit ihm kann auch eine neue Gleichgewichtslage verbunden sein, wenn die Richtung der adjungirten Kräfte von der der Schwerkräfte abweicht; diese neue Gleichgewichtslage ist eine Zwischenlage zwischen den früheren (unter der blossen Einwirkung der Schwere) und der Lage, welche die adjungirten Kräfte

allein (ohne Bifilarsuspension, bei freier Beweglichkeit des Körpers) herbeiführen würden, und lässt sich dieselbe mit Hülfe des Kräfteparallelogramms leicht finden. Der Körper wird daher nach einer Ableitung mit einem neuen Drehungsmomente in die Gleichgewichtslage zurückgetrieben, welches auch dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional ist und vom Verfasser das resultirende oder complexe rücktreibende Moment genannt wird; es findet ein neues, das resultirende oder complexe Directionsmoment statt, sowie eine neue Schwingungsdauer und eine neue Empfindlichkeit des Apparats.

Je nachdem die Richtungen der Kräfte der Schwere mit denen der adjungirten Kräfte entweder zusammenfallen oder ihnen entgegengesetzt sind oder mit ihnen einen Winkel bilden, nennt Gauss diese 3 Fälle beim Bifilarmagnetometer die natürliche, die verkehrte und die transversale Lage. Dieselben Bezeichnungen lassen sich allgemein einführen und es geschieht dies im ganzen Verfolge der Abhandlung, also z. B. namentlich bei der Betrachtung des Elektrodynamometers.

Der Verfasser charakterisirt nun diese drei Lagen näher und setzt sehr klar auseinander, wie bei der zweiten oder verkehrten Lage dem Apparate jeder Grad von Empfindlichkeit ertheilt, derselbe so nahe man will astatisch gemacht werden kann. Natürlich müssen die Schwerkräfte etwas grösser sein, als die adjungirten Kräfte, wenn der Gleichgewichtszustand stabil sein soll; je geringer aber die Differenz, desto empfindlicher der Apparat; diese Differenz kann man aber beliebig ändern, indem man nur, was leicht ausführbar ist, den Abstand der Fäden zu ändern braucht; man kann so einen vielmal empfindlicheren Apparat erhalten, als ihn die unifilare Aufhängung gewährt. Dadurch ist unter andern auch das Mittel gegeben, die Richtungsänderungen der adjungirten Kräfte, z. B. die Declinationsänderung beim Erdmagnetismus so vielmal vergrössert zu erhalten, als man es wünscht (§. 9, 64, 331).

§. 72 ff. folgt nun die eigentliche Theorie der Bifilarsuspension — zunächst unter Voraussetzung idealer Verhältnisse —; die Fäden werden als gerade, gewichtlose, unausdehnbare Linien betrachtet, die um ihre unveränderlich angenommenen Befestigungspunkte vollkommen beweglich sein sollen; vom Luftwiderstande und sonstigen Bewegungshindernissen wird vorerst abstrahirt. — §. 75. wird der bekannte von Gauss aufgestellte Gleichgewichtssatz bewiesen: die Vertikale durch den Schwerpunkt des Körpers und die durch die Fäden dargestellten geraden Linien müssen sich in Einer Form befinden und zugleich entweder unter sich parallel sein oder sich in Einem Punkte schneiden. In §. 79 werden die Bahnen berechnet, welche die unteren Fadenenden beschreiben, wenn der Apparat sich um seine Axe dreht und in §. 80. die horizontalen Kräfte, welche die Schwere in den besagten Faden bei einer Ablenkung ϱ liefert. Auf beide Rechnungen gestützt folgt der Beweis des Satzes, dass Alles in Bezug auf die Axe symmetrisch sein muss, wenn der Apparat brauchbar sein soll; und sodann die Bestimmung des rücktreibenden Momentes (welche in §. 100 und in §. 119 auf zwei andere Arten gegeben wird). Zerlegt man bei einer Ablenkung um einen Winkel ϱ das auf die Fadenenden transponirte Gewicht des Körpers, gM, in zwei Componenten, die eine in Richtung der Fäden, welche aufgehoben wird,

die andere horizontal*), so werden bei vorausgesetzter Symmetrie des Apparates diese letzteren Componenten auf beiden Seiten gleiche Grösse und parallele aber entgegengesetzte Lage haben, mithin ein Kräftepaar sein, welches das horizontale Drehungsmoment oder das rücktreibende Moment der Schwere

$$U = \frac{abgM \sin\varrho}{\sqrt{h^2 - 2ab\,[1 - \cos\varrho]}}$$

giebt; dieses dient bei Ablenkungsversuchen als Maass der ablenkenden Kräfte; M bezeichnet die Masse des angehängten Körpers, g die Fallbeschleunigung, $2a$ den Abstand der zwei unteren, $2b$ den der zwei oberen Fadenendpunkte, h die Höhe der letzteren über den ersteren. Um einen einfachern Ausdruck zu gewinnen, nimmt man in der Praxis die Länge der Fäden (wovon h abhängt) im Vergleich zu ihren Abständen ($2a$ und $2b$) sehr gross; dann kann das Drehungsmoment der Schwere hinreichend angenähert gesetzt werden

$$u = \frac{abgM}{h} \sin\varrho$$

und man erreicht dadurch den grossen Vortheil, dass das Drehungsmoment dem Sinus des Ablenkungsmittels proportional ist, im Uebrigen aber nur von den Constanten a, b, g, M und h abhängig ist. Das Maximum desselben oder das statische Directionsmoment ist dann

$$D = \frac{abgM}{h}$$

so dass

$$u = D \sin\varrho$$

d. h. das rücktreibende Moment der Schwere ist gleich dem Producte aus dem Directionsmomente und dem Sinus des Ablenkungswinkels.

Die Fehler sind um so kleiner, je kleiner a und b gegen h sind, und bei kleinen Ablenkungswinkeln, wie sie in der Praxis immer nur angewandt werden, ist der Unterschied zwischen dem wahren Drehungsmomente U und dem genäherten $u = D \sin\varrho$ durchaus verschwindend, was der Verfasser analytisch nachweist und durch Zahlenbeispiele belegt.

Indem dem Apparat hierdurch ein so einfaches Reactionsgesetz $u = D \sin\varrho$ verschafft wird, erhält gleichzeitig durch diesen Umstand das Instrument seine grösste Empfindlichkeit, womit auch die Abnahme der vertikalen Steigung des aufgehängten Körpers im Zusammenhange steht; überdiess aber wird dadurch die Theorie für Anwendung des Apparates bei Gegenwart adjungirter Kräfte auf die einfache Weise ermöglicht, welche der Bifilarsuspension eine so hohe Bedeutung giebt (§. 43). Uebrigens ist die Aenderung des Abstandes der Fäden leicht und bequem auszuführen und also jederzeit die Möglichkeit gegeben, die Empfindlichkeit des Apparates zu verändern.

§. 106 ff. entwickelt der Verf. das Gesetz des Snow Harris'schen Ap-

---

*) Diese horizontale Componente an jedem Fadenende ist besonders gemeint, wenn kurzweg von den Schwerkräften gesprochen wird.

parates und benutzt das Resultat dieser Entwickelung zugleich, um daran zu zeigen, welchen Einfluss es hat, wenn an irgend einer Stelle zwischen den obern und untern Aufhängungspunkten der Abstand der Drähte verändert wird, wie dies W. Weber gethan hat (§. 342).

Eine der wichtigsten Entwickelungen ist nun die des Schwingungsgesetzes (§. 120 ff.); hierbei bedient sich der Verf. der Methode, in welcher Lagrange das Princip von D'Alembert mit dem Principe der virtuellen Geschwindigkeit vereinigt hat. Er beweist, dass die Bewegung eine regelmässig oscillirende ist und entwickelt für die Schwingungsdauer, d. i. die Zeit, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden grössten Ablenkungen oder Elongationen $+\varrho$ und $-\varrho$ verfliesst, den Ausdruck

$$T = \pi \sqrt{\frac{hK}{abgM}}\left\{1 + \frac{G^2}{64}\left(1 - \frac{3ab}{h^2} + \frac{4a^2b^2M}{h^2K}\right)\right\}$$

von K das Trägheitsmoment des angehängten Körpers, G den ganzen horizontalen Schwingungsbogen, welcher während der Zeit T durchlaufen wird, bezeichnet, a, b, g, h und M aber die frühere Bedeutung haben. Daraus ergiebt sich dann der Grenzwerth der Schwingungsdauer (für $G = 0$),

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{hK}{abgM}},$$

so wie die Reduction der Schwingungsdauer auf unendlich kleine Bögen, welche hinreichend genau nach der Formel

$$T_0 = T_1\left(1 - \frac{G^2}{64}\right)$$

bewirkt werden kann, wenn T_1 die beobachtete Schwingungsdauer ist. Allein wegen der Kleinheit der beobachteten Bögen ist diese Reduction meistens unnöthig.

Führt man das Directionsmoment $D = \frac{abgM}{h}$ ein, so wird jener Grenzwerth

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{K}{D}}$$

d. h. das Quadrat der Schwingungszeit ist proportional dem Trägheitsmoment und umgekehrt proportional dem Directionsmoment.

Es folgt nun (§. 131 ff.) die Specialtheorie des Apparates bei Zutritt von adjungirten Kräften. Das Directionsmoment der adjungirten Kräfte ist mit E, das der Schwere wie bisher mit D bezeichnet. Es sind nun die früher erwähnten drei Hauptlagen behandelt:

I. Erste oder natürliche Lage. Der Körper ist in Folge der Bifilarsuspension unter dem blossen Einflusse der Schwere in der Lage, in welche ihn auch die adjungirten Kräfte zu versetzen streben; die Gleichgewichtslage wird also durch das Einwirken jener Kräfte nicht geändert, sondern nur der Gleichgewichtszustand; die Kräfte der Schwere und die adjungirten Kräfte summiren sich; es entsteht bei einer Ablenkung z ein resultirendes oder complexes rücktreibendes Moment

$(D+E)\, sin\, z$; das resultirende oder complexe Directionsmoment ist $D+E$; die Schwingungsdauer $t_1 = \pi \sqrt{\frac{K}{D+E}}$.

II. Zweite oder verkehrte Lage. Der Körper erhält durch die blosse Bifilarsuspension eine Lage, welche mit derjenigen, die ihm die adjungirten Kräfte zu ertheilen streben, einen Winkel von 180° bildet; die Kräfte der Schwere und die adjungirten Kräfte sind einander entgegengesetzt; es entsteht daher, wie vorhin, keine neue Gleichgewichtslage, sondern nur ein neuer Gleichgewichtszustand; damit dieser stabil sei, müssen die Kräfte der Schwere grösser sein, als die adjungirten. Das complexe rücktreibende Moment ist $(D-E)\, sin\, z$, das complexe Directionsmoment $D-E$, die Schwingungsdauer $t_2 = \pi \sqrt{\frac{K}{D-E}}$. Die Empfindlichkeit kann beliebig gesteigert, insbesondere kann sie grösser gemacht werden, als diejenige, die bei einer Unifilarsuspension ohne Torsionswiderstand unter dem Einflusse der adjungirten Kräfte stattfinden würde, und zwar im Verhältnisse von $E : D-E$. — Diese Lage kommt, wie die vorige, in Betracht: 1. bei der Aufstellung des Bifilarmagnetometers (§§. 69, 154, 324, 331.) und 2. beim Gebrauche des Elektrodynamometers (§§. 347—349 und 355—359.) Ueberdies dient sie zu den Anwendungen, (galvanometrischer u. s. w.), die wir früher erwähnt haben. — §. 139 giebt der Verf. an, wie eine unabsichtliche Abweichung des Körpers von der ersten oder zweiten Lage, oder die Richtung der adjungirten Kräfte in Beziehung auf den Apparat, bestimmt wird, und wie man, wenn dies geschehen, den Körper in die richtige Lage bringt. Von diesen Bestimmungen wird bei der Behandlung des Bifilarmagnetometers und des Elektrodynamometers Gebrauch gemacht (§§. 318, 319, 350).

III. Dritte oder transversale Lage. Bei dieser schliessen im Allgemeinen die adjungirten und die Schwerkräfte einen Winkel zwischen 0° und 180° ein, der bei der transversalen Lage im engern Sinne ungefähr 155° beträgt. Es entsteht dann nicht nur ein neuer Gleichgewichtszustand, sondern auch eine neue Gleichgewichtslage, die complexe oder resultirende. Das äussere Kennzeichen dieser Lage ist, dass die Fäden im Gleichgewichtszustande nicht in Einer Ebene sind. Diese Lage gewährt uns das Mittel, die kleinen Aenderungen zu messen, welche in der Intensität der adjungirten Kräfte vor sich gehen können, und findet ihre Anwendung beim Bifilarmagnetometer*). Jene Aenderungen nämlich bringen Ablenkungen des Körpers von seiner complexen Gleichgewichtslage hervor, diese Ablenkungen sollen gemessen und aus ihnen die Grösse der Aenderungen berechnet werden. Allein es kann ja auch die Richtung der adjungirten Kräfte sich ändern und Ablenkungen hervorbringen, und wir wüssten dann nicht, von welchem Umstande die letzteren herrührten, oder wir müssten jedesmal zugleich die Richtungsänderungen an einem besonderen Instrumente be-

*) Nach der von Gauss in seiner *„Intensitas vis terrestris ad mensuram absolutam revocata"* angegebene Methode erfordert die Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus längere Zeit und es ist deshalb diese Methode zur Messung der Variationen des Erdmagnetismus, die z. B. bei den Terrainsbeobachtungen von 5 zu 5 Minuten bestimmt zu werden pflegen, nicht geeignet; es konnten daher die Intensitätsvariationen erst nach Erfindung des Bifilargalvanometers zu diesen Beobachtungen mit hinzugezogen werden. D.

stimmen und ihren Einfluss mit dem der Intensitätsänderungen in Rechnung bringen, was natürlich sehr unpraktisch wäre. Es muss also dem Apparate wo möglich eine solche Einrichtung gegeben werden, dass der Einfluss der Richtungsänderungen (wenigstens wenn sie nicht sehr gross sind), soviel wie gänzlich annullirt werde, und hierin besteht nur die transversale Lage im engern Sinne, welche wir baldigst besprechen werden. Zu diesem Behufe behandelt der Verfasser die dritte Lage allgemein, wenn die Copula in der neuen complexen Gleichgewichtslage einen Winkel φ mit der ursprünglichen Lage oder mit der Geraden durch die obern Fadenendpunkte, einen Winkel α aber mit der Richtung der adjungirten Kräfte bildet. Er entwickelt die Ausdrücke für das complexe rücktreibende Moment $[= (D \cos\varphi + E \cos\alpha) \sin z = d \sin z]$; das complexe Directionsmoment (d) und die Schwingungsdauer $\left[= \pi \sqrt{\frac{K}{d}}\right]$, sowie diejenigen, welche den Zusammenhang zwischen den Ablenkungswinkeln und den Aenderungen der adjungirten Kräfte angeben. Es ergiebt sich, dass man im Allgemeinen wirklich die Richtungsänderungen jedesmal besonders ausmitteln müsste, um die Intensitätsänderungen aus den Ablenkungen zu berechnen. Allein aus seinen analytischen Betrachtungen entwickelt dann der Verf., wie der Einfluss der Richtungsänderungen soviel als gänzlich verschwindet, wenn man — und dies ist dann eben die transversale Lage im engern Sinne — erstens dem Winkel φ einen schicklichen Werth ($60^\circ - 70^\circ$, §. 311) und zweitens dem Winkel α den Werth 90° ertheilt, so dass die sogenannte Normallage (resultirende Gleichgewichtslage am Anfange der Beobachtung) des aufgehängten Körpers mit derjenigen, die ihm die adjungirten Kräfte zu ertheilen streben (erste oder natürliche Lage) einen rechten Winkel bildet. Es lässt sich dann der Bruchtheil n, um welchen sich die Intensität der adjungirten Kräfte (beim Bifilarmagnetometer die horizontale Intensität des Erdmagnetismus) geändert hat, aus der beobachteten Ablenkung z durch die einfache Formel

$$n = \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{tang} z$$

berechnen, wie wenn die Richtungsänderung (Declinationsänderung beim Erdmagnetismus) Null wäre. Der Zweck des Apparates, in diesem Falle die Aenderungen der Intensität und nur diese zu messen, ist also erreicht. — Allein diese Einrichtung gewährt nun noch neue Vortheile (§§. 151—154) nämlich die: dass die Aufstellung und Anwendung des Apparates sehr leicht mit der grössten Schärfe ins Werk gesetzt werden kann, und zwar durch die Bestimmung der Schwingungszeiten in der ersten und zweiten Lage, t_1 und t_2. Denn diese geben uns mittelst der in §. 153 bewiesenen, von Gauss und Weber in den Resultaten a. d. Beobacht. d. magn. Vereins im J. 1837. S. 35 u. 36 beim Bifilarmagnetometer angewandten Formeln

$$\sin\varphi = \frac{E}{D} = \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2 - t_1^2}$$

$$\operatorname{cotang}\varphi = \frac{2 t_1 t_2}{t_2^2 - t_1^2}$$

sowohl den Winkel φ, den man bei Aufstellung des Apparates braucht, als

auch das Verhältniss von $E:D$ (D ist eine bekannte Grösse) und den Werth von *cotang* φ zur Berechnung von n.

Endlich müssen wir noch einige sehr bemerkenswerthe Resultate hervorheben, die der Verf. in §. 146—149 durch Rechnung entwickelt: die Schwingungsdauer in der besprochenen Lage wird nämlich nicht merklich geändert durch die kleinen Intensitätsänderungen der adjungirten Kräfte, wohl aber durch die kleinen Richtungsänderungen derselben, und letztere lassen sich, wenn sie allein stattfinden, aus den Schwingungszeiten sehr einfach berechnen ($tang\,\beta = \frac{\tau^2 - t^2 \cos z}{\tau^2 tang\,\varphi + t^2 \sin z}$, wenn t die anfängliche Schwingungsdauer, τ dieselbe bei der Richtungsänderung β der adjungirten Kräfte und der Ablenkung z ist). Daraus geht hervor, dass der Bifilarapparat in der dritten Lage durch den veränderten Stand die Intensitätsänderungen, durch die veränderte Schwingungsdauer die Richtungsänderungen der adjungirten Kräfte (welche letztere man in der zweiten Lage durch den veränderten Stand erhält) angiebt; bei dem Unifilarapparat (keine Torsion vorausgesetzt) findet gerade das Gegentheil statt.

Nachdem nun die Theorie unter Voraussetzung idealer Verhältnisse erledigt ist, geht der Verf. über zur Betrachtung der in Wirklichkeit stattfindenden Verhältnisse (Luftwiderstand, Elasticität der Fäden u. s. w.), um zu ermitteln, ob und welchen Einfluss sie auf die aufgestellten Gesetze haben. Er findet, dass man durch sorgfältige Ausführung des Apparates alle wirklich schädlichen Einflüsse ausschliessen kann, dass andere Einflüsse in Rechnung gezogen werden können, nämlich die Elasticität der Fäden, und dass endlich nur noch die sogenannten Hindernisse der Bewegung zu betrachten bleiben. Der Einfluss der Elasticität wird in §§. 171—180 behandelt, man bedarf indess in der Praxis seiner Berücksichtigung nicht. — Die Hindernisse der Bewegung folgen in §§. 181—219. Bei der Langsamkeit der Schwingungen kann von einem Widerstande, welcher dem Quadrate oder höhern Potenzen der Geschwindigkeit proportional wäre„ füglich abstrahirt werden. Es bleibt demnach nur zu untersuchen, ob ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand od zugleich mit diesem auch ein constanter stattfinde. Für beide Fälle müssen die mechanischen Gesetze durch Rechnung aufgefunden, und es muss sodann durch die Erfahrung ausgemittelt werden, ob die wirklichen Erscheinungen diesen Gesetzen entsprechen. Dies thut der Verf. zuerst für einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand in §§. 185—206. Er giebt die Theorie dieses Falles ausführlich, weil sie auch als Grundlage bei der Anwendung und bei der Untersuchung inducirter Ströme dient; sowohl bei der sogenannten Dämpfung, als bei der Erforschung der Gesetze der magnetoelektrischen und der Volta-Induction. Es werden die Unterschiede von dem Gange eines Apparats, bei welchem kein Widerstand stattfände, nachgewiesen: die Vergrösserung der Schwingungszeit, die merkwürdigen Phasen der Bewegung, und namentlich die Abnahme der Schwingungsbögen in geometrischer Progression. Hierbei wird Alles, was auf das so häufig vorkommende, von Gauss eingeführte logarithmische Decrement (Result. a. den Beob. d. magn. Vereins im J. 1838, p. 68) Bezug hat, auseinandergesetzt, auch die Berechnung mittelst kleinster Quadrate gegeben und dann gezeigt, wie aus der blossen Kenntniss der Schwingungsdauer und des logarithmi-

schen Decrementes nicht nur die Grösse des Widerstandes gefunden wird, sondern auch die Schwingungsdauer und das Directionsmoment, welche ohne den Widerstand stattfinden würden, und welche man direct durch blosse Beobachtungen natürlich nicht ausmitteln könnte.

In zweiter Linie entwickelt dann der Verf. in §§. 207—219 die Erscheinungen, welche eintreten müssen, wenn neben dem der Geschwindigkeit proportionalen Widerstande noch ein constanter Widerstand vorhanden ist. Hier hat der Apparat nicht mehr, wie bisher, eine constante Gleichgewichtslage, und eignet sich, wenn der constante Widerstand erheblich ist, nicht mehr zur genauen Messung ablenkender Kräfte. Die Schwingungszeit ist dieselbe, wie im vorigen Falle, die Abnahme der Bögen aber erfolgt nicht mehr im geometrischen Verhältnisse, sondern in einem grössern. — Die Vergleichung der Resultate aller dieser Rechnungen mit den bisherigen Beobachtungen zeigt aber: dass der constante Widerstand Null oder für uns verschwindend klein ist, dass man nur einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand annehmen kann, dass aber der Einfluss dieses letztern auf die Schwingungsdauer für uns nicht merkbar ist, und dass seine Grösse sowie sein Einfluss immer leicht bestimmt werden können. Und als Endresultat der gesammten Beobachtungen ergiebt sich, dass wir den Apparat unter den wirklichen Verhältnissen ganz eben so gut gebrauchen können, wie wenn die (früher vorausgesetzten) idealen Verhältnisse vorhanden wären.

§§. 223—232 giebt der Verf. die Bestimmung des Directions- und Trägheitsmomentes, wodurch die Bifilarsuspension ihre volle Sicherheit und Tadellosigkeit erhält, und geht dann über auf den praktischen Theil. — Da aber bei Besprechung des theoretischen Theils die Grenzen des uns gestatteten Raumes schon überschritten sind, so müssen wir uns in Beziehung auf den praktischen Theil auf wenige Worte beschränken. Der Verf. behandelt *A*) die praktische Einrichtung und Aufstellung des Apparates; *B*) den Gebrauch desselben zu Ablenkungs- und Schwingungsbeobachtungen: Vorsichtsmaassregeln u. s. w.; Reduction der Scalentheile auf Winkel oder Bögen; Erörterung des Einflusses, wenn der Spiegel, wie bei der unifilaren Aufhängung, eine erhebliche Entfernung von der Drehungsaxe hat (excentrisch ist), sodann wenn derselbe nicht ein Metall-, sondern ein Glasspiegel ist*). Für grosse Excentricität und nicht sehr kleine Ablenkungsbögen hat der Verf. den Ausdruck entwickelt:

*) Herr Stegmann hat kürzlich eine Abhandlung über die Bestimmung des Drehungswinkels an Messinstrumenten mit Scale, Spiegel und Fernrohr in Grunert's Archiv, 1855, veröffentlicht. Derselbe geht von sehr allgemeinen Voraussetzungen aus: die Umdrehungsaxe soll nicht in der Spiegelebene liegen und ihr auch nicht parallel sein (der Spiegel ist also excentrisch und seine Ebene ausserdem unter einem Winkel Θ gegen die Drehungsaxe geneigt angenommen) und die Umdrehungsaxe soll nicht in der Visirebene liegen; er leitet dann aus seinen allgemeinen Formeln folgende Näherungsformeln

$$\psi = \frac{x}{2c\cos\Theta} \text{ und } c\cos\Theta = \frac{h}{\cos\gamma}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

ab, deren sich Herr W. Weber bedient hat; wobei ψ den Drehungswinkel, x die zugehörige Anzahl von Scalentheilen, h den in horizontaler Richtung gemessenen Abstand des Spiegelmittelpunktes von einer durch die Scale gelegten Verticalebene, α den Winkel, unter welchem die optische Axe des Fernrohrs gegen den Horizont, und γ den Winkel, unter welchem diejenige Ebene, die durch die Scale und den Mittelpunkt des Spiegels bei dessen Anfangsstellung zu legen ist, gegen den Horizont ge-

$$\frac{op}{tang\,2\varrho} = R + \frac{S}{\sqrt{n^2 - sin^2\varrho}} - E\frac{1 - cos\,\varrho}{cos\,\varrho}$$

wobei n den Brechungsexponenten für den Uebergang des Lichtes aus der Luft in das Spiegelglas, E die Entfernung der vorderen Spiegelfläche von der Drehungsaxe, S die Dicke des Spiegelglases, R die horizontale Entfernung des Spiegels von der Scale in der Gleichgewichtslage (E, R und S in Scalentheilen gemessen), ϱ den Ablenkungswinkel und op die demselben entsprechende Anzahl von Scalentheilen bezeichnen. — Das erste Glied ist constant, das zweite kann ohne Nachtheil als constant und das dritte bei der bifilaren Aufhängung soviel wie immer als Null angesehen werden. Man kann daher bei der bifilaren Aufhängung ohne Bedenken setzen

$$tang\,2\varrho = \frac{op}{R + \frac{2}{3}S}$$

und bei sehr kleinen Ablenkungswinkeln

$$\varrho = tang\,\varrho = \frac{1}{2}\,\frac{op}{R + \frac{2}{3}S}$$

In der Praxis ist gewöhnlich $\frac{2}{3}S$ gegen R verschwindend klein und man erhält dann die längst gebräuchliche Formel

$$\varrho = \frac{op}{2R}.$$

Hierauf geht der Verf. die einzelnen Fälle von Anwendungen durch; *A*) Anwendungen des Apparates ohne Mitwirkung adjungirter Kräfte. Zu den Versuchen, die Dichtigkeit der Erde zu bestimmen von Cavendish, Reich und Baily würde sich der Bifilarapparat besonders eignen. Bestimmung des Trägheitsmomentes von Körpern, die keine regelmässige Form haben oder nicht homogen sind. Bestimmung der Intensität galvanischer Ströme nach absolutem Maasse (Bifilargalvanometer). *B*) Anwendungen des Apparats bei Gegenwart adjungirter Kräfte. 1. Bifilarmagnetometer; 2. Elektrodynamometer. — Endlich vergleicht der Verf. die Bifilarsuspension mit andern Messmethoden und stellt die Eigenthümlichkeiten und Vortheile der erstern summarisch zusammen.

Referent hat diese Arbeit des Herrn Stähelin mit vielem Vergnügen studirt und empfiehlt dieselbe allen Physikern, welche mit dem Wesen und der Einrichtung des Bifilarapparates nicht schon völlig vertraut sind. Denn wenn auch die hauptsächlichsten Resultate der Theorie in den betreffenden Schriften von Gauss und Weber schon enthalten sind, so pflegen diese dieselben doch nur in wenigen eleganten Formeln anzudeuten, die Entwickelung grösstentheils dem Leser überlassend. Und diese letztere hat der Verfasser sehr klar und erschöpfend und in eleganter Weise gegeben*).

neigt ist, bezeichnet. Dabei hat Herr Stegmann stillschweigend einen Metallspiegel vorausgesetzt — und es kann auch füglich die Correction beim Glasspiegel ausser Acht bleiben, da die Dicke des Spiegelglases im Vergleich zum Abstande des Spiegels vom Fernrohr gewöhnlich sehr klein ist und dagegen vernachlässigt werden kann.

*) Unter Anderem glaubt Referent besonders die sehr einfache Art, auf welche der Verfasser §. 184 die Gleichung

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} + \frac{a\,d\varrho}{dt} + b\varrho + gt + h = 0,$$

in welcher a, b, g und h constante Grössen sind, integrirt, hervorheben zu müssen. Er

Dabei hat derselbe das Wesen und die Eigenthümlichkeiten der bifilaren Aufhängung und deren Anwendungen scharf und schlagend erörtert. In seinen Entwickelungen ist derselbe vielfach von allgemeinern Voraussetzungen ausgegangen, als es bisher geschehen, und hat aus seinen allgemeinen Ausdrücken dann die in der Praxis üblichen speciellen Fälle abgeleitet; auch sind manche Umstände, die bisher numerisch nicht ausgedrückt worden waren, vom Verfasser der Rechnung unterworfen worden, so dass in dieser Hinsicht seine Arbeit vieles Neue enthält. Die mehreren Abschnitten beigefügten Zahlenbeispiele werden vielen Lesern erwünscht sein.

Zittau. C. F. DIETZEL.

Die Theorie der Hängebrücken; mit besonderer Rücksicht auf deren Anwendung bearbeitet von H. TELLKAMPF, Ingenieur-Assistent. Mit 2 lithograph. Tafeln. Hannover, Hellwing.

Der Verfasser erklärt in der Vorrede, seine Absicht sei gewesen, „aus allen ihm bekannten Arbeiten über die Theorie der Kettenbrücken das dem Techniker Wesentlichste und Wichtigste zu entnehmen und in übersichtlicher Weise zusammenzustellen.“ Diesem Zwecke gemäss erörtert der Verf. zunächst die Eigenthümlichkeiten der Hängebrücken überhaupt sowie ihre Construction und Bestandtheile, giebt dann eine kurze Geschichte dieser Bauwerke, wobei die Brücken zu Prag, Lorient und Pesth einer genaueren Betrachtung unterzogen werden, und wendet sich nachher zur eigentlichen Theorie, welche zum Schlusse auf eine Reihe von Beispielen angewendet wird. Was nun die Theorie selbst betrifft, so vermisst Referent darin die wissenschaftliche Durcharbeitung; der Verf. stellt nach einander die verschiedenen Arbeiten Gerstner's, Navier's etc. nebeneinander wie es kommt, ohne zu bemerken, dass die Principien immer dieselben sind und dass nur die Form der Rechnung verschieden ist. Daher trifft es sich auch, dass dem Verf. die Indentität mancher Theorien entgeht, sobald die Formeln etwas anders aussehen. So z. B. findet sich in §. 21 die für die gleichgespannte Ketten- (nicht Kettenbrücken-) linie die Gleichung

$$x = -\varrho \, l \cos \frac{y}{\varrho}$$

wobei die Abscissen x in vertikaler Richtung gezählt werden; mit genau

---

setzt $b\varrho + gt + h = u e^{\alpha t} + \beta$, wobei e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet. In der dadurch entstandenen Gleichung

$$\frac{e^{\alpha t}}{b} \left\{ \frac{d^2 u}{dt^2} + (2\alpha + a) \frac{du}{dt} + (\alpha^2 + \alpha a + b) u \right\} - \frac{ag}{b} + \beta = 0$$

wird $2\alpha + a = 0$ und $-\frac{ag}{b} + \beta = 0$ gesetzt und durch $\frac{e^{\alpha t}}{b}$ dividirt, wodurch sich dieselbe auf

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(b - \frac{a^2}{4}\right) u = 0$$

reducirt, woraus bekanntlich für $b > \frac{1}{4} a^2$, $u = c' \sin \frac{(t + c'')\sqrt{4b - a^2}}{2}$,

und für $b < \frac{1}{4} a^2$, $u = c' e^{\frac{1}{2} t \sqrt{a^2 - 4b}} + c'' e^{-\frac{1}{2} t \sqrt{a^2 - 4b}}$

sich ergiebt, wenn c' und c'' die willkürlichen Constanten bezeichnen; hieraus sind nun leicht die entsprechenden Werthe für ϱ abzuleiten.

demselben geringen Rechnungsaufwande hätte der Verfasser die vom Referenten angegebene Gleichung der gleichgespannten Kettenbrückenlinie*)

$$x = -\varkappa \, l \cos \frac{y}{\lambda}$$

ableiten können, unterlässt dies aber, weil sie ihm „ziemlich weitläufig" vorkommt; dagegen entwickelt er nach Gerstner auf einem in der That sehr umständlichen Wege die Formel

$$y^2 = 2\varrho x - \tfrac{2}{3}\mu x^2 + \frac{4}{45}\mu^2 \frac{x^3}{\varrho} - \text{etc.}$$

die aber mit der vorhergehenden identisch ist. — Ob es sich übrigens nach dieser Gleichung bequemer als nach der vorigen rechnet, bezweifelt Referent; das mehrmalige Potenziren von x ist weit beschwerlicher als das Aufschlagen von $l \cos \frac{y}{\lambda}$ wenn man Tafeln der natürlichen Logarithmen der trigonometrischen Funktionen zur Hand hat. — Uebersichtlicher und klarer wären des Verfassers theoretische Erörterungen geworden, wenn folgende einfache Distinctionen vorausgeschickt wurden: 1. man sieht die Kette entweder als Polygon oder als stetige Curve an, man benutzt also entweder die Differenzen- und Summenrechnung oder die Differential- und Integralrechnung; 2. man giebt der Kette entweder einen constanten oder einen der Spannung proportional wachsenden Querschnitt. Dies sind zusammen vier Fälle, von denen je zwei mit einer ganz gleichen Betrachtung anfangen und erst später bei der Substitution $q = Const.$ oder $q = mT$ auseinander gehen. Demgemäss können überhaupt nur vier Formelnsystyme für die Kettenbrückenlinie existiren; alles Andere ist analytische Umwandlung.

Die Anwendungen auf die Praxis zeugen von den Kenntnissen und dem Fleisse des Verfassers, und möchte Referent diesen Theil überhaupt für den gelungeneren erklären. Ingenieure werden das Schriftchen ohne Zweifel mit Nutzen studiren. SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 15. August bis 15. October 1856.

Periodische Schriften.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. XI. Bd. gr. 4. (V. u. 350 S. mit eingedr. Holzschn. und 61 lithogr. u. chromolith. Taf. in gr. 4. und qu. Fol.). Wien, Braumüller. Geh. n. 18⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissensch. zu Wien. Mathem.-naturwissensch. Classe. Bd. XX., Heft 1., 2. u. 3. Lex.-Form.). In Comm. Braumüller's Verlagsconto in Wien. 3⅔ Thlr.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Neue Folge. 1. Jahrg. 1854—55. gr. 8. Grubemann'sche Buchhandlung in Chur in Comm. Geh. ½ Thlr.

*) Heft I. der Zeitschrift für Mathematik und Physik, S. 53 Formel 7.

schen Decrementes nicht nur die Grösse des Widerstandes gefunden wird, sondern auch die Schwingungsdauer und das Directionsmoment, welche ohne den Widerstand stattfinden würden, und welche man direct durch blosse Beobachtungen natürlich nicht ausmitteln könnte.

In zweiter Linie entwickelt dann der Verf. in §§. 207 — 219 die Erscheinungen, welche eintreten müssen, wenn neben dem der Geschwindigkeit proportionalen Widerstande noch ein constanter Widerstand vorhanden ist. Hier hat der Apparat nicht mehr, wie bisher, eine constante Gleichgewichtslage, und eignet sich, wenn der constante Widerstand erheblich ist, nicht mehr zur genauen Messung ablenkender Kräfte. Die Schwingungszeit ist dieselbe, wie im vorigen Falle, die Abnahme der Bögen aber erfolgt nicht mehr im geometrischen Verhältnisse, sondern in einem grössern. — Die Vergleichung der Resultate aller dieser Rechnungen mit den bisherigen Beobachtungen zeigt aber: dass der constante Widerstand Null oder für uns verschwindend klein ist, dass man nur einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand annehmen kann, dass aber der Einfluss dieses letztern auf die Schwingungsdauer für uns nicht merkbar ist, und dass seine Grösse sowie sein Einfluss immer leicht bestimmt werden können. Und als Endresultat der gesammten Beobachtungen ergiebt sich, dass wir den Apparat unter den wirklichen Verhältnissen ganz eben so gut gebrauchen können, wie wenn die (früher vorausgesetzten) idealen Verhältnisse vorhanden wären.

§§. 223 — 232 giebt der Verf. die Bestimmung des Directions- und Trägheitsmomentes, wodurch die Bifilarsuspension ihre volle Sicherheit und Tadellosigkeit erhält, und geht dann über auf den praktischen Theil. Da aber bei Besprechung des theoretischen Theils die Grenzen des uns gestatteten Raumes schon überschritten sind, so müssen wir uns in Beziehung auf den praktischen Theil auf wenige Worte beschränken. Der Verf. behandelt *A*) die praktische Einrichtung und Aufstellung des Apparates; *B*) den Gebrauch desselben zu Ablenkungs- und Schwingungsbeobachtungen: Vorsichtsmaassregeln u. s. w.; Reduction der Scalentheile auf Winkel oder Bögen; Erörterung des Einflusses, wenn der Spiegel, wie bei der unifilaren Aufhängung, eine erhebliche Entfernung von der Drehungsaxe hat (excentrisch ist), sodann wenn derselbe nicht ein Metall-, sondern ein Glasspiegel ist*). Für grosse Excentricität und nicht sehr kleine Ablenkungsbögen hat der Verf. den Ausdruck entwickelt:

---

*) Herr Stegmann hat kürzlich eine Abhandlung über die Bestimmung des Drehungswinkels an Messinstrumenten mit Scale, Spiegel und Fernrohr in Grunert's Archiv, 1855, veröffentlicht. Derselbe geht von sehr allgemeinen Voraussetzungen aus: die Umdrehungsaxe soll nicht in der Spiegelebene liegen und ihr auch nicht parallel sein (der Spiegel ist also excentrisch und seine Ebene ausserdem unter einem Winkel Θ gegen die Drehungsaxe geneigt angenommen) und die Umdrehungsaxe soll nicht in der Visirebene liegen; er leitet dann aus seinen allgemeinen Formeln folgende Näherungsformeln

$$\psi = \frac{x}{2c\cos\Theta} \text{ und } c\cos\Theta = \frac{h}{\cos\gamma}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

ab, deren sich Herr W. Weber bedient hat: wobei ψ den Drehungswinkel, x die zugehörige Anzahl von Scalentheilen, h den in horizontaler Richtung gemessenen Abstand des Spiegelmittelpunktes von einer durch die Scale gelegten Verticalebene, α den Winkel, unter welchem die optische Axe des Fernrohrs gegen den Horizont und γ den Winkel, unter welchem diejenige Ebene, die durch die Scale und den Mittelpunkt des Spiegels bei dessen Anfangsstellung zu legen ist, gegen den Horizont ge-

Kompendium der ebenen und sphärischen Trigonometrie. gr. 8. Wien, Braumüller in Comm. geh. 1⅓ Thlr.

v. Hembyze, G. Ghilain. Lehrbuch der Geometrie für den 4. Jahrgang der k. k. Cadeten-Institute etc. gr. 8. Wien, Seidel in Comm. Geb. 27 Ngr.

Breymann, K. Lehrbuch der reinen Mathematik für Forstleute. 2. Thl. Wien, Gerold's Sohn. Geh. 2⅓ Thlr.

Koppe, K. Anfangsgründe der reinen Mathematik. 2 Thl. A. u. d. T.: die Planimetrie für d. Schul- u. Selbst-Unterricht. 6. Aufl. gr. 8. Essen, Bädeker. 18 Ngr.

Gandtner, J. O., und Junghans, K. F. Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Für den Schulgebrauch. I. Theil. gr. 8. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. Geh. ⅔ Thlr.

Wöckel, L. Die Geometrie der Alten in einer Sammlung v. 850 Aufgaben. 4. Aufl. 8. Nürnberg, Bauer & Raspe.

Grunert, J. A. Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme. gr. Lex.-8. 1857. Greifswald, Koch's Verlag. Geh. 1⅕ Thlr.

Traité d'algèbre par Choquet, docteur ès sciences, ancien répétiteur à l'école d'artillerie de la Flèche, professeur de mathématiques. In 8° de 35 feuilles ½ Impr. de Mallet-Bachelier, à Paris. A Paris chez Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55. Prix. 7 *fr.* 50 *c.*

Notice sur la vie et les travaux de M. Ch. Sturm, membre de l'Institut (Académie des sciences); par M. E. Prouhet. In 8° d'une feuille ¼. Impr. de Mallet-Bachelier à Paris. — A Paris chez Mallet-Bachelier. Prix. 1 *fr.*

Principe d'Algèbre: par E. E. Bobillier, ancien élève de l'école polytechnique etc. 4° edit. In 8° de 18 feuilles ¼ Impr. de Laurent à Chalons-sur-Marne. A Paris chez Hachette, Mallet-Bachelier, Victor Dalmont (1857). *Prix* 3 *fr.* 50 *c.*

Mélanges de géométrie pure, comprenant diverses applications des théories exposées dans le Traité de géométrie suppérieure, de M. Chasles, au mouvement infiniment petit d'un corps, aux sections coniques, aux courbes du troisième ordre etc., et de la traduction du Traité de Maclaurin sur les courbes du troisième ordre, par E. de Jorquières, lieutenant de vaisseau. In 8° de 17 feuilles, plus 5 planches. Impr. de Mallet-Bachelier. A Paris chez Mallet-Bachelier. Prix 5 *fr.*

Angewandte Mathematik.

Enthoffer, J. Memorial über Ingenieur-Geographen-Wesen und Verfassung d. militär.-geographischen Kartenwerke. Lex.-8. Wien, Beck's Univ.-Buchhandl. Geh. 1 Thlr.

Sedlaczek, E. Ueber Visir- und Rechen-Instrumente. Wien, Braumüller in Commission. Geh. 8 Ngr.

Pressler, Max Rob. Der Zeitmessknecht oder der Messknecht als Normaluhr. I. Theil für Süddeutschland, II. Theil für Norddeutschland (Cart.) Vieweg & Sohn in Braunschweig à 1⅙ Thlr.

Reslhuber, A. Ueber Prof. Stampfer's Lichtpunkt-Mikrometer im Fernrohre des Meridiankreises der Sternwarte zu Kremsmünster. Lex.-8. Braumüller in Wien. Geb. 6 Ngr.

Dowapsky. Anwendung der ebenen Trigonometrie auf verschiedene Probleme der Messkunst. gr. 8. Bertram in Cassel. Geh. ⅚ Thlr.

LIEBER, A. Ueber die Lage des Standpunktes gegen das fehlerzeigende Dreieck bei dem Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische. gr. 8. Ebendaselbst. Geh. ⅙ Thlr.

Tabellen zur Reduction der Ausser Meridian-Höhen. Aus dem Englischen von H. V. . . . r gr. 8. Hamburg. Rein'sche Buchhandl. in Leipzig. Cart. ⅙ Thlr.

BRETTNER, H. A. Mathematische Geographie. Ein Leitfaden beim Unterrichte in höhern Lehranstalten. 4. Aufl. gr. 8. Breslau, Max & Comp. Geh. 12 Ngr.

OUDEMANS, J. A. C. Zweijährige Beobachtungen der meisten jetzt bekannten veränderlichen Sterne. Aus den Abhandl. der mathem.-physik. Classe der Königl. Niederl. Akademie der Wissenschaften. Amsterdam, C. G. van der Post. 1 f. 90 c.

D'ARREST, H. Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. I. Reihe. gr. Lex.-8. Leipzig, Hirzel. Geh. 24 Ngr.

v. LITTROW, K. Ueber lichte Fäden im dunkeln Felde bei Meridian-Instrumenten. Lex.-8. Wien, Braumüller. Geh. 4 Ngr.

Von demselben. Drei Quellen über den Kometen v. 1556. Lex.-8. Ebendas. Geh. ⅙ Thlr.

MATZKA, W. Ein neuer Beweis des Kräften-Parallelogramms. gr. 4. Prag, Calve'sche Verlagshdl. in Comm. Geh. 8 Ngr.

v. SCHWIND, F. Vademecum d. österreichischen prakt. Mechanikers. Nach MORIN's *Aide Mémoire* übersetzt u. f. österreich. Maass u. Gewicht vollständig umgerechnet. gr. 8. Wien, Braumüller's Verlagsconto. Geh. 2 Thlr.

WEISSBACH, JUL., Prof. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis f. d. Unterricht an techn. Lehranstalten, sowie zum Gebrauche für Techniker bearb. 3. verb. u. vervollst. Aufl. 6—10 Lfg. gr. 8. (1. Thl. theoret. Mechanik, S. V—XXV. u. 481—946 m. eingedr. Holzschn.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. Geh. n. 3 Thlr.

MILLER, W. H. Lehrbuch der Krystallographie. Uebersetzt von J. GRAILICH. gr. 8. Mit Atlas. in 4. Wien, Gerold's Sohn. Geh. 3⅙ Thlr.

RÄDELL, C. Anweisung, die Lebensfähigkeit der Versicherungsanstalten zu untersuchen. Berlin, Janke. n. 2⅙ Thlr.

Eléments de géometrie, comprenant la géometrie pure et appliquée, rédigés conformément aux programmes officiels des lycées et aux instructions ministérielles de 1854. Par A. Eudes, professeur au lycée Napoléon. Géometrie appliquée. Levé des plans. Projection. Nivellement. In 8° de 7 feuilles ¾ plus 3 pl. et des figures dans le texte. Imp. d'Hennuger, aux Batiguolles. A Paris, chez Victor Dalmont. Prix 2 fr. 25 c.

Eléments de mécanique exposés suivant la programme de M. le ministre de l'instruction publique et des cultes, du 30. août 1852. pour le baccalauréat ès sciences; par M. Furiet, ingénieur au corps impérial des mines. In 8° de 22 feuilles. Imp. de Mallet-Bachelier, à Paris. — A Paris chez Mallet-Bachelier. Prix 6 fr.

Orr's Circle of the Sciences Vol. 7. — Astronomy, Navigation, Meteorologie. Crown. 8. pp. 246. sewed. Longman, Brown & Cp. 5 sh.

Pease, W. A. Course of practical Geometris, being an Introduction to every Branch of Mathematical Drawing. 3. edit. 12mo. pp. 80. By the same. cloth. 2 sh. 6 d.

Loomis, Elias. The Recent Progress of Astronomy, especially in the United Staates. 3 edit. re-written and much enlarget. 12. (New-York) London. cloth 7 sh. 6 d.

Humber, W. A Practical Treatise on Cast and Wrought-Jron Bridges and Girders as applied to Railway Structures and to Buildings generally: with numereous Examples drawn to a large scale, selected from the Public Works of the Most Eminent Engineers - Published Monthly. Part 1. Folio. London, Spon. sewed 2 sh. 6 d.

Physik.

Müller, J. Lehrbuch der Physik und Meteorologie. Theilweise nach Pouillet's Lehrbuch der Physik selbständig bearbeitet. 5. Aufl. 1. Bd. 1. u. 2. Liefer. gr. 8. Braunschweig, Vieweg & Sohn. Geh. à ½ Thlr.

Kunzek, A. Studien aus der höheren Physik. gr. 8. Wien, Braumüller's Verlagsconto. Geh. 2 Thlr. 4 Ngr.

Fliedner, C., Hauptlehrer Dr. Aufgaben aus der Physik nebst ihren Auflösungen u. einem Anh. physikal. Tabellen enthaltend. Zum Gebrauche für Lehrer u. Schüler in höhern Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterrichte. 2 Abtheil. (Die Aufgaben und physikal. Tabellen. — Die Auflösungen). Mit 131 in d. Text eingedr. Holzschn. 2. verm. und verb. Auflage. gr. 8. (VII. u. 136. III. u. 148 S.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. Geh. n. 1⅙ Thlr.

Kohlrausch, R. Praktische Regeln zur genaueren Bestimmung des specifischen Gewichts. gr. 8. Marburg, Elwert'sche Univers.-Buchhandl. Geh. 14 Ngr.

Kreil, K. Ueber die Bestimmung der Seehöhe aus dem beobachteten Luftdrucke. Lex.-8. Wien, Braumüller's Verlagscompt. Geh. 4 Ngr.

Zehender, W. Anleitung zum Studium der Dioptrik des menschlichen Auges. I. Theil. Lex.-8. Erlangen, Enke. Geh. 1 Thlr. 6 Ngr.

Grailich. Brechung und Reflexion des Lichtes an den Zwillingsflächen optisch einaxiger vollkommen durchsichtiger Medien. Wien, Braumüller's Verlagsconto. ⅛ Thlr.

Paramelle, Abbé. Quellenkunde. Lehre von der Bildung und Auffindung der Quellen. Aus dem Franz. Mit einem Vorwort v. Bernhard Cotta. 8. (XXVI. u. 341 S. m. eingedr. Holzschn.) Leipzig, Weber. Geh. n. 1⅛ Thlr.

Stark, J. B. Eine neue Methode des Doppelsprechens in derselben Richtung und auf einem Drathe. Lex.-8. Wien, Braumüller's Verlagsconto. Geh. 6 Ngr.

Martin, Castor A. Repertorium der Galvanoplastik u. Galvanostegie oder der Metallreduction auf nassem Wege in dicken oder dünnen Schichten. 2 Bde. Die Galvanostegie. gr. 8. (III. u. 201 S.) Wien, Gerolds Sohn. Geh. 1 Thlr. 8 Ngr. (cplt. 2 Thlr. 23 Ngr.)

Physikalisches Lexikon. Encyclopädie der Physik und ihrer Hülfswissenschaften. 2. Aufl. Von O. Marbach. Fortges. von C. S. Cornelius, 49. u. 50. Liefer. Lex.-8. Leipzig, O. Wigand. Geh. à ⅛ Thlr.

Problèmes de mathématiques et physique, à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences. par A. Labosne, professeur de mathématiques. Problèmes de physique. In 12. de 4 feuilles ½. Impr. de Gaillet, à Paris. A Paris chez Dezobry, E. Magdeleine.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.



Literaturzeitung.

Recensionen.

Das Problem des Appollonius, nebst der Theorie der Potenzörter, Potenzpunkte, Aehnlichkeitspunkte, Aehnlichkeitsgraden, Potenzkreise, Pole und Polaren im Sinne der neueren Geometrie für alle Lagen der gegebenen Kreise leicht fasslich dargestellt von HELLWIG, ordentl. Lehrer an der Realschule zu Erfurt. (43 S. in 8. nebst 4 Figurentaf.) Halle, H. W. Schmidt.

Die Entwickelungen der neueren Geometrie geben von dem Tactionenproblem Lösungen, welche, wie auch der Verfasser bemerkt, an Eleganz nichts zu wünschen übrig lassen. Gewährt dasselbe nun schon in dieser Beziehung nicht geringes Interesse, so ist es auch noch aus mehreren andern Gründen wohl geeignet, Gegenstand einer besondern Monographie zu werden, wovon das erste, leider verloren gegangene Specimen schon der grösste Analyst des Alterthums, dessen Namen es auch führt, gegeben hat. Beabsichtigt man ferner, Schülern und Anfängern in der Mathematik die hauptsächlichsten Begriffe und Lehrsätze der neueren Geometrie, soweit sie insbesondere die Kreislehre betreffen, an einem abgerundeten, concinnen Beispiele zur Anwendung vorzuführen, so empfiehlt sich dieses Problem ganz besonders. Diesen Zweck scheint auch der Verfasser vorliegender Schrift im Auge gehabt zu haben, wenn er ihn auch nicht in der Vorrede ausdrücklich hervorgehoben hat, und von diesem Standpunkte aus glaubt Referent diese Schrift aller Beachtung werth empfehlen zu können trotz einiger Ausstellungen, welche er sich im Nachstehenden lediglich im Interesse der Sache zu machen erlaubt.

Im Allgemeinen kann es Referent nicht billigen, dass der Verfasser bei Bezeichnung begrenzter Graden oder Strecken nicht das Princip der Richtungen und Zeichen beobachtet hat, dessen Beachtung doch nun die bessern Schriftsteller über neuere Geometrie nach dem längst gemachten Vorgange von Möbius sich angelegen sein lassen. Abgesehen von den vielen positiven Vortheilen, welche die Befolgung dieses Princips bei geometrischen Untersuchungen gewährt, welche aufzuzählen hier nicht der Ort sein kann, so bietet die Nichtbeachtung desselben von Seiten des Autors (z.B. S. 1: $M_1D + M_2D = M_1M_2$, $E_1H = M_1E_1 - M_1H$, S. 3: $HF = FK - HK$ und anderwärts) für den Leser vielfache Unbequemlichkeiten in der Orientirung und Vergleichung der zum Texte nöthigen Figuren dar, macht auch in manchen Fällen eine Figur nöthig, welche andernfalls wohl erspart oder dem Leser zu entwerfen füglich überlassen werden könnte.

Ferner gewährt eine möglichst strenge Durchführung der cyclischen Bezeichnung entsprechender Punkte oder Constructionselemente, die aus andern ebenso bezeichneten auf dieselbe Weise hervorgehen, leichtere Uebersichtlichkeit der Figuren, namentlich wenn dieselben etwas zusammengesetzt sind (wie z. B. Fig. 22 auf Taf. III.) und giebt ausserdem dem in die Gleichung eingekleideten Lehrsatze eine symmetrische Form, aus welcher er leicht herausgezogen und in Worten wiedergegeben werden kann. Dem entgegen stellt der Verfasser z. B. die Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise mit deren Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 so zusammen, dass er den äussern und innern von M_1 und M_2 mit A_1 und J_1, die von M_1 und M_3 mit A_2 und J_2 und die von M_2 und M_3 mit A_3 und J_3 bezeichnet, statt diese Punkte einander so zuzuordnen, dass A_1 und J_1 zu M_2 und M_3, A_2 und J_2 zu M_3 und M_1 und A_3 und J_3 zu M_1 und M_2 gehören. Dann hätten unter andern die Gleichungen (17), (22) bis (29) (Satz des Menelaus und dessen reciproker von Johann Bernoulli) einen übersichtlicheren Ausdruck erhalten können. Diese Formalien, wenn sie Jemand dafür nehmen will, mögen vielleicht für die Sache Nebendinge bleiben, in einer Schulschrift jedoch möchte Ref. denselben keine zu untergeordnete Bedeutung beigelegt wissen.

Zur weitern Beurtheilung wird es dienlich sein, den Inhalt der vorliegenden Schrift etwas näher anzugeben. In den 9 ersten Paragraphen (S. 1 bis 24) hat der Verf. die zur Lösung des allgemeinen Problems nöthigen Begriffserklärungen und Sätze vorausgeschickt. In den beiden ersten Paragraphen behandelt er die Eigenschaften der Potenzlinie zweier Kreise und definirt dieselbe als den geometrischen Ort aller solcher Punkte, dass die Differenz der Quadrate der Verbindungsgraden eines jeden derselben mit den Mittelpunkten der beiden Kreise der Differenz der Quadrate der Radien von denselben Kreisen gleich ist. Er nennt diese Grade den ersten Potenzort der beiden Kreise, indem er zu einem besondern Zwecke, wovon weiter unten das Nähere, noch als zweiten Potenzort eine Grade von der Eigenschaft einführt, dass die eben erwähnte Differenz der Quadrate der Verbindungslinien eines jeden Punktes derselben mit den Mittelpunkten der Kreise gleich der negativen Differenz der Quadrate der Radien ist. Die Durchschnitte der beiden Potenzörter mit der Centrale (die Hauptpunkte) liegen also vom Halbirungspunkte der Centrale zu beiden Seiten gleich weit entfernt. In §. 3. werden einige Eigenschaften der beiden, den eben genannten zwei Potenzörtern entsprechenden Potenzmittelpunkte dreier Kreise aufgestellt. §. 4. enthält die Erklärung und einen Satz bezüglich der Berührungskreise zu zwei gegebenen Kreisen; §. 5. die Definition der Aehnlichkeitspunkte, welche auf eine bekannte Eigenschaft der Berührungssehnen der Berührungskreise basirt wird, sowie mehrere diese Punkte betreffende Sätze. In §. 6. kommt der bekannte Satz über die Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeits-Graden oder -Axen dreier Kreise, und in §. 7. werden noch einige Sätze über Transversalen und Potenzkreise, welche von den Aehnlichkeitspunkten aus gezogen sind, aufgestellt. §. 8. enthält die Erklärung von Pol und Polare und den Satz, dass alle Polaren von Punkten einer Graden durch einen und denselben Punkt, den Pol der Graden, hindurchgehen, und endlich werden in §. 9. die Hauptsätze über die Berührungskreise zu zwei gegebenen Kreisen behufs der Construction derselben aufgeführt, worauf sich die Lösung des eigentlichen Problems der Hauptsache nach stützt. Diese ist in §. 10. etwa in folgender Weise gegeben:

Seien M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte der gegebenen Kreise und bezeichnen zunächst O, O' die Mittelpunkte zweier solcher Kreise, welche alle drei gegebene gleichartig (entweder alle von aussen, oder alle von innen) berühren. Man bestimme zu M_1 und M_2 den äusseren und inneren Aehnlichkeitspunkt A_3 und J_3, ebenso A_1 und J_1 zu M_2 und M_3 und A_2 und J_2 zu M_3 und M_1 und lege durch den (ersten) Potenzmittelpunkt Π aller drei Kreise eine Senkrechte zur Aehnlichkeitsaxe $A_1 A_2 A_3$, auf welcher Senkrechten die beiden Mittelpunkte O, O' liegen werden. Ferner bestimme man zu dem Potenzmittelpunkte Π die Polaren bezüglich der drei Kreise M_1, M_2, M_3, welche die Aehnlichkeitsgrade $A_1 A_2 A_3$ in drei Punkten U_1, U_2, U_3 schneiden, von U_1 lege man die beiden Tangenten an den Kreis M_1, so sind die Berührungspunkte T_1 und T_1' derselben mit dem Kreise zugleich dessen Berührungspunkte mit den gesuchten Kreisen O und O'. In gleicher Weise werden von U_2 und U_3 aus die Tangenten an die Kreise M_2 und M_3 gezogen und die Berührungspunkte T_2, T_2' und T_3, T_3' bestimmt. Jede der Verbindungslinien $M_1 T_1$, $M_2 T_2$, $M_3 T_3$ wird die durch Π gelegte Senkrechte zu $A_1 A_2 A_3$ in dem einen Kreismittelpunkte O und ebenso jede der Verbindungslinien dieselbe Grade in dem andern Mittelpunkte O' schneiden. Für die drei anderen Kreispaare, welche nur zwei der gegebenen Kreise gleichartig (entweder zwei von aussen und den dritten von innen, oder zwei von innen und den dritten von aussen) berühren, treten in der Construction der Reihe nach die drei anderen Aehnlichkeitsgraden $A_1 J_2 J_3$, $A_2 J_3 J_1$, $A_3 J_1 J_2$ und die auf dieselben durch Π gelegten Senkrechten nebst den Durchschnitten derselben mit den Polaren des Punktes Π bezüglich M_1, M_2, M_3 ein, während im Uebrigen die Construction dieselbe bleibt.

Diese Construction stimmt im Wesentlichen mit der von Gergonne gegebenen Lösung desselben Problems überein, wenn auch die Fassung jener bezüglich einiger Constructionselemente von dieser etwas abzuweichen scheint. Sind nämlich die Bezeichnungen der gegebenen und gesuchten Grössen dieselben wie oben, so werden nach Gergonne die beiden gleichartig berührenden Kreise O, O' auf folgende Weise gefunden. Man bestimme zur Aehnlichkeitsgraden $A_1 A_2 A_3$ bezüglich jeden Kreises M_1, M_2, M_3 die drei Pole P_1, P_2, P_3 und verbinde dieseben mit dem Potenzmittelpunkt Π durch die Graden ΠP_1, ΠP_2, ΠP_3. Von diesen Verbindungslinien schneide die erste den Kreis M_1 in den Punkten T_1 und T_1', die zweite den Kreis M_2 in T_2 und T_2', die dritte den Kreis M_3 in T_3 und T_3', alsdann sind T_1, T_2, T_3 die Berührungspunkte des einen und T_1', T_2', T_3' die des andern der gesuchten Kreise O, O' mit den drei gegebenen. Dieselbe Construction bezüglich der drei andern Aehnlichkeitsgraden $A_1 J_2 J_3$ u. s. w. mit übrigens denselben Constructionselementen ausgeführt, giebt die drei andern Paare von Kreisen, welche der Aufgabe genügen, und welche jedesmal diejenigen beiden der gegebenen Kreise gleichartig berühren, von denen der äussere Aehnlichkeitspunkt in der zur Construction verwendeten Aehnlichkeitsgraden liegt.

Die Uebereinstimmung beider Constructionen in ihren Grundzügen ist leicht zu erkennen. Ihre Begründung geht wesentlich von folgenden Sätzen aus: Wenn ein Kreis M_1 von zwei anderen O, O' berührt wird, so liegen die Berührungspunkte mit einem der Aehnlichkeitspunkte von O, O' in einer Geraden und die Tangenten in den Berührungspunkten schneiden sich auf der Potenzlinie von O, O'. Werden also zwei Kreise M_1 und M_2 von zwei anderen O, O' gleichartig berührt, von dem ersten in T_1, T_2, von

dem letzten in T_1' und T_2', so dass die Graden $T_1 T_2$ und $T_1' T_2'$, welche als Sehnen der Kreise O, O' die Berührungspunkte verbinden, beide denselben Aehnlichkeitspunkt A_3 der Kreise M_1, M_2 treffen, so geht die Potenzlinie der Kreise O, O' auch durch diesen Aehnlichkeitspunkt A_3 und umgekehrt liegt wieder ein Aehnlichkeitspunkt Π von O, O' auf der Potenzlinie von M_1, M_2 und im Durchschnitt der beiden Graden $T_1 T_1'$ und $T_2 T_2'$, welche als Sehnen der Kreise M_1, M_2 die Berührungspunkte verbinden. Hieraus gehen für die Berührung dreier Kreise M_1, M_2, M_3 durch zwei andere O, O' folgende bereits von Gaultier in einer dasselbe Problem betreffenden Abhandlung (*Memoire sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions et une sphère déterminée par quatre conditions: Journal de l'Ecole Polytechnique XVIe cahier* 1813) aufgestellten Sätze hervor: 1) die Potenzlinie von O, O' geht durch drei Aehnlichkeitspunkte zugleich, welche die drei Kreise M_1, M_2, M_3 zu je zweien haben, d. h. jede Aehnlichkeitsgrade, wie $A_1 A_2 A_3$, welche drei der sechs Aehnlichskeitspunkte der gegebenen Kreise enthält, ist die Potenzlinie zweier Kreise O, O', welche die gegebenen Kreise in derselben Weise berühren — und deren Centrale $O O'$ also auf dieser Aehnlichkeitsgraden senkrecht steht — 2) Die Sehne $T_1 T_1'$, welche die Berührungspunkte T_1, T_1' der beiden Kreise O, O' mit einem der gegebenen Kreise M_1 verbindet, geht durch einen Aehnlichkeitspunkt von O, O', oder durch den Potenzmittelpunkt Π der drei gegebenen Kreise. 3) Die Tangenten, welche in den Berührungspunkten T_1, T_1' an die berührenden Kreise gelegt sind, schneiden sich in einem Punkte U_1 der Potenzlinie von O, O', d. h. in der Aehnlichkeitsgraden $A_1 A_2 A_3$. Aus dem letzten Satze folgt nun noch, dass die Sehne $T_1 T_1'$ die Polare des Punktes U_1 bezüglich des Kreises M_1 ist, und dass umgekehrt *a*) die $T_1 T_1'$ durch den Pol P_1 der Aehnlichkeitsgraden $A_1 A_2 A_3$ bezüglich des Kreises M_1 geht und *b*) dass die Polare des auf $T_1 T_1'$ liegenden Punktes Π bezüglich desselben Kreises M_1 durch U_1 geht.

Von diesen eng mit einander verbundenen Sätzen sind nach der Gergonne'schen Fassung der Auflösung vorzugsweise der erste und zweite, sowie die unter *a*) bemerkten Folgerungen des dritten berücksichtigt, dagegen in der von Herrn Hellwig aufgenommenen der erste und dritte, nebst der unter *b*) aufgeführten Folgerung benutzt worden. Hinsichtlich der Kürze und Leichtigkeit der Ausführung bietet übrigens die letztgenannte Construction keinen Vortheil gegen die erstere dar.

In §. 13 und 14 giebt der Verf. die Abänderungen der allgemeinen Construction an, welche entweder für besondere Lagen der drei gegebenen Kreise, oder für singuläre Werthe ihrer Radien (wenn dieselben 0 oder ∞ werden, oder die Kreise in Punkte oder Grade übergehen) nothwendig werden. Für diese Diskussionen werden in den vorhergehenden §§. 11 u. 12 die Grenzfälle für die Potenzörter, Aehnlichkeitspunkte und Potenzkreise erörtert, wenn einer oder mehrere Radien die angegebenen Grenzen erreichen.

Besondern Werth hierbei scheint nun der Verfasser auf die in §. 13 enthaltenen Untersuchungen zu legen; er bemerkt darüber in der Vorrede: „Die Schriftsteller (welche nach den Hülfsmitteln der neueren Geometrie das Problem behandelt haben) scheinen einen Fall unberücksichtigt gelassen zu haben, der gleichwohl eine besondere Berücksichtigung verdient, nämlich den, in welchem die Mittelpunkte der gegebenen Kreise derselben Graden angehören. Um eine auch für diesen Fall gültige Auflösung hin-

zustellen, wird es nöthig, die Theorie der sogenannten Potenzlinie zu erweitern. Beide Lücken will die vorliegende Schrift ausfüllen. Zu dem Ende ist in die vorbereitenden Betrachtungen neben den Theorien der oben (im Titel) angedeuteten geometrischen Oerter diejenige des zweiten Potenzortes, welchem in Grunert's Achiv (Bd. 19) unter der Bezeichnung Linie äquidifferenter Potenzen ein Aufsatz von Dr. Kösters gewidmet ist, aufgenommen und mit der des ersten Potenzortes (Potenzlinie) verknüpft worden."

Referent ist nun der Ansicht, dass von einer wesentlichen Lücke, welche diese Schrift ausfüllen soll, nicht eigentlich die Rede sein kann, und dass, wenn man sie auch zugeben will, zur Ausfüllung derselben es einer Erweiterung der Theorie der Potenzenlinie nicht bedurft hätte. Zuzugeben ist allerdings, dass sehr viele Schriftsteller den besondern Fall, dass die Mittelpunkte der drei Kreise in einer Graden liegen, einer genaueren oder umständlicheren Erörterung nicht unterworfen zu haben scheinen und wenn Herr Hellwig in einer Schulschrift eine Diskussion desselben nicht unterlassen zu dürfen glaubt, so hat er in soweit vollkommen Recht. Zur Lösung der Aufgabe ist aber die Herbeiziehung eines besonderen geometrischen Orts und einer Theorie desselben, wodurch die Anlage der Schrift, so wie sie vorliegt, grossentheils mit bedingt worden ist, nicht nothwendig geboten, vielmehr bleibt die von Gergonne gegebene Lösung mit nur geringen Zusätzen auch für diesen besondern Fall noch anwendbar, wie sich aus folgenden Betrachtungen, die sich am einfachsten an die Gergonne'sche Construction anknüpfen lassen, hervorgehen wird.

Liegen die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der drei gegebenen Kreise in einer Graden, so fällt zwar der Potenzmittelpunkt Π derselben ins Unendliche, desgleichen weil jede der Aehnlichkeitsgraden mit der Centrale der drei Kreise zusammenfällt, liegen auch die Pole P_1, P_2, P_3 der Aehnlichkeitsaxe $A_1 A_2 A_3$ bezüglich der drei Kreise im Unendlichen, doch lassen sich die Verbindungsgraden von Π mit P_1, P_2, P_3, welche die drei Kreise in den Berührungspunkten derselben mit den gesuchten Kreisen schneiden, in diesem Falle immer noch angeben. Der Pol P_1 zur Aehnlichkeitsgraden $A_1 A_2 A_3$ bezüglich des Kreises M_1 muss nämlich im Durchschnittspunkte der Polaren der Punkte A_2 und A_3 bezüglich desselben Kreises (im Durchschnitt der sogenannten Aehnlichkeitspolaren) liegen und ebenso muss der Potenzpunkt Π als der Durchschnittspunkt der Potenzlinien der Kreispaare M_1, M_2 und M_1, M_3 angesehen werden können. Diese beiden Potenzlinien und Polaren sind vier Parallelen, welche auf der Centrale senkrecht stehen. Dabei schneide die Aehnlichkeitspolare von A_2 die Centrale in dem Punkte p_2, die von A_3 dieselbe in p_3 und die Durchschnittspunkte der beiden Potenzlinien mit der Centrale seien respect. π_3 und π_2. Man lege nun durch p_2 und p_3 zwei beliebige nicht parallele Grade, welche sich in dem Punkte r_1 schneiden mögen, und durch π_3 und π_2 zwei den vorigen gleich- aber entgegengesetzt gerichtete Grade, deren Durchschnittspunkt ϱ_1 sei, so also, dass $\pi_3 \varrho_1$ gleiche aber entgegengesetzte Richtung mit $p_3 r_1$ und ebenso $\pi_2 \varrho_1$ mit $p_2 r_1$ hat, oder dass die ähnlichen Dreiecke $p_2 r_1 p_3$ und $\pi_2 \varrho_1 \pi_3$ auf verschiedenen Seiten der Centrale liegen. Man ziehe dann die Verbindungslinie $r_1 \varrho_1$, welche die Centrale in dem Punkte s_1 schneide, und lege durch s_1 eine Senkrechte zur Centrale, so trifft diese den Kreis M_1 in seinen Berührungspunkten T_1, T_1' mit den beiden gesuchten Kreisen O, O'. In ähnlicher Weise findet man die Berührungspunkte derselben Kreise mit M_2

und M_3. Wie man durch Herbeiziehung der inneren Aehnlichkeitspunkte und deren Verbindung zu je zweien mit einem der äussern sowie der betreffenden Aehnlichkeitspolaren die übrigen Kreispaare, welche der Aufgabe möglicher Weise noch genügen, finden könne, ist hieraus und aus der oben angegebenen allgemeinen Construction leicht abzunehmen.

Zum Schluss hat in §. 15 der Verfasser die Bestimmung derjenigen 6 Kreise gegeben, von welchen jeder vier von den acht Berührungskreisen der drei gegebenen Kreise berührt, eine Betrachtung, welche allerdings „zu lehrreichen Recapitulationen Veranlassung giebt", von der aber Manches schon in §. 10 oder vorher einen passenden Platz hätte finden können. Nicht überflüssig wäre es in Berücksichtigung Derjenigen, für welche die Schrift vorzugsweise bestimmt ist, gewesen, die Umstände zu erörtern, unter welchen eines oder das andere Kreispaar imaginär wird, und wie die zur Lösung benutzten Constructionselemente in diesem Falle sich zu einander verhalten.

Im Uebrigen ist, wie bemerkt, das Studium dieser Schrift recht wohl anzuempfehlen, insbesondere Schülern, denen in möglichster Kürze einige der wichtigeren Begriffe und Lehrsätze der neueren Geometrie nebst einer eleganten Anwendung derselben auf eines der interessantesten Probleme vorgeführt werden soll. Desgleichen werden sie vielleicht nicht ohne einigen Nutzen auch Lehrer durchlesen, denen daran liegt, Einiges aus der neueren Geometrie in den gewöhnlichen Cursus der Elementargeometrie mit aufzunehmen. Die der Lösung des Problems vorangehenden 9 Paragraphen sind, wenn auch Manches den „zweiten Potenzort" betreffende in Abzug zu bringen wäre, doch mit vieler Umsicht zusammengestellt und insofern der Beachtung werth.

WITZSCHEL.

Ein neuer Beweis des Kräftenparallelogrammes. Von Dr. W. MATZKA, Prof. an d. Univers. Prag. (Aus den Abhandl. der K. böhm. Ges. der Wissensch. V. Folge, 9. Bd.) Prag, in Comm. der Calve'schen Buchhandlung.

Die gewöhnlichen statischen Beweise für den Satz vom Parallelogramm der Kräfte lassen sich füglich in zwei Classen bringen; man behält etweder den Angriffspunkt der gegebenen Kräfte unverändert bei und sucht durch verschiedene Combinationen von mehreren (meistens vier) auf den Punkt wirkenden Kräften die Resultante zu bestimmen, oder man nimmt zu jenem Angriffspunkte noch neue Angriffspunkte hinzu, die man sich mit dem ersten fest verbunden denken muss, und benutzt das Princip der Verlegung der Kräfte zur Lösung des Problemes. In die erste Categorie gehören u. A. die Beweise von Laplace, d'Alembert und Poisson, überhaupt die specifisch analytischen Beweise, über welche die vorliegende Zeitschrift nächstens einige Erörterungen bringen wird; unter den zur zweiten Categorie gehörigen dürfte der Duhamel'sche, der übrigens völlig elementar ist, am bekanntesten sein. Der Beweis des Verfassers steht insofern zwischen den Extremen, als er beide Principe zugleich benutzt; durch einige Kräfteverlegungen kommt nämlich der Verfasser zu einer Relation, welche im Grunde eine Funktionalgleichung ist, die sich aber wegen ihrer einfachen Form elementar behandeln lässt. Die Sache selber besteht in folgendem.

Die Kräfte P und Q mögen linear durch die unter einem beliebigen gegebenen Winkel zusammenstossenden Strecken OM und ON dargestellt sein; eine zwischenliegende Gerade repräsentire die Richtung der Resultante. Diese Richtung wäre bekannt, wenn man den Punkt S wüsste, in welchem die Richtung der Resultante eine durch M parallel zu ON gezogene Gerade schneidet, d. h. wenn das Stück $MS = y$ bestimmt wäre. Um nun eine Eigenschaft dieses y zu finden, lassen wir P constant und ändern Q, indem wir eine neue in der Richtung von ON wirkende Kraft Q' hinzubringen; es sind dann folgende Verlegungen ausführbar. Die Kräfte P und Q versetzen wir parallel zu sich selbst nach S, ziehen durch S eine zu OM parallele Gerade, welche ON in T schneidet, und verschieben das an S wirkende P in seiner Richtung weiter nach T, sowie Q' an O gleichfalls nach T. Die Kräfte P und Q' an T haben eine Resultante, deren Richtung die verlängerte MS in einem Punkte U schneidet; an diesen Punkt verlegen wir P und Q parallel zu sich selbst, ebendahin auch das in S noch übrige Q. Wir haben jetzt an U die Kräfte P und $Q + Q'$ gerade wie in O nur parallel verschoben, folglich ist U ein Punkt der Resultante aus P und $Q + Q'$. Nach der Bezeichnung y für MS müssen wir SU, weil es zu den Kräften P und Q' gehört, y' nennen, woraus $MU = y + y'$ folgt. Dieses MU ist aber das zu den Kräften P und $Q + Q'$ gehörende y, es findet daher zwischen den beiden veränderlichen Grössen Q und y ein derartiger Zusammenhang statt, dass y in $y + y'$ übergeht, sobald Q zu $Q + Q'$ wird. Analytisch ausgedrückt heisst dies, wenn y als Funktion von Q betrachtet und demgemäss $y = f(Q)$ gesetzt wird, so gilt die Gleichung

$$f(Q + Q') = f(Q) + f(Q').$$

Hieraus schliesst man entweder auf analytischem Wege oder auch durch elementare Betrachtungen (Förstemann, Lehrbuch der Geometrie, Bd. I. S. 213, und Knar, Anfangsgründe der Arithmetik, §. 528), dass $f(Q)$ von der Form μQ also $y = \mu Q$ ist, wo μ einen constanten Faktor bezeichnet; diese Constante bestimmt sich durch die Specialisirung $Q = P$, in welchem Falle die Richtung der Resultanten den Winkel MON halbirt, folglich $y = P = Q$ d. h. $\mu = 1$ ist. Die Gleichung $y = Q$ beweist nun, dass die Richtung der Resultirenden mit der Diagonale des aus $OM = P$ und $ON = Q$ construirten Parallelogrammes zusammenfällt. — Die Grösse der Resultante wird nachher sehr einfach ganz wie bei Duhamel ermittelt.

Streng genommen beruht dieser Beweis auf keinem neuen Principe, denn die Kräfteverlegungen geschehen bei dem Verfasser ebenso, wie bei Duhamel und der Unterschied besteht nur darin, dass Duhamel diese Verlegung mehrmals, der Verfasser aber nur zweimal anwendet. Auch analytisch ist dies leicht nachzuweisen. Behufs der Auflösung obiger Funktionalgleichung muss man nämlich eine neue Gleichung von der Form

$$f(Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k) = f(Q_1) + f(Q_2) + \ldots + f(Q_k)$$

bilden und daraus für $Q_1 = Q_2 \ldots = Q_k$ die Gleichung

$$f(kQ) = kf(Q)$$

ziehen; diese giebt für $k = n$, $Q = P$

$$f(nP) = nf(P) = nP,$$

ferner für $k = m$,

$$f(mQ) = mf(Q);$$

ist nun das Verhältniss von P zu Q ein rationales, etwa $P:Q=m:n$ also $mQ=nP$, so hat man aus der letzten Gleichung

$$f(Q)=\frac{1}{m}f(mQ)=\frac{1}{m}f(nP)=\frac{1}{m}nP=Q.$$

Macht man diese Schlüsse nicht analytisch, sondern geometrisch gleich in der Figur selbst, indem man OM in m, ON in n gleiche Theile theilt und die erwähnte Kräfteverlegung mn mal vornimmt, so hat man wörtlich den Beweis von Duhamel. — Gleichwohl ist nicht zu verkennen, dass der Matzka'sche Beweis den Vorzug der Einfachheit haben würde, wenn die elementare Auflösung der erwähnten Funktionalgleichung in der That eine genügende sein sollte. SCHLÖMILCH.

Perspective oder Lehre von der Abbildung nach Form, Beleuchtung und Farbe. Von Dr. F. W. UNGER. Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht. 1856.

Nicht mit Unrecht tadelt der Verfasser in der Vorrede, dass die grösseren Werke über Perspective oft mehr Sorgfalt auf viele einzelne Beispiele als auf principielle Erörterungen verwenden, und er versucht es daher, die Theorie mit möglichster Einfachheit darzustellen, complicirte Fälle nur andeutend. So gern Referent dieses Streben anerkennt, so kann er doch andererseits die Befürchtung nicht verhehlen, dass der Verfasser dabei oft zu weit gegangen sein dürfte; die Darstellung des Verfassers wird zwar einen mathematisch Gebildeten vollkommen befriedigen, den Künstlern aber, auf die das Buch berechnet ist, und denen mathematische Kenntnisse gewöhnlich fehlen, möchte die Sprache des Verfassers zu kurz und abstrakt sein. Allerdings giebt es keine *via regia* zur Mathematik, gerade die Perspective ist aber eine so überaus einfache und anschauliche Sache, dass sie auch ohne allem eigentlichen mathematischen Apparat Jedermann klar gemacht werden kann. — Was die Theorie selber betrifft, so hat Referent zweierlei zu erinnern. In Nr. 31 bleibt das Haupterforderniss einer gut gewählten Distanz unerwähnt; die Distanz muss nämlich so gross sein, dass von ihrem Ende aus die ganze in eine gegebene Umrahmung zu bringende Zeichnung bequem übersehbar sein muss. Aus dieser Bedingung folgt das Minimum der Distanz, welches bestimmt angegeben werden kann, wogegen der Verf. gerade diesen wichtigen Punkt — denn bei zu kleiner Distanz wird die ganze Zeichnung unnatürlich — mit den unbestimmten Redensarten „man pflegt anzunehmen", „es möchte zu empfehlen sein" zu erledigen sucht. Ferner wäre es passend gewesen, mehr Aufmerksamkeit auf diejenigen Constructionen zu verwenden, welche ohne Distanzpunkt ausführbar sind, weil bei praktischen Zeichnungen die Distanz meistens so gross genommen werden muss, dass der Distanzpunkt in bedeutende Entfernung über die Einrahmung des Bildes hinausfällt*). In dieser Beziehung erlaubt sich Referent, der jahrelang perspectivisch viel gezeichnet hat, das in §. 71 *b*.

---

*) Ist z. B. das Bild 21 Zoll breit, 16″ hoch und der Augenpunkt in der Mitte, so beträgt das Minimum der Distanz circa 26″; der Distanzpunkt liegt also 16″ über den Rand des Bildes hinaus, und um von dem Distanzpunkte nach der entferntesten Ecke des Bildes eine Distanzlinie ziehen zu können, bedarf es eines Lineales von 39″ Länge. Und doch sind das noch sehr mässige Verhältnisse.

seiner Stereometrie (Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie, Bd. 2.) gezeigte Verfahren als das bequemste zu empfehlen.

Die Abschnitte II. und III. (Beleuchtung und Farbe) sind verhältnissmässig ausführlicher als die Linearperspective gehalten und nur das Kapitel „Schattenperspective" leidet wieder an einer gewissen Dürftigkeit; auch hier wäre zu zeigen gewesen, wie man ohne Fluchtpunkte auskommen kann, denn letztere liegen bei einigermassen grossen Zeichnungen fast immer unbequem. Für das Gelungenste in der ganzen Schrift hält Referent die physikalischen und physiologischen Erörterungen über Spiegelung, Reflexe, Beleuchtung der Schatten, Colorit etc.; sie werden demjenigen Künstler, der sich mit der Linearperspective schon hinreichend vertraut gemacht hat, ohne Zweifel sehr willkommen sein. SCHLÖMILCH.

Aufgaben aus der Physik nebst ihren Auflösungen und einem Anhange, physikalische Tabellen enthaltend; zum Gebrauche für Lehrer und Schüler an höhern Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterricht, bearbeitet von Dr. E. FLIEDNER. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage, in zwei (getrennten) Abtheilungen, erste Abth.: die Aufgaben und physik. Tabellen, zweite Abth.: die Auflösungen enthaltend. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1856.

Vorliegende Aufgabensammlung hat sich schon durch das Erscheinen ihrer zweiten Auflage als ein gelungenes Unternehmen von Seiten des Herrn Verfassers und Verlegers gerechtfertigt. Es dürfte wohl auch nicht eben nothwendig erscheinen, die Zweckmässigkeit der Einführung und des Gebrauchs einer Sammlung von Aufgaben aus dem Gebiete der Physik für den gedeihlichen Unterricht in dieser Wissenschaft besonders hervorzuheben. Sammlungen dieser Art sind indessen namentlich im Verhältniss zu den für den mathematischen insbesondere arithmethischen Unterricht bestimmten selten, umsomehr wird daher Lehrern, denen diese Lücke in der Literatur empfindlich gewesen ist, schon die erste Auflage seiner Zeit eine angenehme Aushülfe gewährt haben. Diese zweite Auflage ist in mehr als einer Beziehung eine vermehrte und verbesserte zu nennen. Zunächst deutet schon die Erhöhung der Seitenzahl von beiläufig 236 bis auf 283 bei übrigens gleicher Ausstattung im Allgemeinen eine Vermehrung an. Bei genauerer Einsicht findet sich nun, dass nicht nur ein ganzes Kapitel von Aufgaben über die Dispersion, welcher Gegenstand früher unberücksichtigt geblieben war, neu hinzugekommen ist, sondern dass auch die übrigen Abschnitte nicht unwesentliche Vermehrungen erhalten haben. So sind in Kapitel I. (Bewegung der Körper) 12, in Kap. II. (Maass der Kräfte) 3, in Kap. III. (Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte) 3, in Kap. V. (einfache Maschinen) 17, in Kap. X., XI., XII. (Hydrostatik) 12, in Kap. XIV. (Aerostatik) 3, in Kap. XVII. (Wärme) 9, in Kap. XXIV. (Optik) 8 und in den übrigen Kapiteln ebenfalls noch einige neue Aufgaben hinzugekommen. Ausserdem hat der Verfasser „auf den Wunsch mehrerer Amtsgenossen, welche diese Aufgabensammlung beim Unterrichte in der Hand der Schüler wünschten, aber theils in dem Preise derselben, theils in der Verbindung der Aufgaben mit den Auflösungen ein Hinderniss fanden" — wie er in der Vorrede bemerkt — die Auflösungen von den Aufgaben gänzlich getrennt und die Sammlung in zwei getrennten Heften erscheinen lassen, so dass die Aufgaben auch allein ohne die Auflösungen bezogen

werden können. Dadurch wird ohnstreitig verschiedenen Bedürfnissen gleichmässig begegnet, indem in den Fällen, wo die Zugabe der Auflösungen in die Hände der Schüler wünschenswerth oder nothwendig erscheint, die erwähnte Trennung kein Hinderniss darbietet. Ueber die Benutzung der Auflösungen von Seiten der Schüler und über die Zulässigkeit, sie ihnen in die Hände zu geben, hat übrigens der Verfasser bereits in der Vorrede zur ersten Auflage die nach der Meinung des Referenten ganz richtigen Gesichtspunkte selbst aufgestellt und jeder erfahrene Lehrer dürfte ihm darin wohl beistimmen.

Ob alle Aufgaben der Fassungskraft eines Schülers angemessen sind, darüber werden voraussichtlich die Urtheile verschieden ausfallen, auch wird dabei die grössere oder geringere Ausdehnung des Unterrichts maassgebend werden. Manche Aufgaben oder Fragen hätten nach der Ansicht des Referenten besser wegbleiben können, namentlich solche, deren Lösung oder Beantwortung von Seiten eines Schülers füglich in Nichts anderem, als in einer einfachen oder wörtlichen Reproduktion des im Lehrbuche darüber Gelesenen oder beim Unterrichte Gehörten bestehen kann, da an eine eigene Bearbeitung des Gegenstandes noch nicht zu denken ist. Z. B. die Fragen in XXIV. Nr. 10: „Man sieht oft, besonders an heissen Tagen, die Spitzen ferner Gegenstände lebhaft zittern; worauf beruht dieses? Nr. 11: Wie erklärt sich das Funkeln der Sterne? Warum bemerken wir es stärker an Fixsternen als an Planeten? Nr. 13: Wenn man Papier mit Oel tränkt, so wird es durchsichtiger, wie erklärt man dies, da doch die Luft, die vorher die Poren des Papiers einnahm, durchsichtiger ist als Oel? u. s. w. Derartige Fragen veranlassen den Schüler, die Antwort ohne Weiteres entweder aus dem Lehrbuche, respective niedergeschriebenen Hefte oder aus den beigegebenen Auflösungen abzuschreiben, oder sind im Stande, manche Persönlichkeiten zur Aufstellung von unreifen, dünkelhaften Urtheilen zu reizen. Beiläufig bemerkt, sind über die Ursache des Funkelns der Sterne die Physiker noch nicht einmal übereinstimmender und entschiedener Meinung und die vom Verfasser in den Auflösungen gegebene Erklärung fasst das Phänomen nur einseitig auf, und kann schon deshalb nicht genügen. (Vergl. diese Zeitschrift S. 384 u. f.)

Für das Ganze werden indessen diese oder einige dem ähnliche Ausstellungen von nur unerheblicher Natur bleiben und können den Werth der Sammlung wenig beeinträchtigen. Es sei also schlüsslich noch der Wunsch ausgesprochen, dass eine fleissige Benutzung dieser Sammlung das unter Schülern noch weit verbreitete Vorurtheil mit verbannen helfe, dass die Unterrichtsstunden in der Physik (und Chemie) lediglich zu ihrer Unterhaltung und Ergötzung angesetzt seien. WITZSCHEL.

Die Redaction der pädagogischen Monatsschrift für die Schweiz übersendet uns eine bereits in jener Zeitschrift abgedruckte Recension, die auch in weiteren Kreisen bekannt zu werden verdient; wir theilen ihren Hauptinhalt im Folgenden mit, die Verantwortlichkeit dafür den Herren Verfassern überlassend.

Elemente der allgemeinen Arithmetik von BOOTZ, Hilfslehrer der Mathematik an d. technisch. Schule zu Erlangen. (Erlangen, Friedr. Enke.)

Wir bedauern, den Verfasser des genannten Werkes in seinem Streben nach literarischem Rufe ein bischen stören und unsern Lesern von einem

neu erschienenen mathematischen Werke sprechen zu müssen, das mit Ausnahme einer nicht selten ganz inkorrekten Darstellung zum grossen Theil ein Plagiat ist, eklatanter, als es unsere an literarischen Erscheinungen doch so reiche Zeit vielleicht je aufzuweisen hatte, von einem Buche, das selbst bis zur Vorrede hin andern Werken häufig ganz wörtlich, dann wieder mit Auslassungen und Abänderungen entnommen wurde, wie sie der Lehrer etwa bei trägen oder unfähigen Schülern wahrzunehmen Gelegenheit hat. Man nimmt es bekanntlich einem Autor durchaus nicht übel, wenn er bei Abfassung eines Buches bereits vorhandene Werke benützt, das Gute derselben nachzuahmen, deren Fehler zu vermeiden sucht; ja man lässt es noch hingehen, wenn er ganze Stellen wörtlich abdruckt, wofern er dann ehrlich genug ist, die Quellen zu nennen. Wenn er aber blos abschreibt und dabei höchstens sich die Mühe nimmt, den Stoff durcheinander zu rütteln, da und dort nach Art des Schulbuben einen Ausdruck abzuändern oder wegzulassen, dann solches Machwerk für eigene Arbeit ausgiebt, Honorar dafür bezieht und das Publikum täuscht: so ist das freilich eine Manier, die ernstlich gerügt zu werden verdient.

Dies ist nun wirklich in auffallendem Grade bei der Arbeit des Herrn Bootz der Fall, die nicht etwa eine anständige „Benützung“, sondern zum grossen Theil eine bald wörtliche, bald entstellte Copie der voriges Jahr erschienenen „Algebra von Orelli“ ist, und wir haben allen Grund anzunehmen, dass der übrige Theil in gleicher Weise irgend einem andern, uns nicht gerade bekannten Werke entnommen sei. Zum Belege für unsere Behauptung wollen wir nur Einiges von dem aufzählen, was wir in der Zeit einer flüchtigen Stunde sofort theils als wörtlichen Abdruck, theils als Entstellung des genannten Werkes über Algebra erkannt haben, um dem Leser, der sich die Mühe der Vergleichung nehmen will, langes Suchen zu ersparen. Schon die Lehre von den Wurzelgrössen riecht, wie wir in der Folge noch specieller zeigen werden, sehr stark nach fremdem und nichts weniger als selbstständig verarbeitetem Eigenthum; §. 76 (Seite 104 bis 109) ist durchgehends reine Copie mit geringen, jedoch stets auf Unkosten der Deutlichkeit gemachten Abänderungen. Die „Lösungen“ der Aufgaben 19, 20, 21 und 22 auf Seite 146, 147 und 148, dann die Aufgaben 3 und 4 auf Seite 175 und 176, sowie alles auf die Diskussion der Gleichungen Bezügliche sind theils wörtlich, theils mit entstellenden Weglassungen abgedruckt. Der Leser vergleiche gefälligst §. 88 und 89 in Bootz mit Nr. 112 in Orelli, ferner §. 98 in jenem mit Nr. 126 in diesem, §. 96 und 97 in ersterm mit Nr. 124 und 131 in letzterm und er wird finden, dass Herr Bootz sich bisweilen nicht einmal die Mühe nimmt, die Beispiele zu ändern (vgl. Anmerkung auf S. 168 mit pag. 118 in Orelli). Und wo Herr Bootz für gut gefunden, Abänderungen vorzunehmen, da hat er nicht selten Unrichtigkeiten oder förmlichen Unsinn zu Tage gefördert. So wird z. B. auf Seite 112 in Orelli's Lehrbuch gezeigt, dass die quadratische Gleichung nicht mehr als zwei Wurzeln haben könne und ausdrücklich bemerkt, dass dieser Satz später noch in anderer Weise dargethan werde. Was thut nun Herr Bootz? Er will zwei Fliegen mit einem Schlage haben, und zieht darum die beiden Beweise in der Art zusammen, dass er den zweiten als Begründung des ersten erscheinen lässt; denn nachdem er den ersten mit: „es hat folglich eine Gleichung des zweiten Grades nie mehr als zwei Wurzeln“ geschlossen, leitet er mit „denn“ sogleich den zweiten ein. Das ist Bootz'sche Logik! Ebenso ungeschickt reiht er auf Seite 148 den voran-

gehenden Aufgaben noch die Aufgabe 22 an, welche auf Seite 102 des mehrfach genannten Buches als Beispiel benutzt wird, um zu zeigen, wie bisweilen die Fassung solcher Aufgaben, deren Unmöglichkeit sich durch negative Werthe der Unbekannten kund giebt, so abgeändert werden kann, dass diese gefundenen Werthe, absolut genommen, der veränderten Aufgabe ein Genüge leisten. Nun schreibt Herr Bootz einfach Aufgabe und Lösung ab, lässt aber die zum Verständniss ihrer Stellung und Bedeutung erforderlichen Bemerkungen weg, so dass der Leser weder begreift, wie die Aufgabe hieher gekommen, noch wozu sie überhaupt dienen soll. Am schlimmsten ist's Herrn Bootz in der Lehre von den Potenzen und Wurzelgrössen ergangen. Da bringt er nämlich auf S. 81 den Satz: „Für Potenzen und Wurzelgrössen mit gebrochenen Exponenten gelten ganz die nämlichen Regeln, wie für Potenzen und Wurzelgrössen mit ganzen Exponenten", der sich in Orelli auf Seite 49 findet. Nun ist in letzterm Buche das Verfahren bloss an einigen Sätzen aus der Potenzenlehre und an einem oder zweien aus der Lehre von den Wurzelgrössen gezeigt worden, die vollständige Durchführung aber dem Schüler überlassen; ja es ist sogar aus Versehen das letzte Beispiel $\left(\sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{r}{s}}$ nicht ganz zu Ende geführt, indem nämlich mit dem letzten Resultat $a^{\frac{pmr}{snq}}$ noch eine kleine Transformation vorzunehmen wäre, um $\sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{pr}{qs}}}$ zu erhalten. Herr Bootz bringt nun nicht blos die gleichen Beispiele, nicht mehr, nicht weniger, sondern er ist bei dem letzten auch ganz am gleichen unvollendeten Ziele stehen geblieben, wie sein Original. Wir sind ihm jedoch die Anerkennung schuldig, dass er in den Entwicklungen 3, 4 und 5, pag. 81, eine kleine Aenderung versuchte, dabei aber regelmässig in den für ihn zwar unbedeutenden Fehler verfiel, den zu beweisenden Satz bereits voraus zu setzen und sich also gerade auf das zu stützen, was er beweisen sollte. Aehnliches Malheur ist ihm auf S. 72 bei der Potenzirung eines Produktes passirt; er scheint eine Citation missverstanden zu haben und wendet dann einen Satz an, mit dem man niemals zum Ziele kommen kann.

Doch wir wollen den Leser selber urtheilen lassen, indem wir nur einige Proben mittheilen, wie man sie in Bootz mehr als nur zu Dutzenden finden kann.

Bootz: Seite 147

„Auflösung: Die Menge des herausfliessenden Wassers hängt ab von der Weite der Röhre und von der Geschwindigkeit des Wasserstroms; wären die Geschwindigkeiten bei beiden Röhren gleich, so müssten die herausfliessenden Wassermengen sich verhalten wie die Weiten der Röhren, während wenn beide Röhren gleiche Weiten hätten, die herausfliessenden Wassermengen sich

Orelli: Seite 96

„Auflösung: Die Menge des herausfliessenden Wassers hängt offenbar ab 1) von der Weite der Röhre, 2) von der Geschwindigkeit des Wasserstroms, und soviel ist jedenfalls klar, dass, wenn die Geschwindigkeiten bei beiden Röhren gleich wären, die herausfliessenden Wassermengen sich zu einander verhalten müssten, wie die Weiten der Röhren, während wenn beide Röhren gleiche Weiten

Bootz:

wie die Geschwindigkeiten der Wasserströme verhielten. Nun haben aber die beiden Röhren R und R' weder gleiche Oeffnungen, noch gleiche Geschwindigkeiten des Wasserstroms; um daher das Verhältniss der aus beiden herausfliessenden Wassermengen zu bestimmen, denken wir uns eine dritte Röhre r, welche mit der Röhre R gleiche Weite der Oeffnung, mit der Röhre R' gleiche Geschwindigkeit des Wasserstroms hat. Da nun R und r gleiche Oeffnungen haben, so werden sich die aus ihnen fliessenden Wassermengen M und m wie die Geschwindigkeiten der Wasserströme, also

1) $M : m = 8 : 7$

verhalten" etc.

Orelli:

hätten, die herausfliessenden Wassermengen sich zu einander verhielten, wie die Geschwindigkeiten der Wasserströme. Nun haben aber die Röhren A und B weder gleiche Weiten, noch gleiche Geschwindigkeiten des Wasserstroms; um daher das Verhältniss der aus beiden herausfliessenden Wassermengen zu bestimmen, denken wir uns für einen Augenblick noch eine dritte Röhre C, welche mit A gleiche Weite, mit B gleiche Geschwindigkeit des Wasserstromes hat. Da nun A und C gleiche Oeffnungen haben, so werden sich die aus ihnen herausfliessenden Wassermengen m und M_1 wie die Geschwindigkeiten der Wasserströme verhalten, also:

$$m : M_1 = 8 : 7 \qquad (1)$$

u. s. f."

Seite 182

„Wenn wir einen zweitheiligen Ausdruck, von welchem entweder ein oder auch beide Glieder Wurzelgrössen vom zweiten Grade sind, quadriren, so erhalten wir Ausdrücke, die aus einem rationalen und einem irrationalen Theil bestehen und also allgemein von der Form $M + \sqrt{N}$ sind; denn"

(folgen einige Beispiele, wie sie im Original vorangestellt sind).

Umgekehrt werden wir einen Ausdruck von der Form $M + \sqrt{N}$ als das Quadrat eines ganz oder zum Theil irrationellen zweitheiligen Ausdruckes ansehen können und es wird deshalb manchmal möglich sein, die Quadratwurzel aus einem solchen Ausdruck in eine Summe zweier Wurzelgrössen zu zerlegen" etc.

Seite 143

„Wir haben hier also durch Quadrirung eines Binoms, von welchem entweder ein oder auch beide Glieder Wurzelgrössen vom zweiten Grade waren, Ausdrücke erhalten, die aus einem rationalen und einem irrationalen Theil bestehen und also allgemein von der Form sind $A + \sqrt{B}$.

Umgekehrt werden wir auch einen Ausdruck von der Form $A + \sqrt{B}$ als das Quadrat eines ganz oder wenigstens zum Theil irrationalen Binoms ansehen können, und es wird daher bisweilen möglich sein, die Quadratwurzel aus einem solchen Ausdruck in eine Summe zweier Wurzelgrössen zu zerlegen" etc.

Aus dem Vorwort von Bootz:

„Ich bemühte mich, neben Gründlichkeit und Klarheit in der Darstellung auch Vollständigkeit in der Art zu erzielen, dass dem sorgfältig studirenden Leser auch nicht eine Stelle unverständlich bleibe: denn nichts

Aus d. Vorwort v. Orelli p. VII:

„Soll ein Lehrbuch der Mathematik auch ohne Anleitung eines Lehrers mit Erfolg benutzt werden können, so ist neben Klarheit und Gründlichkeit in der Darstellung auch Vollständigkeit in der Art erforderlich

Angewandte Mathematik.

Schauplatz, neuer, der Künste und Handwerke. 184. Bd.: Perspective, oder die Lehre von den Projectionen; bearb. von A. W. Hertel. 2. Aufl. Mit Atlas in Qu.-Fol. 1857. Weimar, Voigt. Geh. 2⅚ Thlr.

Lemoch, J. Lehrbuch der praktischen Geometrie. 2. Aufl. Lex.-8. 1857. Wien, Braumüller's Verlagsconto. Geh. 3 Thlr. 18 Ngr.

Goulard-Henrionnet. Handbuch der Feldmesskunde. Deutsch bearbeitet von A. W. Hertel. 2. Aufl. gr. 8. 1857. Weimar, Voigt. Geh. 2 Thlr.

Heider, E. S. Systematische Anleitung zum Traciren u. Project-Verfassen der Eisenbahnen. gr. 8. Wien, Zamarsky. Geh. 1 Thlr.

Oeltzen, W. Nachweis d. Vorkommens von Sternen aus den Angelander'schen nördlichen Zonen in andern Quellen. 2 Abth. Lex.-8. Wien, Braumüller in Comm. Geh. 12 Ngr.

Müller, J. Die Aequatorialzone des gestirnten Himmels. qu. Imp.-Fol. Mit Text in 8. Freiburg im Br., Wagner'sche Buchhandlung. 1 Thlr. 8 Ngr.

Arago, F. *Oeuvres complètes publiées par J. A. Barral. Tom. XIII.* Astronomie. *Tom. III.* gr. 8. Berlin, Schneider & Comp. Geh. 2 Thlr.

Physik.

v. Kalckstein, M. Grundlinien einer physikalischen Erdbeschreibung. 2. Aufl. gr. 8. Berlin, Schneider & Comp. Geh. ⅓ Thlr.

Cornelius, C. S. Ueber die Bildung der Materie aus ihren einfachen Elementen. gr. 8. Leipzig, O. Wigand. Geh. ⅓ Thlr.

Huber, Ph. Grundzüge der technischen Naturlehre. gr. 8. Pforzheim, Flammer. Geh. ⅚ Thlr.

Schabus, J. Leichtfassliche Anfangsgründe der Naturlehre. 4. Aufl. gr. 8. 1857. Wien, Gerold's Sohn. Geh. 1 Thlr.

de Claude's Anfangsgründe der Physik. gr. 8. München, Kaiser. Geh. 1 Thlr. 12 Ngr.

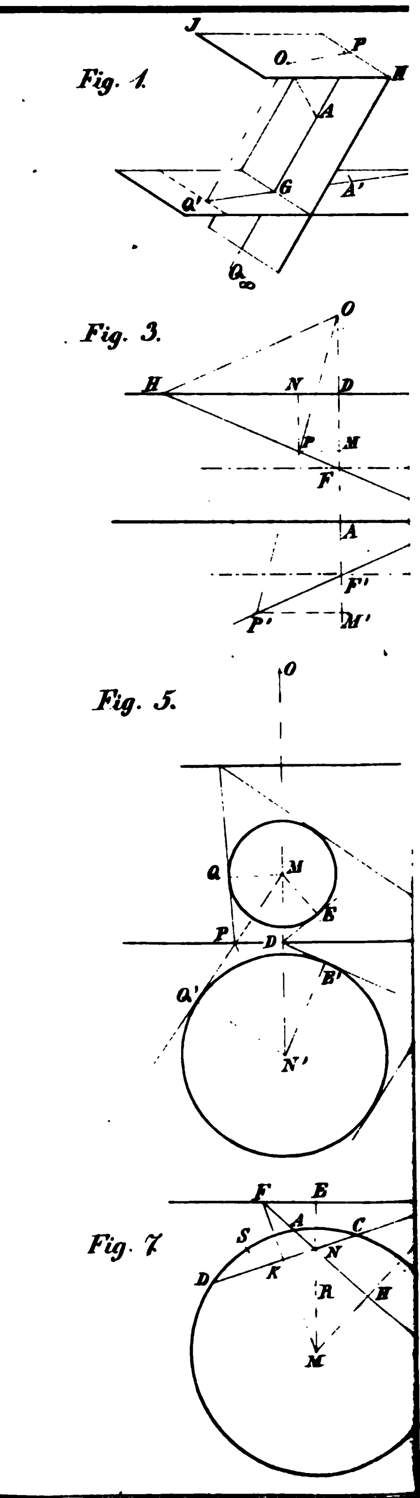
Schabus, J. Grundzüge der Physik. 2. Lfg. gr. 8. Wien, Gerold's Sohn. Als Rest. cplt. 2 Thlr. 12 Ngr.

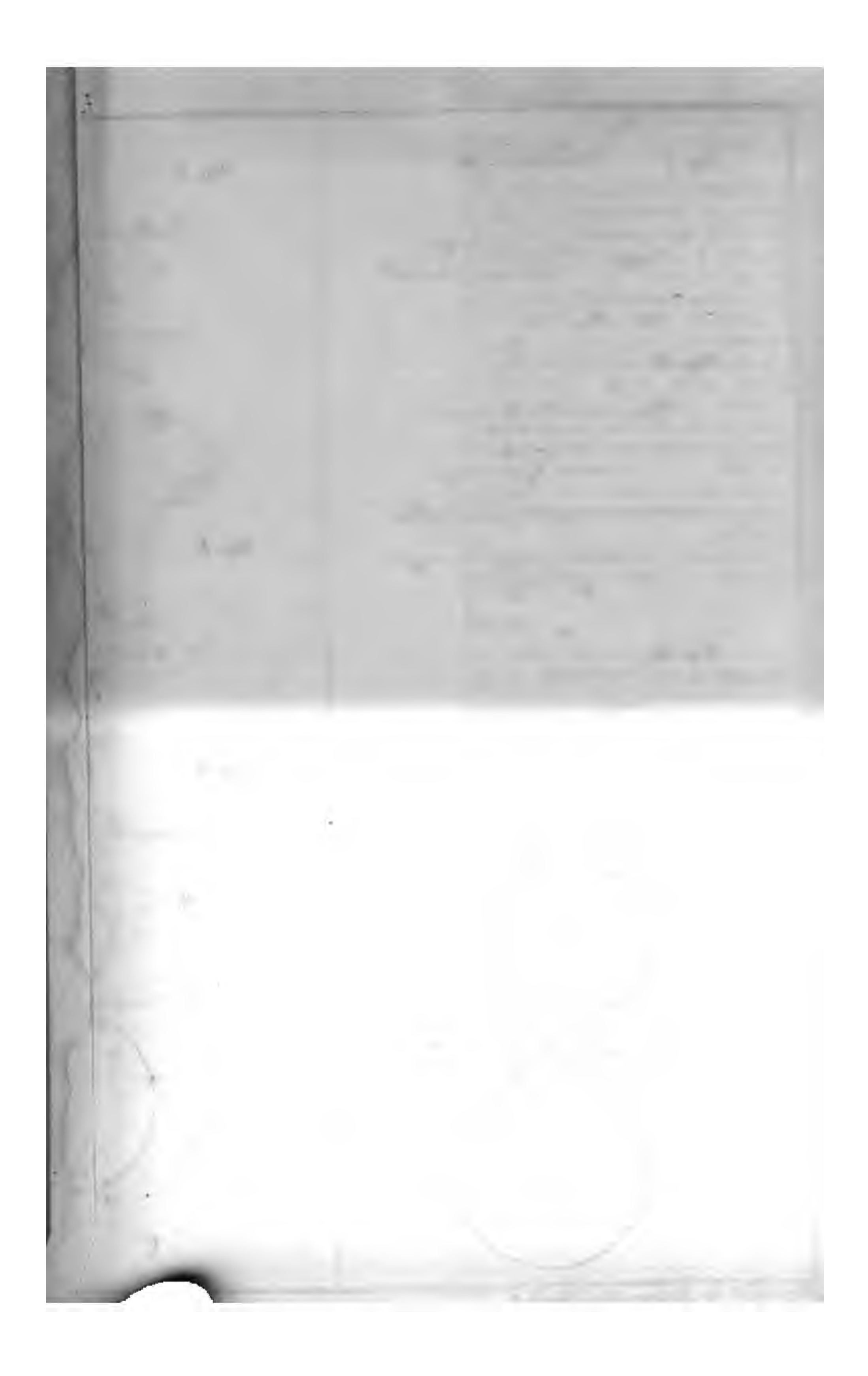
Die Fortschritte der Physik im J. 1853. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. IX. Jahrg. Redig. v. A. Krönig. gr. 8. Berlin, G. Reimer. Geh. 4 Thlr.

Pohl, J. J. Ueber die Verwendbarkeit des Mitscherlich'schen Polarisations-Saccharometers zu chemisch-technischen Proben. Lex.-8. Wien, Braumüller in Comm. Geh. ⅙ Thlr.

Schabus, *Principii fondamentalè di fisica. Prima traducione italiana da M. G. Marini.* 8. 1857. Wien, Gerold's Sohn. Geh. 1 Thlr.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.


Fig. 1.
J
O
P
H
A
G
Q'
A'
Q∞
Fig. 3.
O
H
N
D
P
M
F
A
F'
P'
M'
Fig. 5.
O
Q
M
E
P
D
E'
Q'
N'
Fig. 7.
F
E
A
C
S
N
D
K
R
H
M



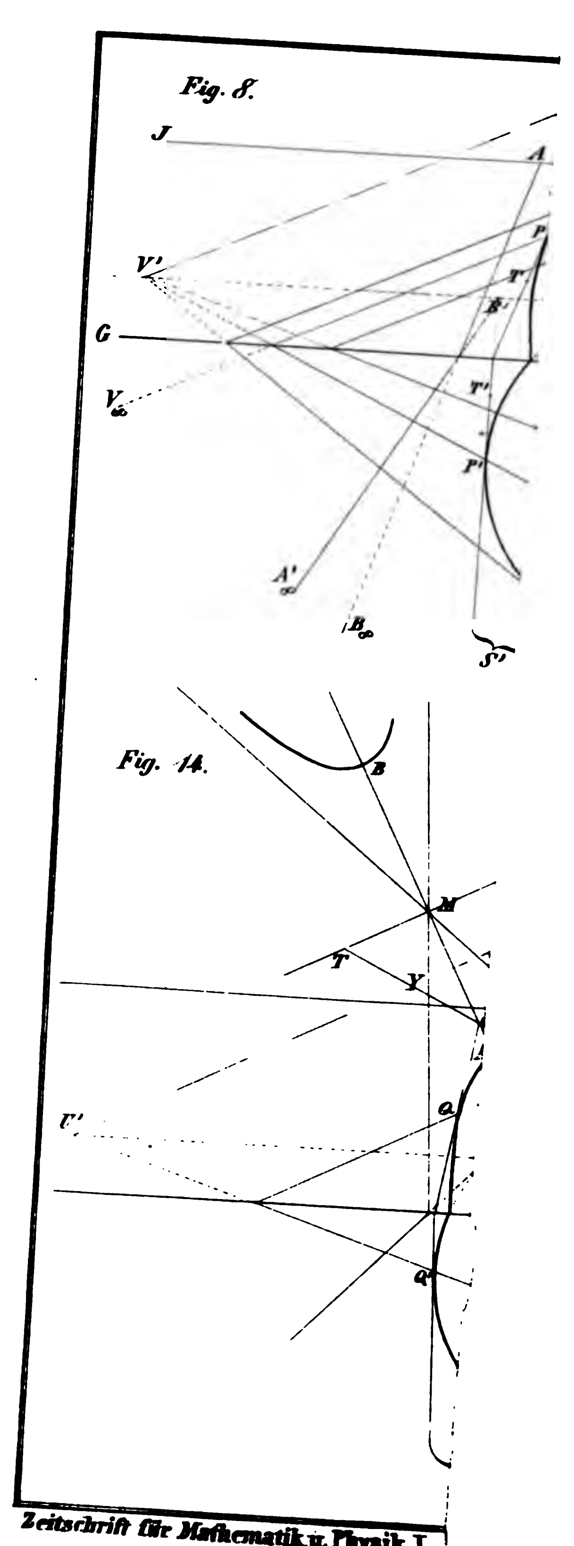
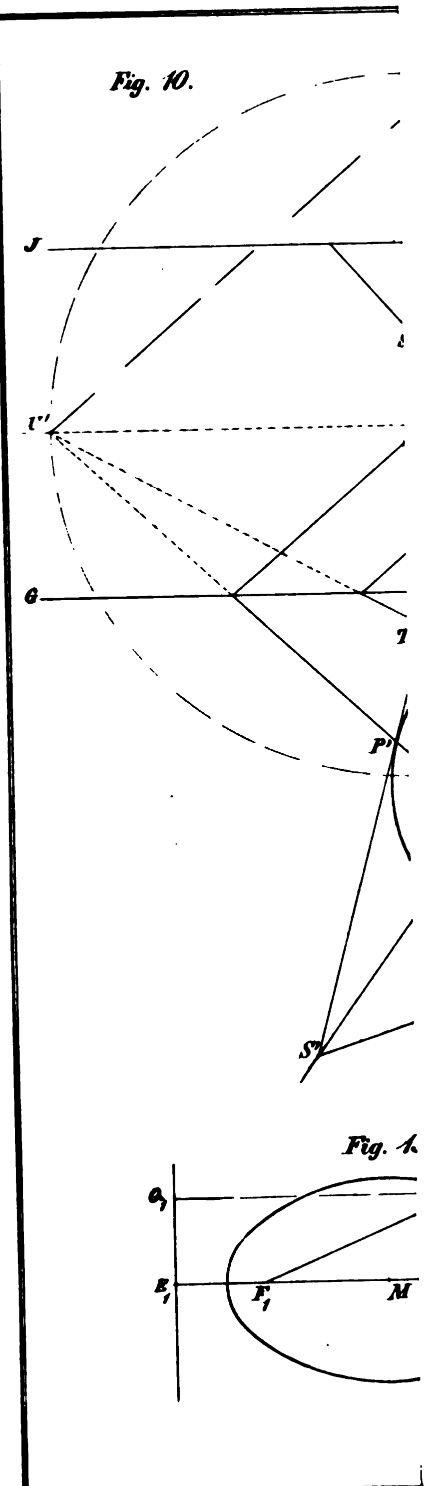


Fig. 8.
J
A
P
T
B
V'
G
V∞
T'
P'
A'∞
B∞
S'
Fig. 14.
B
M
T
Y
U'
Q
Q'


Fig. 10.
J
V''
G
P'
S''
Fig. 1.
Q₁
E₁
F₁
M

Angewandte Mathematik.

Schauplatz, neuer, der Künste und Handwerke. 184. Bd.: Perspective, oder die Lehre von den Projectionen; bearb. von A. W. Hertel. 2. Aufl. Mit Atlas in Qu.-Fol. 1857. Weimar, Voigt. Geh. 2⅚ Thlr.

Lemoch, J. Lehrbuch der praktischen Geometrie. 2. Aufl. Lex.-8. 1857. Wien, Braumüller's Verlagsconto. Geh. 3 Thlr. 18 Ngr.

Goulard-Henrionnet. Handbuch der Feldmesskunde. Deutsch bearbeitet von A. W. Hertel. 2. Aufl. gr. 8. 1857. Weimar, Voigt. Geh. 2 Thlr.

Heider, E. S. Systematische Anleitung zum Traciren u. Project-Verfassen der Eisenbahnen. gr. 8. Wien, Zamarsky. Geh. 1 Thlr.

Oeltzen, W. Nachweis d. Vorkommens von Sternen aus den Angelander'schen nördlichen Zonen in andern Quellen. 2 Abth. Lex.-8. Wien, Braumüller in Comm. Geh. 12 Ngr.

Müller, J. Die Aequatorialzone des gestirnten Himmels. qu. Imp.-Fol. Mit Text in 8. Freiburg im Br., Wagner'sche Buchhandlung. 1 Thlr. 8 Ngr.

Arago, F. *Oeuvres complètes publiées par J. A. Barral. Tom. XIII.* Astronomie. *Tom. III.* gr. 8. Berlin, Schneider & Comp. Geh. 2 Thlr.

Physik.

v. Kalckstein, M. Grundlinien einer physikalischen Erdbeschreibung. 2. Aufl. gr. 8. Berlin, Schneider & Comp. Geh. ⅓ Thlr.

Cornelius, C. S. Ueber die Bildung der Materie aus ihren einfachen Elementen. gr. 8. Leipzig, O. Wigand. Geh. ⅓ Thlr.

Huber, Ph. Grundzüge der technischen Naturlehre. gr. 8. Pforzheim, Flammer. Geh. ⅙ Thlr.

Schabus, J. Leichtfassliche Anfangsgründe der Naturlehre. 4. Aufl. gr. 8. 1857. Wien, Gerold's Sohn. Geh. 1 Thlr.

de Claude's Anfangsgründe der Physik. gr. 8. München, Kaiser. Geh. 1 Thlr. 12 Ngr.

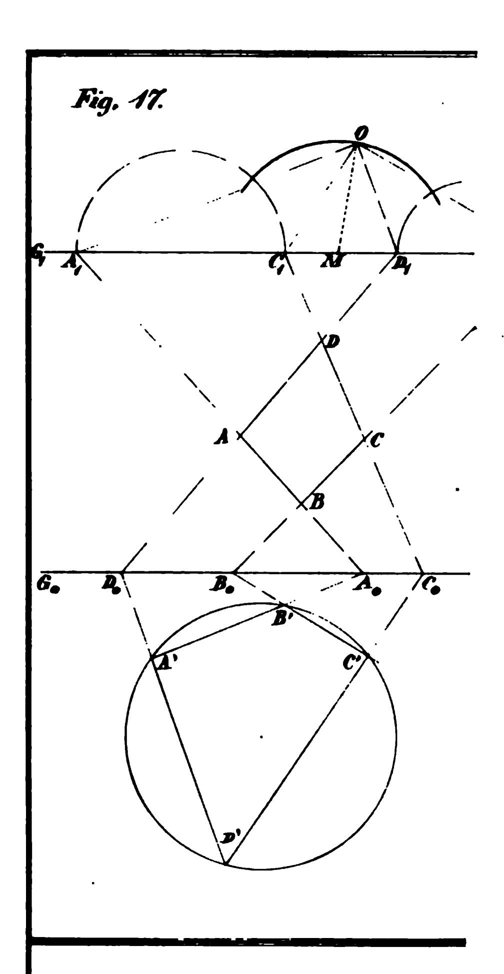
Schabus, J. Grundzüge der Physik. 2. Lfg. gr. 8. Wien, Gerold's Sohn. Als Rest. cplt. 2 Thlr. 12 Ngr.

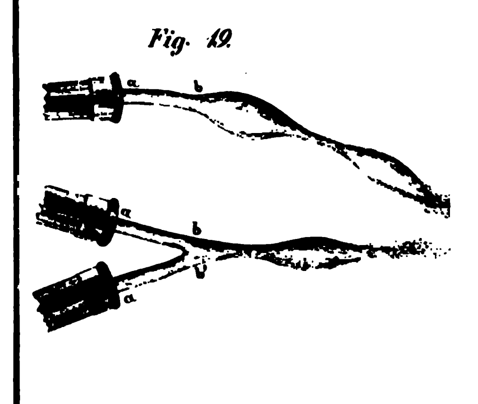
Die Fortschritte der Physik im J. 1853. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. IX. Jahrg. Redig. v. A. Krönig. gr. 8. Berlin, G. Reimer. Geh. 4 Thlr.

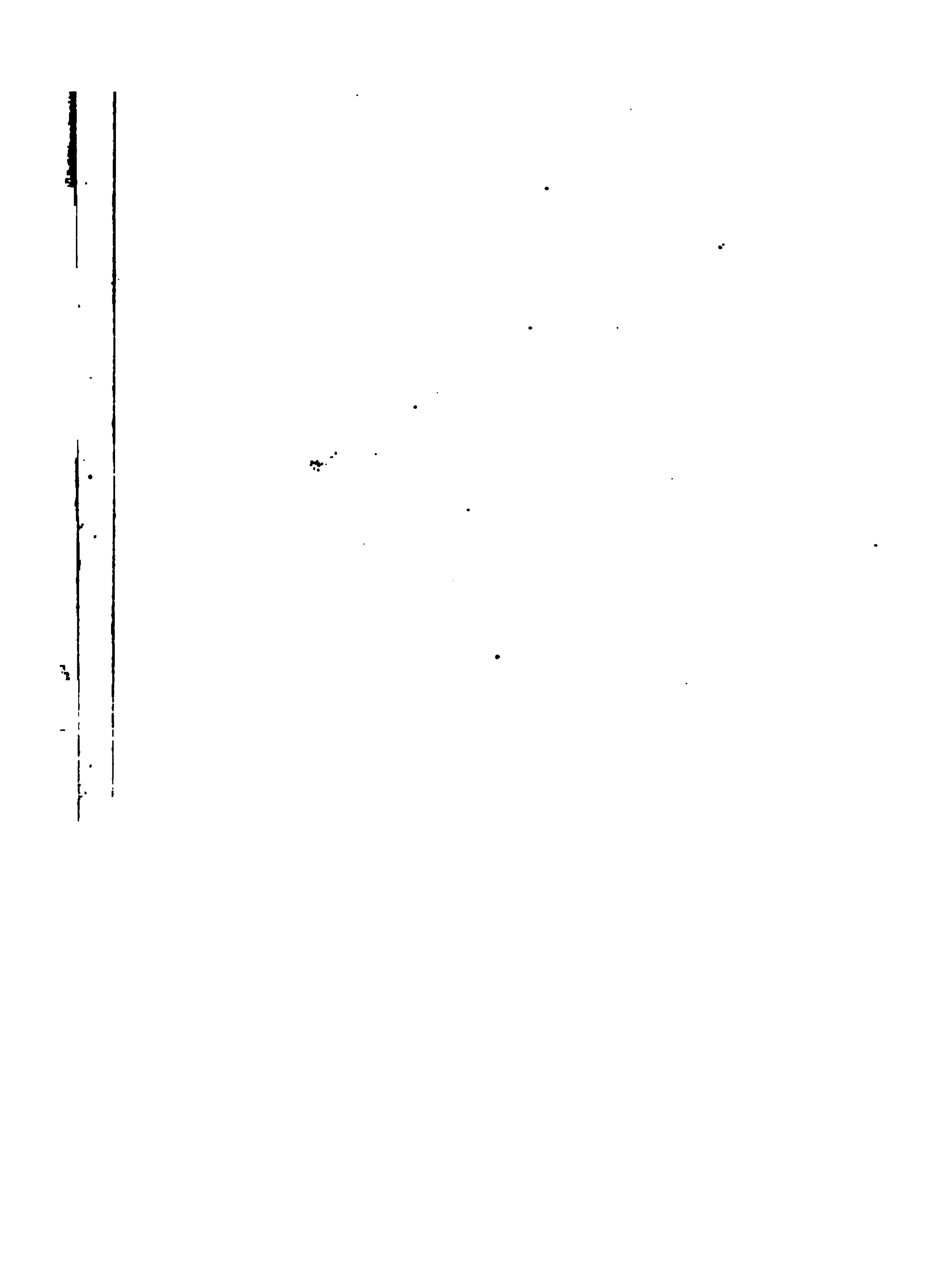
Pohl, J. J. Ueber die Verwendbarkeit des Mitscherlich'schen Polarisations-Saccharometers zu chemisch-technischen Proben. Lex.-8. Wien, Braumüller in Comm. Geh. ⅙ Thlr.

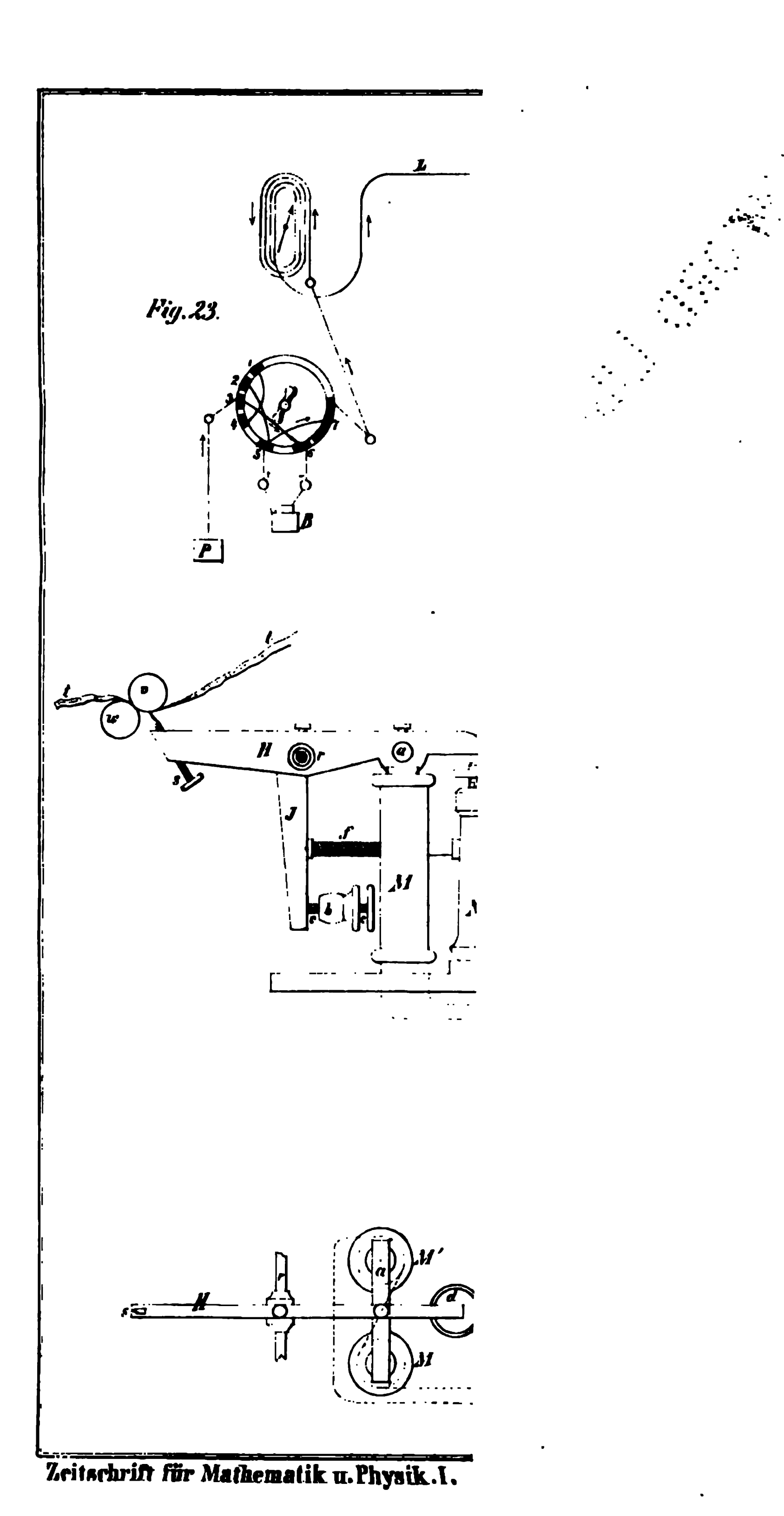
Schabus, *Principii fondamentale di fisica. Prima traducione italiana da M. G. Marini.* 8. 1857. Wien, Gerold's Sohn. Geh. 1 Thlr.

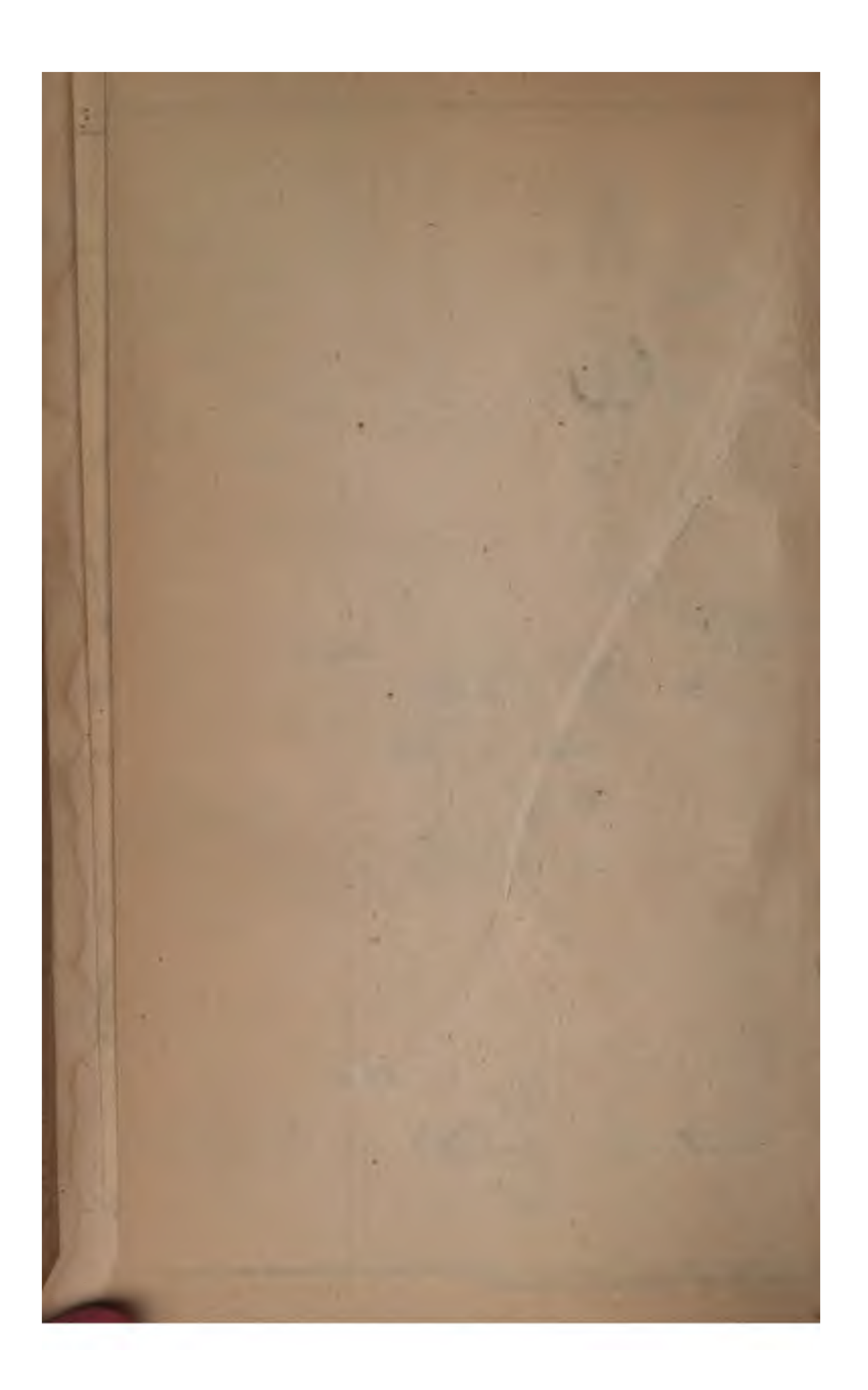
Druck von B. G. Teubner in Dresden.

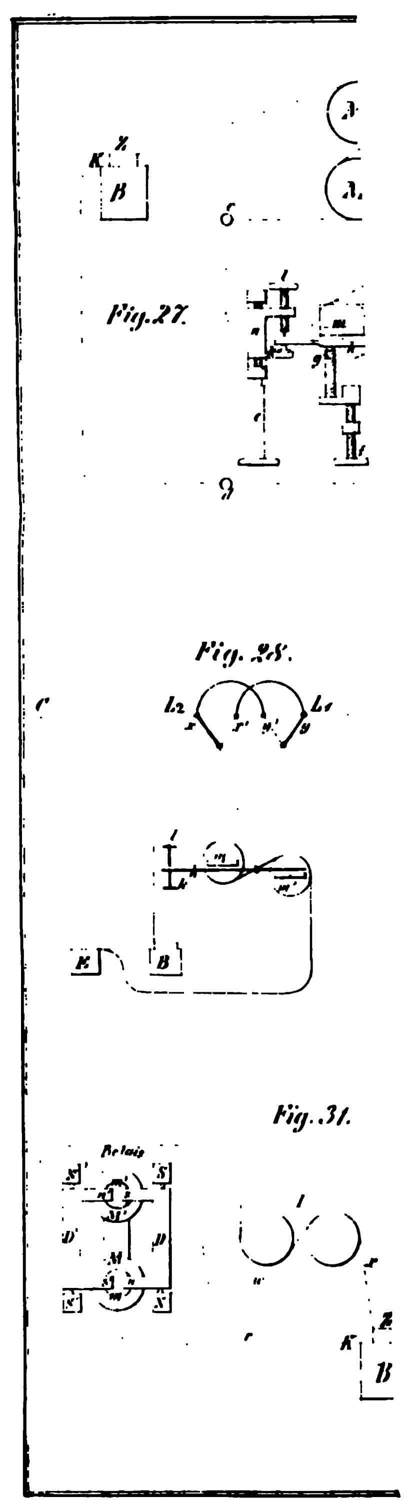

Fig. 17.
O
A1
C1
M
B1
D
A
C
B
G0
D0
B0
A0
C0
B'
A'
C'
D'


Fig. 19.
a
b
a
b
a
b

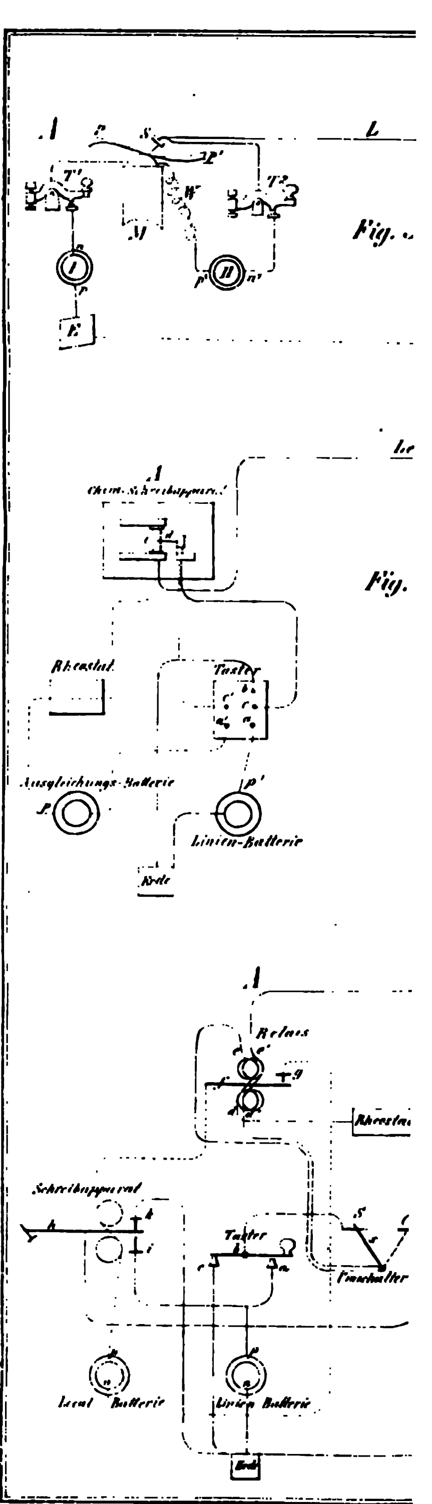



Fig. 23.
L
P
B
H
J
M
M'
E

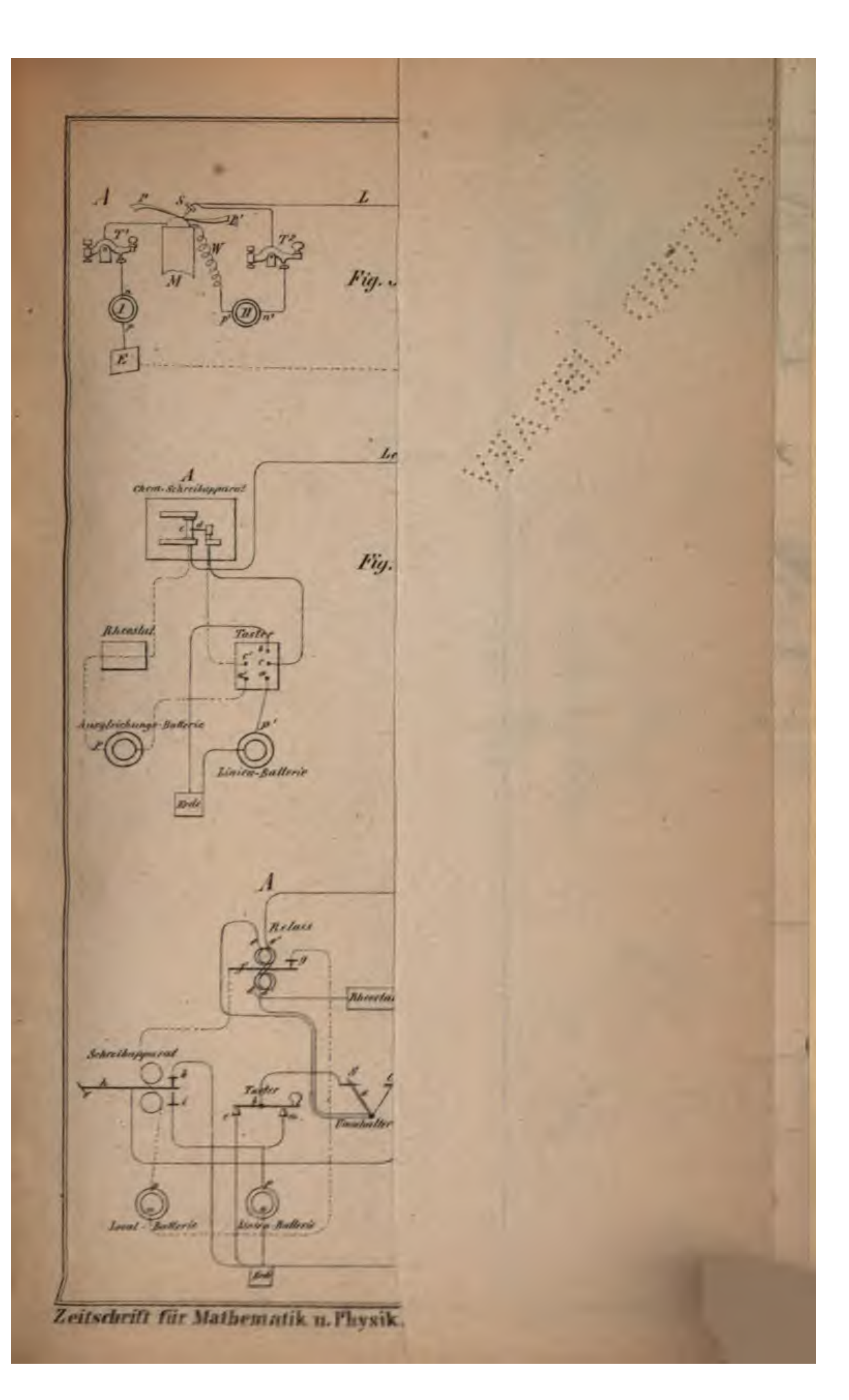



Fig. 27.
Fig. 28.
L2
L1
Fig. 31.
Relais
B
K

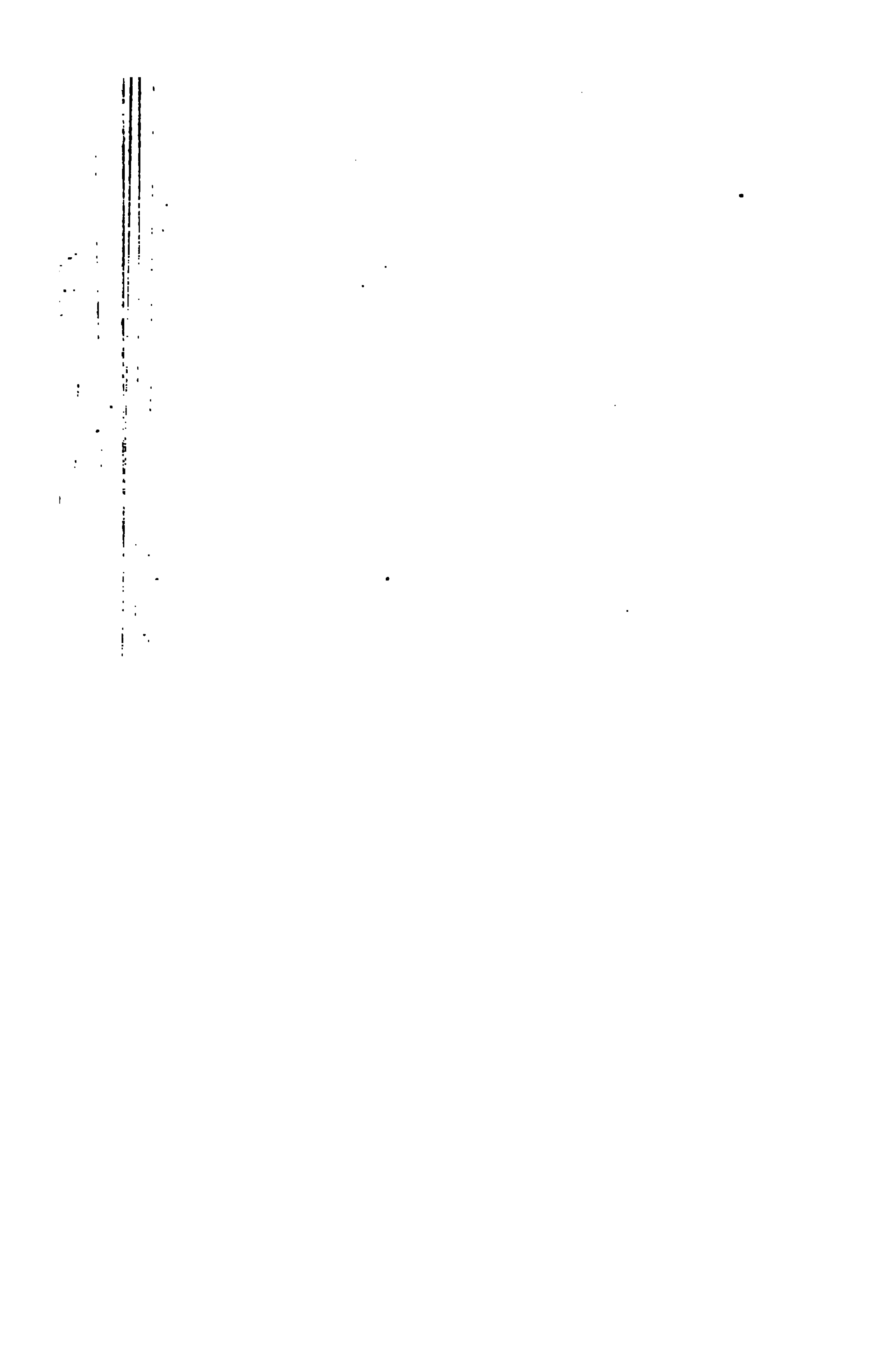


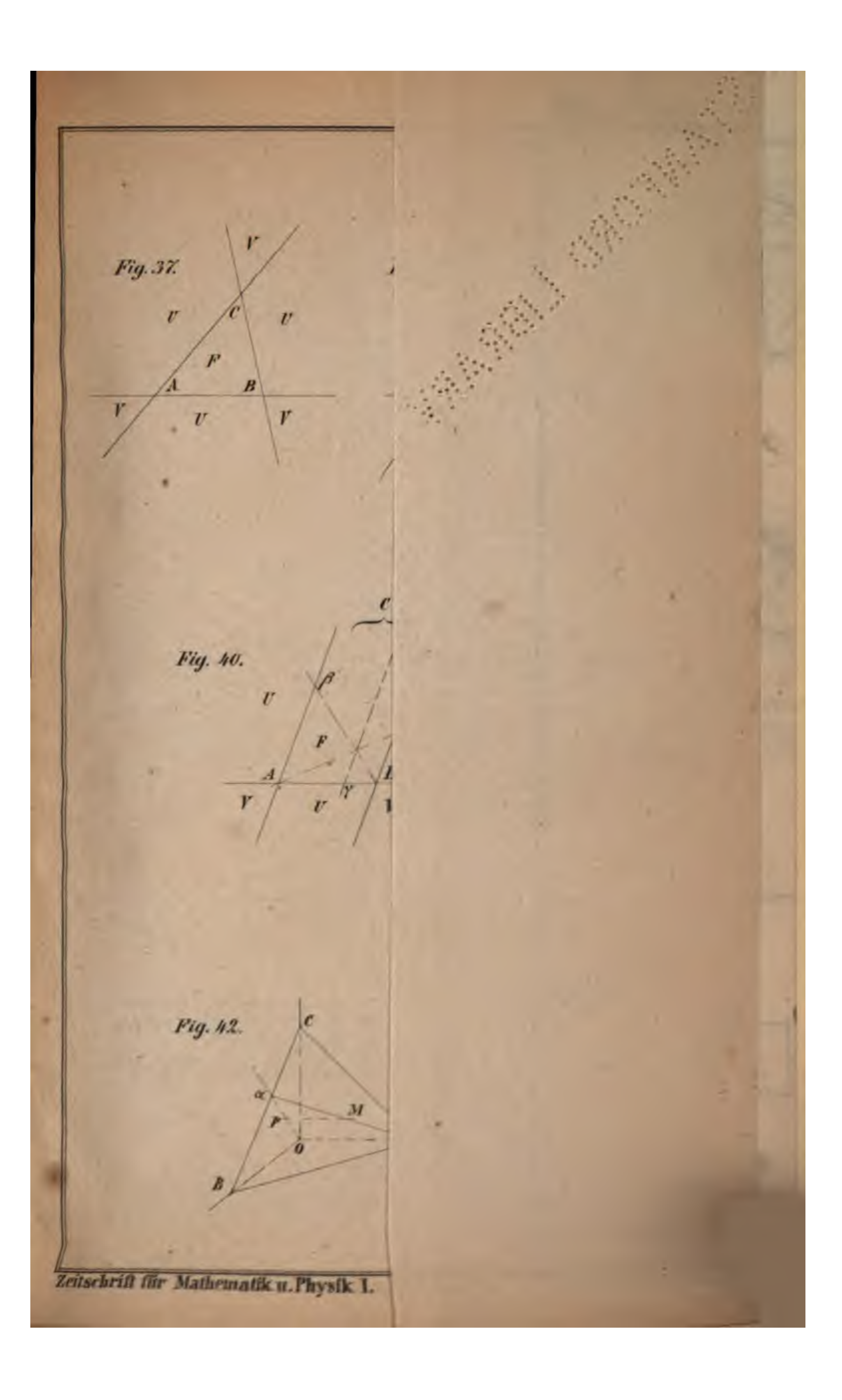

Fig.
Fig.
Chem. Schreibapparat
Rheostat
Taster
Ausgleichungs-Batterie
Linien-Batterie
Erde
Relais
Rheostat
Schreibapparat
Taster
Umschalter
Local Batterie
Linien Batterie
Erde





A
L
Fig.
A
Chem.-Schreibapparat
Fig.
Rheostat
Taster
Ausgleichungs-Batterie
Linien-Batterie
Erde
A
Relais
Schreibapparat
Taster
Umschalter
Local-Batterie
Linien-Batterie
Erde




Fig. 37.
V
U
C
U
F
A
B
V
U
V
Fig. 40.
U
F
A
V
U
Fig. 42.
C
α
M
F
O
B

